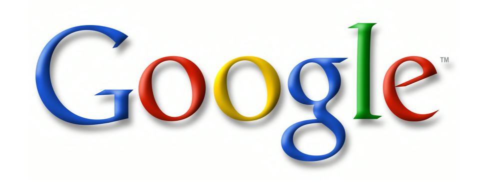
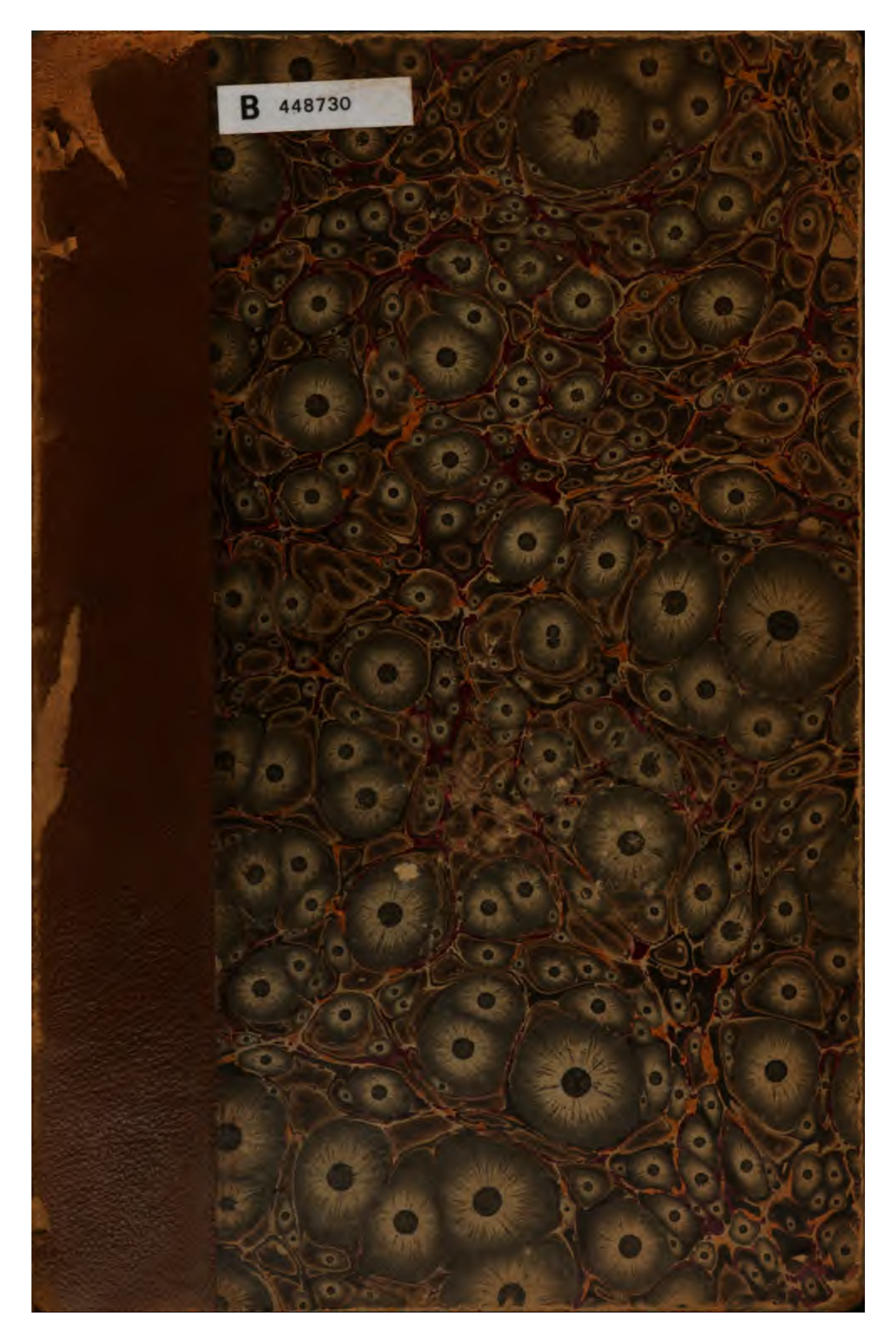



B 448730


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING
Transferred to the
GENERAL LIBRARY



COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

A L'USAGE DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

AUX ÉCOLES CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES,

DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES DE PARIS ET DE SAINT-ÉTIENNE

PAR



X. ANTOMARI

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, DOCTEUR ÈS SCIENCES

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CARNOT

PARIS

LIBRAIRIE NONY & Cie

17, RUE DES ÉCOLES, 17

1897

Les parties du livre précédées d'un astérisque peuvent être laissées de côté par les candidats à l'École centrale.

COURS
DE
GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

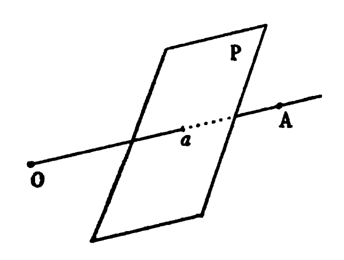
LIVRE PREMIER
LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

INTRODUCTION
LA MÉTHODE DES PROJECTIONS

§ I. — *Définitions sur les projections.*

1. Objet de la Géométrie descriptive. — La Géométrie descriptive a pour objet la représentation exacte des corps par la méthode des *projections*. Il est donc naturel de commencer l'étude de la Géométrie descriptive par celle de la méthode des projections. Nous n'étudierons d'ailleurs, dans ce qui suit, que des corps géométriques.

2. Perspective d'un point ; perspective d'une figure. — On appelle perspective ou *projection conique* d'un point A, sur un plan P, et par rapport à un *point de vue* O ou *centre de projection*, le point *a* où le plan P est rencontré par la droite OA.



On appelle perspective ou projection conique d'une figure sur le même plan et par rapport au même point de vue, le lieu géométrique ou plutôt l'ensemble des projections des divers points de la figure.

Le point O et le plan P définissent un système de projections : le

plan P est appelé le *plan de projection* ou le *plan du tableau*, et l'on dit quelquefois *projection centrale* au lieu de *projection conique ;* la droite OA s'appelle la *projetante* du point A.

3. **Projections cylindriques; projections orthogonales ou obliques.** — Lorsque le point de vue s'éloigne indéfiniment dans une direction donnée, D, la projection conique devient une *projection cylindrique* ; D s'appelle la direction des projetantes, et l'on dit que les projections sont *orthogonales* ou *obliques* suivant que les projetantes sont orthogonales ou obliques au plan de projection. Quand les projections sont orthogonales, on peut dire que la projection d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan.

En Géométrie descriptive, on emploie exclusivement les projections orthogonales; mais nous allons néanmoins entrer dans quelques détails sur les projections quelle que soit leur nature.

§ II. — *Ligne droite.*

4. **Théorème.** — *Lorsqu'une droite ne passe pas par le point de vue à distance finie ou infinie, sa projection est une ligne droite ; elle est un point dans le cas contraire.*

Il est clair, d'abord, que si une droite Δ passe par le point de vue, sa projection se réduit à l'intersection de Δ avec le plan du tableau, c'est-à-dire à un point.

Supposons donc que la droite Δ ne passe pas par le point de vue. Toutes les projetantes des divers points de la droite sont alors situées dans le plan Q déterminé par le point de vue et par la droite. Leurs traces sur le plan P sont donc sur l'intersection du plan Q et du plan P, c'est-à-dire sur une ligne droite δ, ce qui démontre le théorème.

Il est bon de remarquer que cette droite δ n'existe plus si le plan Q est parallèle au plan P; mais nous reviendrons plus tard sur ce cas particulier.

5. Remarque. — Le plan Q qui passe par la droite Δ et par le point O s'appelle le *plan projetant* de la droite : il n'est indéterminé que si la droite passe par le point O, c'est-à-dire par le point de vue.

6. **Définitions.** — On appelle *droite de front* toute droite parallèle au plan du tableau.

On appelle *trace* d'une droite le point de rencontre de cette droite avec le plan du tableau.

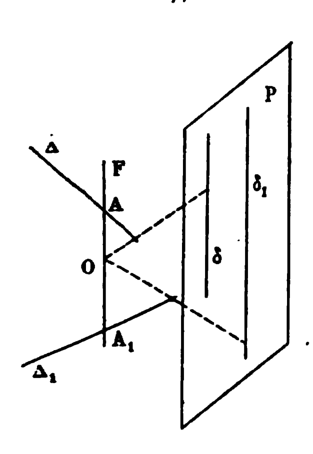
Une droite de front n'a évidemment pas de trace, et elle est parallèle à sa projection ; car, si une droite Δ est parallèle à un plan P, tout plan Q passant par Δ coupe le plan P suivant une parallèle à Δ.

Au lieu de dire qu'une droite de front n'a pas de trace, on dit encore que la trace d'une droite de front est le point à l'infini dans la direction de cette droite.

De ce qu'une droite de front est parallèle à sa projection, il suit que si plusieurs droites de front sont parallèles, leurs projections sont aussi parallèles. Ceci nous amène à chercher la condition nécessaire et suffisante pour que les projections de deux droites soient parallèles. Cette condition nous est fournie par le théorème suivant.

7. **Théorème.** — *Pour que les projections de deux droites soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles rencontrent une même droite de front passant par le point de vue.*

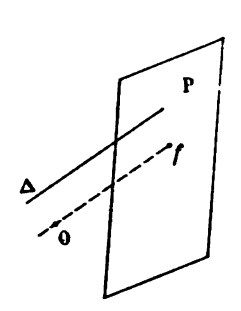
1° *C'est suffisant.* — Soient, en effet, Δ et Δ_1 deux droites rencontrant respectivement en A et en A_1 une même droite de front, F, menée par le point O. Leurs projections δ et δ_1 passent respectivement par les projections a et a_1 des points A et A_1; mais les points a et a_1 coïncident avec le point à l'infini dans la direction F, donc δ et δ_1 sont parallèles.



2° *C'est nécessaire.* — En effet, si δ et δ_1 sont parallèles, les deux plans (O, δ) et (O, δ_1), c'est-à-dire les deux plans projetants des deux droites Δ et Δ_1, se coupent suivant une droite parallèle à δ et à δ_1. Cette droite étant parallèle à δ et à δ_1 est de front ; de plus elle passe par le point O ; enfin elle est rencontrée par Δ et par Δ_1, puisqu'elle est d'une part dans le plan (O, δ), comme Δ, et d'autre part dans le plan (O, δ_1), comme Δ_1. Donc les deux droites Δ et Δ_1 rencontrent une même droite de front menée par le point O, ce qui démontre la proposition.

8. Remarque. — Ce théorème ne suppose rien sur la nature du système de projection. Il s'applique donc aux projections cylindriques comme aux projections coniques. Toutefois, nous ne pourrons nous en assurer que lorsque nous aurons acquis la notion de la *droite de l'infini* dans un plan. Pour acquérir cette notion, il est nécessaire de donner d'abord quelques définitions.

9. Point de fuite d'une droite ; ligne de fuite d'un plan. — On appelle *point de fuite* d'une droite Δ, la trace f de la parallèle à Δ menée par le centre de projection. Le point de fuite d'une droite n'est autre que la projection du point à l'infini sur la droite.

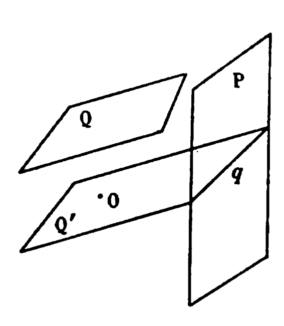


Le point de fuite d'une droite de front est le point à l'infini dans la direction de cette droite.

Lorsque plusieurs droites sont parallèles, elles ont évidemment le même point de fuite, à distance finie ou infinie. Par conséquent, si plusieurs droites sont parallèles, sans être de front, leurs projections coniques sont concourantes, mais la réciproque n'est pas vraie.

Les projections cylindriques de plusieurs droites parallèles sont toujours parallèles, parce que leurs plans projetants sont parallèles.

On appelle *ligne de fuite* d'un plan Q le lieu géométrique des points de fuite de toutes les droites du plan. Un plan Q′ parallèle au plan Q et mené par le point O, coupe le plan de projection suivant une ligne droite q qui est le lieu des points de fuite de toutes les droites du plan Q : c'est la ligne de fuite du plan. Lorsque le plan Q est parallèle au plan de projection, il n'a pas de ligne de fuite, puisque le plan Q′ est lui-même parallèle au plan de projection.



Si une droite est parallèle à un plan Q, le point de fuite de la droite est sur la ligne de fuite de ce plan ; car la parallèle menée par le point O à la droite est située dans le plan Q′.

10. Droite de l'infini dans un plan. — Puisque le point de fuite

d'une droite est la projection du point à l'infini sur la droite, la ligne de fuite d'un plan sera la perspective des points à l'infini dans le plan. Cette perspective étant une ligne droite, le lieu des points à l'infini dans un plan est une figure qui se projette toujours suivant une droite. D'autre part, si l'on considère une figure située dans un plan ne passant pas par le point de vue, il est manifeste que la projection de cette figure ne se réduit à une ligne droite que si la figure est elle-même une ligne droite. On est ainsi conduit à considérer tous les points à l'infini dans un plan comme étant en ligne droite. C'est cette droite qu'on appelle la *droite de l'infini* du plan.

11. Remarques. — 1° Nous avons vu (4) que si le plan Q, qui projette une droite Δ, est parallèle au plan de projection, la droite Δ n'a plus de projection. En réalité le plan de projection et le plan Q se coupent suivant une droite qui est à l'infini, de sorte que la projection de Δ coïncide avec la droite de l'infini du plan de projection. Cette droite est aussi la ligne de fuite de tous les plans parallèles au plan du tableau.

2° Il est aisé de voir maintenant que la proposition établie au n° 7 s'étend aux projections cylindriques. Si, en effet, le centre de projection est à l'infini dans une direction D, une droite de front menée par ce point devient la droite de l'infini d'un plan R passant par D. Dès lors la démonstration de la proposition subsiste tout entière, en remplaçant la droite de front, qui intervient dans cette démonstration, par la droite de l'infini du plan R, et en observant qu'une droite Δ qui rencontre la droite de l'infini du plan R n'est autre chose qu'une droite parallèle à ce plan ; de sorte que, *pour que les projections cylindriques de deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que les plans projetants de ces deux droites soient parallèles.*

La proposition, ainsi énoncée, aurait pu être démontrée directement, mais nous avons tenu à montrer comment on peut la déduire de la proposition plus générale établie au n° 8.

§ III. — *Lignes courbes.*

12. Lignes planes et lignes gauches; ordre d'une courbe. — On divise les lignes ou courbes de l'espace en *lignes planes* et en

lignes gauches. Les premières sont celles qui sont dans un plan, et les deuxièmes sont celles qui ne sont pas contenues dans un plan.

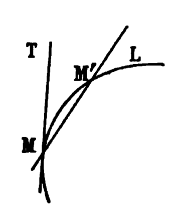
A un autre point de vue, emprunté à la Géométrie analytique, on distingue aussi les lignes en *lignes algébriques* et en *lignes transcendantes*. Nous renvoyons aux traités de Géométrie analytique pour cette distinction, que nous nous bornons à signaler ici.

On dit qu'une ligne plane *algébrique* est d'*ordre m* quand toute droite du plan la rencontre en m points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie.

On dit qu'une ligne gauche *algébrique* est d'*ordre m* quand elle est coupée par un plan en m points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie.

Ajoutons que les notions de points imaginaires et de points confondus sont aussi tirées de la Géométrie analytique.

13. Tangente et plan osculateur en un point d'une ligne. — On appelle *tangente* en un point quelconque M d'une ligne L la limite MT des positions successives occupées par une sécante MM′ quand le point M′ se rapproche indéfiniment du point M.



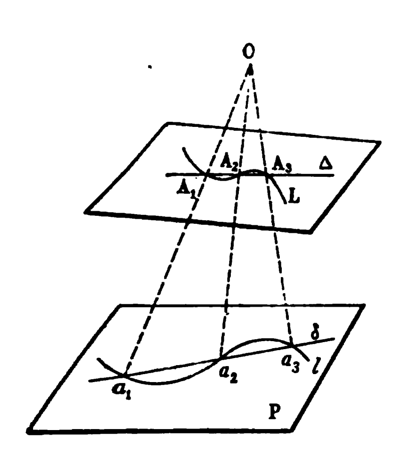
Tout plan passant par la tangente MT s'appelle un plan *tangent* en M, et l'on appelle plan *osculateur* à la courbe en ce même point la limite du plan tangent passant par un point M′ voisin du point M, quand ce point M′ se rapproche indéfiniment du point M.

Lorsque L est une courbe plane située dans un plan P, le plan osculateur en l'un quelconque de ses points coïncide avec le plan P; car le plan tangent en un point M passant par un point voisin M′ coïncide toujours avec le plan de la courbe.

Quand la courbe n'est pas plane, on démontre que le plan osculateur en un point M traverse la courbe en ce point. Autrement dit, dans le voisinage du point M, la courbe est de part et d'autre du plan osculateur.

14. Théorème. — *La projection d'une ligne plane d'ordre m est une ligne d'ordre m, pourvu que le plan de la ligne ne passe pas par le centre de projection.*

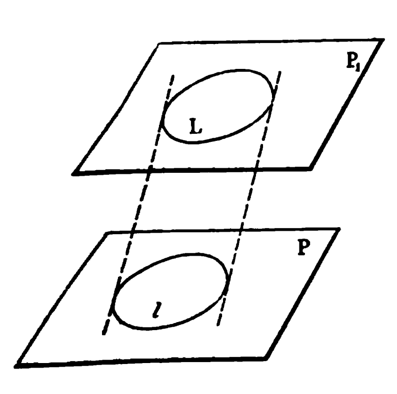
En effet, si une ligne plane L et une droite Δ se rencontrent en m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$, les projections $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de ces points se trouvent à la fois sur la projection l de L et sur la projection δ de Δ; donc la droite δ et la ligne l ont aussi m points communs. Elles n'en ont pas davantage, parce que tout autre point a, commun à l et à δ, serait nécessairement la projection d'un point commun à L et à Δ, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc la ligne l est bien d'ordre m.



Il est manifeste que si le plan de la ligne L passe par le centre de projection, la projection de cette ligne est une droite.

15. Remarque. — Les projections des divers points d'une ligne forment une surface conique ou cylindrique dont la trace sur le plan du tableau n'est autre chose que la projection de la ligne. On appelle respectivement ces deux surfaces cône ou cylindre projetant la ligne. On comprend, d'après cela, les dénominations de projections coniques ou cylindriques adoptées plus haut (2).

16. Théorème. — *Quand une ligne plane* L *est dans un plan* P_1 *parallèle au plan* P, *sa projection cylindrique sur le plan* P *est une ligne égale à* L.



En effet, la ligne L et sa projection cylindrique, l, sur le plan P sont les sections faites par deux plans parallèles dans le cylindre projetant : elles sont donc égales.

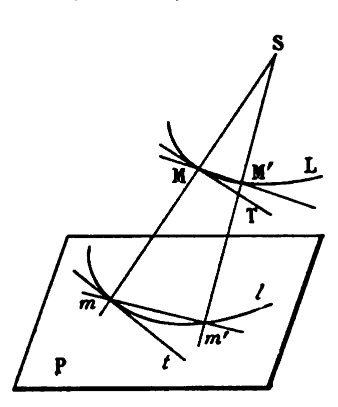
17. Théorème. — *Soient* L *une ligne quelconque de l'espace*, l *sa projection sur un plan* P, *dans un système de projections quelconques. Si* m *est un point quelconque de*

la ligne l, M *le point de* L *dont il est la projection, la tangente à la ligne* l, *au point* m, *est la projection, sur le plan* P, *de la tangente à la ligne* L, *au point* M, *qui se projette en* m.

On énonce encore ce théorème plus brièvement de la manière suivante :

La tangente en un point de la projection d'une ligne est la projection de la tangente au point correspondant de cette ligne.

Soit, en effet, S le centre de projection, que nous supposerons à distance finie pour fixer les idées. Sur la ligne L prenons un point M′, voisin du point M, et soit m' la projection de ce point M′ sur le plan P. La sécante mm' est alors la projection de la sécante MM′, et cela quelque rapproché que soit M′ de M. Or, si M′ se rapproche indéfiniment de M et vient se confondre avec lui : 1° m' se rapproche indéfiniment de m, et vient se confondre avec lui *quand* M′ vient se confondre avec M; 2° MM′ et mm' ont *simultanément* pour limites respectives les tangentes MT et mt en M et m aux lignes L et l. Et, comme mm' ne cesse pas d'être la projection de MM′, que d'autre part mm' est confondu avec mt quand MM′ est confondu avec MT, il en résulte bien que mt est la projection de MT.



On voit que le point S n'intervient en rien dans la démonstration, qui s'applique, par conséquent, quelle que soit la nature du système de projections.

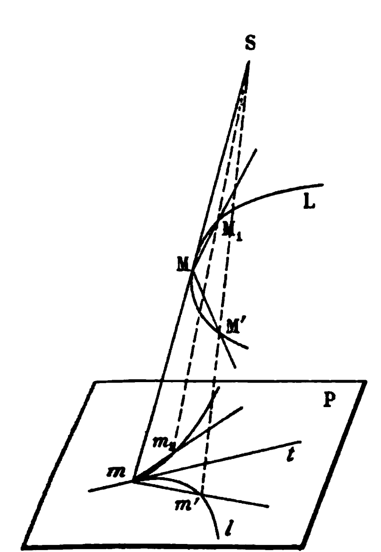
La démonstration n'est en défaut que si la tangente MT passe par le point S, car alors sa projection se réduit à un point, et on ne peut plus dire que mt soit la projection de MT.

Voici comment on obtient, dans ce cas, la tangente à la ligne l, au point m.

18. **Théorème.** — *Lorsque la tangente au point* M *de la ligne* L *passe par le centre de projection, à distance finie ou infinie, le point* m *est un point de rebroussement de la ligne* l, *et la tangente à* l, *en* m, *est la trace, sur le plan* P, *du plan osculateur en* M, *à* L.

On dit qu'un point A d'une courbe C est un point de rebroussement de cette courbe, quand, dans le voisinage de ce point, la courbe présente la disposition indiquée par la figure ci-contre : deux branches de courbe qui se croisent au point A, s'y arrêtent, et y admettent la même tangente AB.

Soit *mt* la trace, sur le plan P, du plan osculateur en M à la ligne L. On voit (13) que dans le voisinage du point M la courbe est de part et d'autre du plan S*mt*. Si donc nous prenons deux points M′ et M_1 de cette courbe, de part et d'autre du point M, et dans le voisinage de ce point, ils seront de part et d'autre du plan osculateur S*mt*, et se projetteront en *m* et en m_1, de part et d'autre de *mt*.



Cela posé, la projection *mm′* de MM′ est la trace sur le plan P du plan SMM′ qui devient, à la limite, quand M′ coïncide avec M, le plan osculateur en M; donc la position limite de *mm′* sera la trace *mt*, sur le plan P, du plan osculateur en M.

On verrait absolument de même que la position limite de mm_1 coïncide avec *mt*. De tout cela il résulte évidemment que le point *m* est bien un point de rebroussement de la ligne *l*, et que la tangente en ce point coïncide avec la trace *mt* du plan osculateur en M, conformément à l'énoncé.

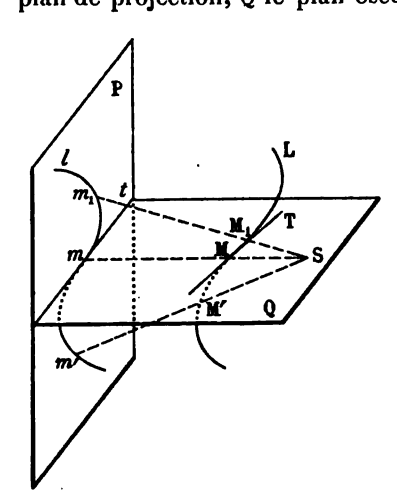
La démonstration suppose que L est une courbe gauche. La remarque suivante indique ce qu'elle devient quand la courbe est plane.

19. Remarque. — La proposition établie au n° 17 est aussi applicable quand la ligne L est une ligne plane dont le plan passe par le centre de projection. Dans ce cas, la projection de la ligne se réduit à une droite, que l'on peut regarder comme la projection commune des tangentes, en tous les points de L.

20. **Théorème.** — *Quand le centre de projection est dans le plan osculateur en* M, *le point* m *est un point d'inflexion de* l, *pourvu que* SM *ne soit pas tangente en* M.

On dit qu'un point A d'une courbe C est un point d'inflexion de cette courbe, quand celle-ci traverse sa tangente en A, comme l'indique la figure ci-contre.

Cette définition étant donnée, soient P le plan de projection, Q le plan osculateur en M et S le centre de projection, à distance finie ou infinie. Appelons MT la tangente en M, projetée comme on l'a vu (17) suivant la tangente *mt* à *l*. Deux points M′ et M_1 pris sur L, dans le voisinage du point M et de part et d'autre de ce point, étant situés de part et d'autre du plan Q, se projetteront en *m′* et en m_1, de part et d'autre de *mt*. Donc, dans le voisinage de *m*, la ligne *l* est de part et d'autre de sa tangente; donc, enfin, *m* est un point d'inflexion.



§ IV. — *Propriétés projectives.*

*21. **Définition.** — Quand on projette une figure F sur un plan, si une propriété concernant certains éléments de cette figure subsiste pour les éléments correspondants de la figure projection, on l'appelle une *propriété projective* de la figure F.

C'est ainsi que la propriété de la tangente est projective. C'est ainsi également que les rapports anharmoniques de quatre points en ligne droite ou d'un faisceau de quatre droites dans un plan sont projectifs.

En général, toutes les propriétés descriptives des figures sont projectives; car, si des droites sont concourantes, il en est de même de leurs projections; si des lignes sont tangentes, il en est de même de leurs projections, etc.

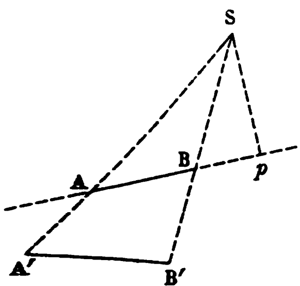
Mais si une propriété concerne la grandeur d'une figure, c'est-à-dire si c'est une propriété métrique, elle n'est généralement pas projective. Il y a toutefois des exceptions, comme le rapport anharmonique par exemple, et nous en donnerons bientôt la raison.

*** 22. Méthode des projections.** — Quand on sait qu'une propriété d'une figure est projective, pour l'établir, il suffit de l'établir pour l'une quelconque de ses projections. La simplicité de la démonstration dépendra naturellement du choix du centre de projection ainsi que du choix du plan de projection.

La *méthode des projections* est une méthode de recherches basée sur l'application du principe précédent. Pour faire usage de cette méthode, il est donc indispensable de pouvoir reconnaître immédiatement si une propriété donnée d'une figure est projective. Le théorème suivant en donne quelquefois le moyen :

*** 23. Théorème.** — *Soient* A, B, C, ... *les divers points d'une figure* F *et* A′, B′, C′, ... *les points correspondants de la figure* F′ *obtenue en projetant la figure* F *d'un point* S *sur un plan* P. *Toute fraction rationnelle* $\frac{\varphi(A, B, C, \ldots)}{\psi(A, B, C, \ldots)}$ *dans laquelle* $\varphi(A, B, C, \ldots)$ *et* $\psi(A, B, C, \ldots)$ *désignent des fonctions des distances mutuelles des points* A, B, C, ..., *linéaires par rapport aux lettres* A, B, C, ..., *est égale à la fraction* $\frac{\varphi(A', B', C', \ldots)}{\psi(A', B', C', \ldots)}$ *si : 1° toute lettre qui figure au numérateur figure aussi au dénominateur ; 2° à tout segment figurant au numérateur et compté sur une droite indéfinie, correspond un segment figurant au dénominateur et compté sur la même droite indéfinie.*

Soit, en effet, AB un segment de la figure F. Menons les projetantes SA, SB et la perpendiculaire Sp à la droite indéfinie qui joint les deux points A et B. En égalant deux expressions différentes de l'aire du triangle ASB, on obtient l'égalité



$$AB.Sp = SA.SB. \sin ASB,$$

de laquelle on tire

$$AB = \frac{SA.SB. \sin ASB}{Sp}.$$

Un calcul analogue donnerait des expressions du même genre pour les distances mutuelles des points A, B, C,...

Si alors on remplace dans la fraction $\frac{\varphi(A, B, C, \ldots)}{\psi(A, B, C, \ldots)}$ les distances mutuelles par les valeurs ainsi trouvées, en vertu des conditions de l'énoncé, les distances SA, SB, ... figurant au numérateur et au dénominateur disparaissent (1°), et il en est de même des quantités analogues à Sp (2°). De cette manière la fraction ne dépend plus que des angles mutuels des rayons SA, SB, ..., et ces angles sont les mêmes pour la figure F et pour la figure F'; de sorte que si l'on transforme de la même manière la fraction $\frac{\varphi(A', B', C', \ldots)}{\psi(A', B', C', \ldots)}$, on trouve le même résultat qu'en transformant la fraction $\frac{\varphi(A, B, C, \ldots)}{\psi(A, B, C, \ldots)}$; ce qui démontre la proposition.

En particulier, si A', B', C', D' sont les projections respectives de quatre points en ligne droite A, B, C, D, on a

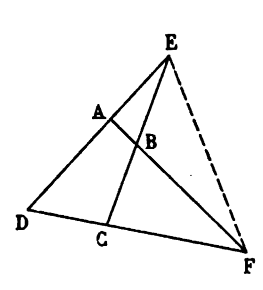
$$\frac{AC \times DB}{CB \times AD} = \frac{A'C' \times D'B'}{C'B' \times A'D'}.$$

Cette égalité exprime que le rapport anharmonique de quatre points en ligne droite est projectif.

Nous allons donner maintenant quelques applications.

***24. Application I.** — *Projeter un quadrilatère complet* ABCDEF *suivant un parallélogramme.*

Les côtés opposés d'un parallélogramme étant parallèles, cela revient à dire qu'ils se coupent sur la droite de l'infini du plan du parallélogramme. Si donc on veut projeter le quadrilatère donné suivant un parallélogramme et de manière que AB et CD soient deux côtés opposés de ce parallélogramme, il faudra que les projetantes des points E et F soient parallèles au plan de projection. Il suffira donc de prendre comme plan de projection un plan quelconque parallèle à celui qui est déterminé par EF et par le centre de projection.



***25. Corollaire.** — *Chacune des diagonales d'un quadrilatère complet est divisée harmoniquement par les deux autres.*

La propriété harmonique étant projective, il suffit de démontrer la

proposition énoncée pour une projection du quadrilatère. Or, la proposition est évidente pour le parallélogramme ; donc elle est vraie pour le quadrilatère complet.

*** 26. Application II.** — *Projeter une conique* C *de manière qu'une droite* D *du plan de cette conique soit à l'infini et de manière aussi que la projection d'un point* F *du même plan soit un foyer de la nouvelle conique.*

Pour traiter cette question nous commencerons par rappeler :

1° Qu'un foyer d'une conique peut être défini comme un point tel qu'on puisse mener par ce point une infinité de couples de droites rectangulaires, conjuguées par rapport à la conique ;

2° Que la propriété de deux droites d'être conjuguées par rapport à une conique est projective ;

3° Que, si l'on a une involution à points doubles imaginaires sur une droite, il existe un cercle ayant son centre sur la droite, ayant son plan perpendiculaire à cette droite, et de chacun des points duquel on voit sous un angle droit le segment déterminé sur la droite par un couple quelconque de points correspondants de l'involution.

Cela posé, appelons c, d, f les projections respectives de C, D, F, et, dans le plan de la conique C, considérons tous les couples de droites conjuguées menées par F ; ils se projettent suivant des couples de droites conjuguées par rapport à c, menées par f, c'est-à-dire que leurs projections forment un faisceau involutif de sommet f. Or, les rayons doubles de ce faisceau sont les tangentes à c menées par f, et, comme f doit être un foyer, ces rayons doubles sont imaginaires. Donc, le faisceau involutif correspondant, situé dans le plan de la conique C, doit aussi avoir ses rayons doubles imaginaires, ce qui exige que F soit intérieur à C. Mais si les rayons doubles sont imaginaires, toute sécante, D par exemple, coupe le faisceau suivant deux divisions en involution à points doubles imaginaires. Il existe donc une circonférence Γ de chaque point de laquelle on voit sous un angle droit le segment formé par un couple quelconque de points conjugués de l'involution. Mais alors si l'on projette d'un point quelconque S de cette circonférence, sur un plan parallèle au plan déterminé par S et par D, deux droites conjuguées quelconques FA, FB, rencontrant D en A et en B, se projettent suivant deux droites conjuguées menées par f et parallèles à SA et à SB, c'est-à-dire suivant deux droites

conjuguées rectangulaires, et le point f ainsi obtenu est bien foyer de la conique C.

Ne voulant pas refaire ici une étude complète des propriétés projectives, nous ne donnerons pas d'autres applications.

* EXERCICES SUR LA MÉTHODE DES PROJECTIONS

1. Projeter un quadrilatère complet suivant un rectangle.

2. Montrer que si deux triangles ont leurs sommets deux à deux sur trois droites concourantes, les points de rencontre des côtés correspondants sont en ligne droite.

3. Prouver que si deux triangles sont tels que leurs côtés se coupent deux à deux en trois points en ligne droite, les sommets correspondants sont sur trois droites concourantes.

4. Projeter un cercle suivant une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

5. Projeter une conique suivant un cercle.

6. Projeter une conique Γ de manière que deux points F et C du plan de cette conique deviennent respectivement, l'un le foyer, l'autre le centre.

7. Projeter une conique Γ de manière que deux points F et F' de son plan deviennent les foyers.

8. Projeter deux coniques données suivant deux coniques homofocales.

9. Projeter deux coniques données suivant deux cercles.

10. Deux coniques doublement tangentes étant données, les projeter suivant deux cercles concentriques.

11. Démontrer le théorème de Pascal.

12 Théorème de Brianchon.

13. Étant donné un triangle ABC et un plan P, projeter cylindriquement le triangle sur le plan, de manière que la projection soit un triangle équilatéral.

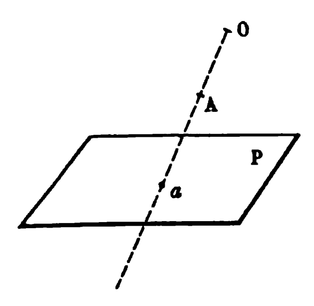
CHAPITRE PREMIER

REPRÉSENTATION DES CORPS

---

27. Définition. — *Représenter* un corps en Géométrie descriptive, c'est exécuter un dessin au moyen duquel on puisse déterminer la forme et les dimensions du corps, ainsi que sa position dans l'espace.

28. Insuffisance du dessin ordinaire. — Dans le dessin ordinaire, on se fait une idée de la forme d'un corps au moyen de sa perspective sur un plan P, et par rapport à un point de vue O. Mais cela ne suffit pas pour représenter le corps ; car si l'on veut, par exemple, fixer la position d'un point A, connaissant seulement sa perspective a, on reconnaît que cela est impossible, ou plutôt, que le problème est indéterminé en ce sens qu'il y a une infinité de points ayant pour perspective le point a : tous les points situés sur la droite Oa répondent en effet à la question.



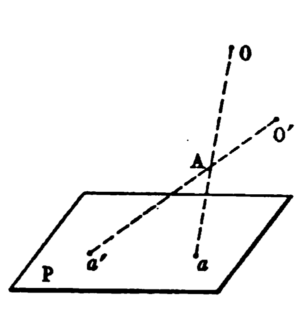
D'autre part, la grandeur et la forme d'un objet dont on n'a que la perspective sur un plan, sont évidemment fixées en même temps que la position de cet objet ; et comme celle-ci est indéterminée, puisque la position de chaque point est indéterminée, on voit que plusieurs objets de formes et de grandeurs différentes peuvent avoir la même

perspective. Le dessin ordinaire ne suffit donc pas pour la représentation exacte des corps.

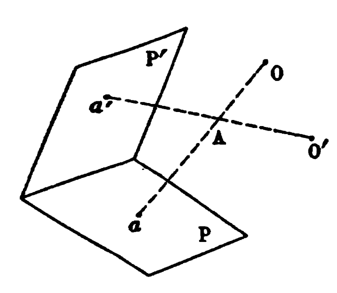
29. Utilité d'une méthode géométrique. — Or, dans l'industrie et en Architecture, il est indispensable d'avoir un mode de représentation permettant de déterminer tous les éléments d'un corps et de résoudre tous les problèmes qui peuvent s'y rattacher. D'un autre côté, nous pouvons bien concevoir des constructions effectuées sur un corps, mais il nous est impossible de les exécuter ; nous ne pouvons guère exécuter que des constructions sur un plan. De là l'utilité d'une méthode géométrique qui, par des constructions exécutées sur un seul et même plan, fasse connaitre exactement tous les éléments d'une figure.

C'est l'exposé de cette méthode géométrique qui constitue le fond de la Géométrie descriptive, dont nous allons maintenant aborder l'étude.

30. Représentation des corps. — Un corps étant un ensemble de points, nous saurons représenter un corps si nous savons représenter un point. Soit donc A un point quelconque. Nous avons vu que la position de ce point n'est pas complètement déterminée si l'on connait seulement sa perspective *a* sur un plan P, par rapport à un point de vue O (fig. précédente). Mais supposons que l'on donne, en même temps que *a*, la longueur *a*A et le sens dans lequel cette longueur doit être portée : alors la position du point sera bien déterminée, et si l'on convient d'inscrire à côté de la perspective *a* de chaque point A, un nombre précédé d'un signe indiquant, l'un la mesure de la longueur *a*A à l'échelle du dessin, l'autre le sens dans lequel cette longueur doit être portée, on aura un mode de représentation des corps. L'étude de ce mode de représentation, quand le point O est à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan P, constitue la *Géométrie cotée*, ainsi désignée parce qu'alors *a*A s'appelle la *cote* du point A. Nous reviendrons plus loin sur ce mode de représentation des corps.

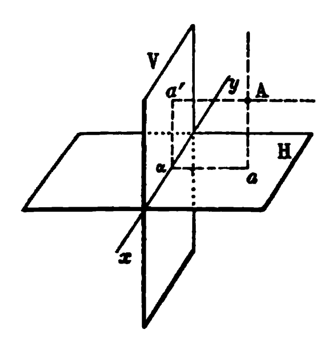


Actuellement, au lieu de cela, nous remarquerons que la position d'un point est déterminée quand on connaît ses projections dans deux systèmes de projections différents. Par exemple, la position du point A est déterminée si l'on connaît ses projections a et a' sur le même plan P, par rapport à deux points de vue différents O et O' ; car alors le point A est l'intersection des deux lignes Oa et O'a'.



La position d'un point est également déterminée quand on connaît ses projections sur deux plans différents P et P', par rapport à deux points de vue différents O et O', et en particulier, quand on connaît ses projections orthogonales sur deux plans rectangulaires.

Soient H et V ces deux plans et A un point quelconque de l'espace projeté orthogonalement en a sur le plan H et en a' sur le plan V. Il est clair que si l'on connaît les deux points a et a', le point A est déterminé par l'intersection des perpendiculaires menées respectivement par a et a' aux plans H et V. Toutefois, comme ces deux perpendiculaires doivent se couper, les points a et a' ne peuvent être choisis arbitrairement si l'on veut qu'ils soient les projections d'un même point de l'espace et que, par suite, ils déterminent ce point.



Pour voir comment il faut les choisir, on remarque que les deux projetantes doivent être dans le même plan, perpendiculaire à l'intersection xy des deux plans H et V. Soit α l'intersection de xy avec ce plan. Celui-ci coupe alors H suivant $a\alpha$, V suivant $a'\alpha$, et ces deux droites $a\alpha$, $a'\alpha$ *sont perpendiculaires à* xy *au même point*.

Réciproquement, si les perpendiculaires menées à xy par a et par a' coupent xy au même point α, le plan $a\alpha a'$ est perpendiculaire à xy en ce point, perpendiculaire par suite à H et à V ; il en résulte que la normale à H menée par a, et la normale à V menée par a' sont situées dans le plan $a\alpha a'$ et ne sont pas parallèles ; donc elles se coupent en un point A, qui a pour projections respectives a et a' ; en

sorte que si les points *a* et *a'* sont ainsi choisis, ils sont bien les projections du même point de l'espace, qu'ils déterminent par suite.

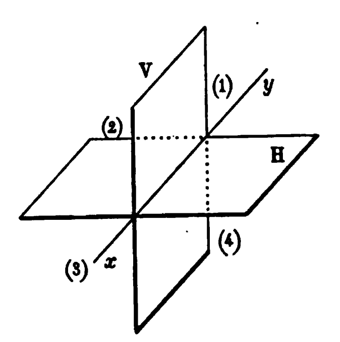
Le mode de représentation, adopté depuis Monge, en Géométrie descriptive, est le mode de représentation par la méthode des projections orthogonales : nous représenterons donc un corps par ses projections orthogonales sur deux plans rectangulaires, H et V.

31. **Plan horizontal et plan vertical.** — Ces deux plans s'appellent *les deux plans de projection :* le premier est appelé *plan horizontal*, sans qu'il soit nécessairement horizontal, mais parce que généralement on le suppose confondu avec le sol ; le second est appelé *plan vertical.*

Pour cette raison, la projection *a* d'un point A sur le plan H s'appelle la *projection horizontale* de ce point, tandis que la projection *a'* sur le plan V s'appelle la *projection verticale* du même point. La *projection horizontale* et la *projection verticale* d'un corps se définissent de même.

Ceci indique en même temps le genre des notations employées en Géométrie descriptive : une grande lettre pour désigner un objet dans l'espace ; la même lettre minuscule pour désigner la projection horizontale de cet objet ; et la même lettre minuscule et accentuée pour en désigner la projection verticale.

32. **Ligne de terre et régions.** — Les deux plans de projection se coupent suivant une droite appelée la *ligne de terre*, et que nous désignerons toujours par xy. Ils partagent l'espace en quatre dièdres qu'on appelle les dièdres (1), (2), (3), (4), en tournant toujours dans le même sens, de droite à gauche, par rapport à un observateur couché sur xy, les pieds en y et la tête en x.



Chacun des deux plans de projection est partagé en deux parties par la ligne de terre ; nous appellerons : région *antérieure* du plan horizontal celle qui est située dans les dièdres (1) et (4) ; région *postérieure* du plan horizontal celle qui est

située dans les dièdres (2) et (3) ; région *supérieure* du plan vertical celle qui est située dans les dièdres (1) et (2) ; enfin région *inférieure* du plan vertical celle qui est située dans les dièdres (3) et (4).

On s'assure bien aisément :

1° Que tout point situé dans l'un des dièdres (1) ou (4) a sa projection horizontale sur la région antérieure du plan horizontal, tandis que tout point situé dans l'un des dièdres (2) ou (3) a sa projection horizontale sur la partie postérieure du plan horizontal ;

2° Que tout point situé dans l'un des dièdres (1) ou (2) a sa projection verticale sur la partie supérieure du plan vertical, tandis que tout point situé dans l'un des dièdres (3) ou (4) a sa projection verticale sur la partie inférieure du plan vertical.

Les réciproques sont évidemment vraies, et ceci permet alors de trouver immédiatement la région de l'espace dans laquelle se trouve un point dont on donne les projections.

Quand un point est dans l'un des dièdres (1) ou (4), on dit qu'il est *en avant* du plan vertical ; de même quand un point est dans l'un des dièdres (1) ou (2), on dit qu'il est *au-dessus* du plan horizontal. Les définitions contraires sont intuitives.

33. Cote et éloignement ; plans bissecteurs. — La *cote* d'un point A est sa distance Aa au plan horizontal ; l'*éloignement* est sa distance Aa' au plan vertical.

On appelle *premier bissecteur*, *deuxième bissecteur*, *troisième bissecteur* et *quatrième bissecteur* les plans bissecteurs respectifs deux à deux des dièdres (1), (2), (3) et (4). Ces plans bissecteurs, qui sont confondus par leurs prolongements, partagent l'espace en huit régions, que nous appellerons respectivement les dièdres (1_1), (1_2) ; (2_1), (2_2) ; (3_1), (3_2) ; (4_1), (4_2), en tournant de droite à gauche par rapport à un observateur couché sur xy, les pieds en y et la tête en x.

Quand un point est dans le plan horizontal, sa cote est nulle ; de même l'éloignement est nul quand le point est dans le plan vertical. Les réciproques sont vraies.

Quand un point est dans le plan horizontal, il coïncide avec sa projection horizontale, et sa projection verticale est sur la ligne de terre; de même quand un point est dans le plan vertical, il coïncide avec sa projection verticale, et sa projection horizontale est sur la ligne de terre. Les réciproques sont vraies.

Quand un point est sur la ligne de terre, il coïncide avec ses deux projections, et réciproquement.

Convenons de dire que la cote d'un point est *positive* quand le point est au-dessus du plan horizontal, et qu'elle est *négative* dans le cas contraire. Convenons de même de dire que l'éloignement d'un point est *positif* quand le point est en avant du plan vertical, et qu'il est *négatif* dans le cas contraire. Puis remarquons que si un point est dans l'un des plans bissecteurs, la grandeur de la cote est égale à celle de l'éloignement. Enfin, appelons c la cote d'un point et e son éloignement.

Cela posé, on s'assure facilement :

Que si un point est dans le dièdre (1_1), la cote et l'éloignement sont positifs, et l'on a $c < e$;

Que si un point est sur le premier bissecteur, la cote et l'éloignement sont positifs, et l'on a $c = e$;

Que si un point est dans le dièdre (1_2), la cote et l'éloignement sont positifs, et l'on a $c > e$; etc.

34. Remarque. — Nous avons dit plus haut qu'une figure quelconque est représentée par sa projection horizontale et par sa projection verticale. Il y a toutefois exception quand la figure est située dans un plan perpendiculaire à xy. Un plan perpendiculaire à xy s'appelle un *plan de profil.*

Toutes les figures situées dans le même plan de profil sont projetées horizontalement sur l'intersection du plan de profil et du plan horizontal, et verticalement sur l'intersection du plan de profil et du plan vertical. Dès lors les deux projections ne suffisent plus pour représenter l'une quelconque d'entre elles. On se donne alors autant de points qu'il en faut pour déterminer chacune d'elles.

Par exemple, une droite étant déterminée par deux points, pour représenter une droite située dans un plan de profil, il suffira de se donner les projections de deux de ses points.

35. Épure d'un point; épure d'un corps. — Nous venons de voir

comment on peut représenter un corps par ses projections sur deux plans rectangulaires; il reste à montrer comment on peut atteindre le même but à l'aide d'un dessin tracé sur un seul plan.

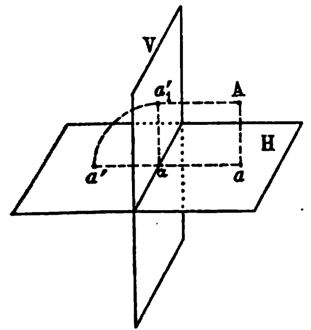
Pour cela, imaginons qu'après avoir construit les projections d'un corps quelconque, on rabatte le plan vertical sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de la ligne de terre jusqu'à ce que la partie supérieure du plan vertical coïncide avec la partie postérieure du plan horizontal; de sorte que la rotation du plan vertical autour de la ligne de terre devra s'effectuer de droite à gauche, par rapport à un observateur couché sur cette ligne, les pieds en y et la tête en x. On obtient ainsi, sur le plan horizontal, un dessin unique composé des deux projections du corps et de la ligne de terre. Ce dessin unique s'appelle l'*épure* du corps. Si le corps se réduit à un point, on a l'*épure* d'un point.

On est donc conduit à représenter un corps au moyen de son épure. Ce mode de représentation équivaut du reste à celui de la représentation du corps par ses projections, car on passe facilement de l'un à l'autre par deux opérations inverses.

Ajoutons que, dans l'épure d'un corps, les deux projections du corps ne sont pas disposées d'une manière quelconque l'une par rapport à l'autre, ainsi que le prouve le théorème suivant :

36. Théorème. — *Dans une épure les projections du même point sont sur la même ligne de rappel, et réciproquement.*

Une *ligne de rappel*, dans une épure, est une droite perpendiculaire à la ligne de terre.



Cette définition étant donnée, pour démontrer la proposition énoncée considérons un point A de l'espace, projeté en a sur le plan H et en a'_1 sur le plan V. Nous avons vu que les perpendiculaires à xy, menées de a et de a'_1, rencontrent xy au même point α; il en résulte que si l'on rabat le plan vertical autour de xy, comme cela a été indiqué au numéro précédent, la ligne $\alpha a'_1$ sera, après le rabattement, perpendiculaire à xy au point α, c'est-à-dire dans le prolongement de $a\alpha$. Si donc a' est la nouvelle position du

point a'_1 après le rabattement, les deux points a et a' sont sur la même ligne de rappel, conformément à l'énoncé.

Réciproquement, si deux points a et a' d'une épure sont sur la même ligne de rappel, on peut les considérer comme représentant le même point de l'espace ; car si l'on relève le plan vertical, a' vient en a'_1 tel que $\alpha a_1 = \alpha a'$ et tel, en outre, que $\alpha a'_1$ soit perpendiculaire à xy. Dès lors les perpendiculaires menées à xy par a et a'_1 rencontrant xy au même point, les deux points a et a'_1 sont les projections du même point de l'espace, c'est-à-dire déterminent ce point, et il en est de même de a et de a'.

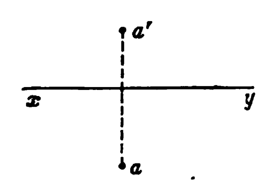
37. **Corollaire.** — *Dans l'épure d'un point, la cote de ce point est mesurée par la distance de sa projection verticale à la ligne de terre ; l'éloignement du même point est mesuré par la distance de sa projection horizontale à la ligne de terre.*

Sur la figure précédente on voit en effet que la cote Aa est égale à $\alpha a'_1$ et à $\alpha a'$; de même l'éloignement a'_1A est égal à αa.

38. **Étude de l'épure d'un point.** — D'après cela, l'épure d'un point A se compose de la ligne de terre xy et de deux points a, a' situés sur la même ligne de rappel, et appelés respectivement *projection horizontale* et *projection verticale* du point A. Quant aux positions relatives de ces deux points et de xy, elles dépendent de la position du point dans l'espace et, pour les obtenir, il faut avoir bien présentes à l'esprit les remarques des nos 32 et 33, ainsi que la manière dont le plan vertical a été rabattu sur le plan horizontal. Outre les remarques des nos 32 et 33, il faut donc se rappeler *que l'on a rabattu le plan vertical sur le plan horizontal de manière à appliquer la partie supérieure du plan vertical sur la partie postérieure du plan horizontal et, par suite, de manière à appliquer la partie inférieure du plan vertical sur la partie antérieure du plan horizontal.*

Ajoutons que, par convention, dans la feuille sur laquelle l'épure est tracée, la partie qui est au-dessous de la ligne de terre correspond à la région antérieure du plan horizontal, tandis que la partie qui est au-dessus correspond à la région postérieure du même plan. Pour bien se rendre compte de cette façon de parler, il faut imaginer que la feuille soit verticale et de manière que la région qui correspond à la partie antérieure du plan horizontal soit au-dessous de l'autre. On a

du reste soin d'écrire la lettre x à gauche et la lettre y à droite de l'observateur qui regarderait la feuille ainsi placée ; de cette façon, la distinction des régions en lesquelles les plans de projection sont partagés par la ligne de terre se fera sans difficulté, au moyen de ce qui précède.



Si l'on rapproche ces conventions des remarques des nos 32 et 33, on voit :

1° *Qu'un point est en avant ou en arrière du plan vertical, suivant que sa projection horizontale, dans l'épure, est au-dessous ou au-dessus de xy ;*

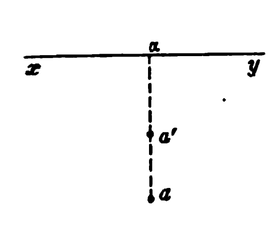
2° *Qu'un point est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, suivant que sa projection verticale, dans l'épure, est au-dessus ou au-dessous de xy.*

Les réciproques sont évidemment vraies.

39. **Lecture d'une épure.** — Ces diverses remarques permettent de reconnaître la position d'un point dans l'espace à la simple inspection de son épure, et, plus généralement, la forme et la position d'un corps par l'étude de son épure. Cette opération s'appelle la *lecture* de l'épure.

Voici, sur un exemple, la manière de procéder pour *lire* l'épure d'un point :

Soit l'épure ci-contre. C'est l'épure d'un point situé dans la région (4_2). En effet, le point a est au-dessous de xy, donc le point est en avant du plan vertical ; de même le point a' est au-dessous de xy, donc le point est au-dessous du plan horizontal. Il en résulte que le point est dans le dièdre (4) ; mais la cote $\alpha a'$ étant plus petite que l'éloignement αa, le point est plus rapproché du plan horizontal que du plan vertical, donc il est dans la région (4_2).

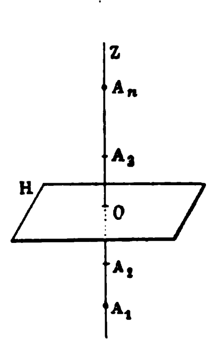


On ne saurait trop recommander aux commençants de s'exercer à la lecture de l'épure d'un point, en se donnant eux-mêmes, et au hasard, les projections de ce point.

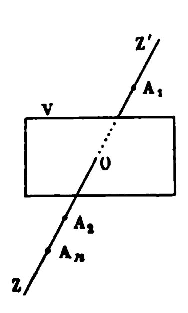
40. **Distinction des parties vues et des parties cachées.** — Pour faciliter la lecture de l'épure d'un corps, on fait ce qu'on appelle

la distinction des parties vues et des parties cachées. On fait cette distinction en projection horizontale et en projection verticale.

1° Pour faire la distinction des parties vues et des parties cachées en projection horizontale, on suppose l'observateur à l'infini au-dessus du plan horizontal. Cet observateur voit *tout point isolé* placé au-dessus du plan horizontal, que ce point appartienne au dièdre (1) ou au dièdre (2). Tout rayon visuel issu de l'œil de cet observateur est d'ailleurs confondu avec une verticale, et il en résulte que si une verticale rencontre la surface opaque d'un corps en plusieurs points échelonnés, A_1, A_2, ..., A_n, le seul de ces points qui soit vu par l'observateur est le plus élevé, si toutefois il est au-dessus du plan horizontal : tous les autres sont cachés. Ainsi, dans la figure ci-contre, si l'observateur est à l'infini sur la direction OZ, le seul point qui soit vu est le point A_n.



2° Pour faire la distinction des parties vues et des parties cachées en projection verticale, on suppose l'observateur à l'infini en avant du plan vertical. Cet observateur voit *tout point isolé* placé en avant du plan vertical, que ce point appartienne au dièdre (1) ou qu'il appartienne au dièdre (4). Tout rayon visuel mené par l'œil de cet observateur est du reste confondu avec une ligne de bout, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical, et il en résulte que si une ligne de bout rencontre la surface opaque d'un corps en plusieurs points échelonnés, le seul de ces points qui soit vu est celui qui a le plus grand éloignement, pourvu toutefois qu'il soit en avant du plan vertical. D'après cela, soient V le plan vertical et ZZ une ligne de bout rencontrant la surface opaque d'un corps aux points A_1, A_2, ..., A_n. Si OZ est la partie de la ligne de bout qui est en avant du plan vertical, le seul point vu est le point A_n.



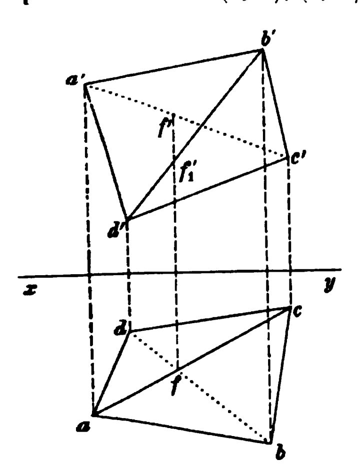
41. Ponctuation. — Pour faciliter également la lecture d'une épure, *on a convenu* d'appliquer certaines règles pour le tracé des lignes de l'épure. On trace à l'encre noire et en traits pleins (————) d'une épaisseur de 1/4 de millimètre, à peu près, les lignes vues

qui représentent les données ou les résultats. Les lignes cachées se représentent en points ronds (.............) ; enfin les lignes de construction se tracent soit en traits continus et très fins à l'encre rouge, soit à l'encre noire en petits tirets de 1/6 de millimètre d'épaisseur (-----------) ; les lignes de rappel sont considérées comme des lignes de construction. La ligne de terre se trace à l'encre noire, et en trait plein, excepté quand c'est une ligne de terre auxiliaire, comme on le verra plus loin. (*Voir le chapitre des changements de plans de projection.*) Dans ce cas le trait employé est celui des figures de construction.

Quand une ligne de construction est plus importante que les autres, on se sert pour la représenter d'un trait noir, mixte et un peu fort (—-—-—-—) ; c'est ainsi que l'on procède pour les tangentes et pour les figures rabattues (voir le chapitre des rabattements). On peut aussi employer le trait plein, fort et à l'encre bleue. Les lignes d'axes se font en traits forts et double-mixtes (-··-··-··-), à l'encre noire ou à l'encre bleue.

L'application de ces règles constitue ce qu'on appelle la *ponctuation de l'épure* (*).

42. Exemple. — Comme application de ce qui précède, proposons-nous de faire la ponctuation de l'épure d'un tétraèdre défini par ses quatre sommets (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). On obtient facilement les projections horizontales et les projections verticales des arêtes du tétraèdre. Pour la ponctuation, on trace à l'encre noire et en traits pleins toutes les arêtes qui limitent soit la projection horizontale soit la projection verticale et qui déterminent ce qu'on appelle les *contours apparents* du corps. Tout point situé sur le contour apparent horizontal est vu par l'observateur placé au-dessus du plan horizontal, et tout point situé sur le contour apparent vertical est vu par l'observateur placé en avant du plan vertical. Il reste donc tout



(*) Voir *Instructions et Conseils sur l'Exécution des épures et sur le lavis*, librairie Nony.

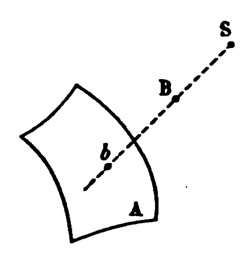
simplement à établir la ponctuation des deux arêtes $(ac, a'c')$ et $(bd, b'd')$, en projection horizontale et en projection verticale. Occupons-nous d'abord de la projection horizontale et voyons si le point f qui se trouve à la fois sur ac et sur bd est vu. Considéré comme appartenant à ac, le point f est la projection horizontale du point (f, f') ; considéré comme appartenant à bd, il est la projection horizontale du point (f, f'_1). De ces deux points, situés sur la même verticale, celui qui a la plus grande cote c'est le point (f, f') ; il en résulte que ac doit être tracée en traits pleins et bd en points ronds.

Si maintenant nous passons à la projection verticale, nous verrons par un raisonnement analogue au précédent que $b'd'$ doit être tracée en traits pleins et $a'c'$ en points ronds.

On peut remarquer que l'arête $(ac, a'c')$ qui est vue en projection horizontale peut, comme dans le cas actuel, n'être pas vue en projection verticale : cela tient à ce que l'observateur qui regarde la projection horizontale n'est pas le même que celui qui regarde la projection verticale.

43. Définition et tracé des Ombres. — Pour faciliter la lecture de l'épure d'un corps, on suppose quelquefois le corps éclairé par un point lumineux à distance finie ou infinie.

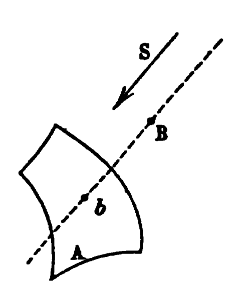
Soit d'abord un point lumineux, S, à distance finie. Considérons un corps limité par une surface A, et soit B un point opaque, *situé entre* A et S. Supposons que le point B soit le seul obstacle qui s'oppose à la propagation de la lumière entre le point S et la surface A. On appelle alors *ombre portée* par le point B sur la surface A le point de rencontre b du rayon SB avec la surface A. Lorsque le rayon SB rencontre la surface A en plusieurs points, c'est le point le plus rapproché de B qui est l'ombre portée par B.



On appelle *ombre portée* par un corps opaque B sur un corps A, l'ensemble des ombres portées par les points de B sur la surface du corps A. Lorsque B est un corps continu, les ombres portées par ses divers points sur A sont à l'intérieur d'une ligne tracée sur la surface de A et qu'on appelle le *contour de l'ombre portée*.

Soit maintenant un point lumineux à l'infini dans une direction

donnée S. Figurons par une flèche le sens de propagation de la lumière, et soient encore A la surface d'un corps et B un point opaque situé *entre* la source lumineuse et la surface A. Cela veut dire, ici, que si un point se déplace, en partant de l'infini, sur la parallèle à S menée par B, et dans le sens de propagation de la lumière, il rencontre B *avant* de rencontrer A. On appelle alors *ombre portée* par B sur A, le point de rencontre de A avec la parallèle à S menée par B. S'il y a plusieurs points de rencontre, l'ombre portée est celui de tous ces points qui est le plus rapproché de B.



L'ombre portée par un corps sur un autre, ainsi que le contour de l'ombre propre, se définissent comme dans le premier cas. Les ombres, quand la source lumineuse est à distance finie, s'appellent des *ombres au flambeau;* elles s'appellent des *ombres au soleil* quand la source lumineuse est à l'infini.

Quand un corps opaque est éclairé par une source lumineuse, placée à distance finie ou à l'infini, on appelle *contour de l'ombre propre* sur ce corps, une ligne tracée sur sa surface et qui sépare les régions éclairées de celles qui ne le sont pas. Par exemple, si le corps est une sphère éclairée par un point lumineux S, le contour de l'ombre propre n'est autre chose que la courbe de contact du cône de sommet S circonscrit à la sphère.

Si le point lumineux est à l'infini dans la direction Δ, le contour de l'ombre propre coïncide avec la courbe de contact de la sphère et du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à Δ.

Les règles adoptées pour le tracé des ombres sont les suivantes :

Sur chacun des corps on trace le contour de l'ombre propre, en observant les règles de la ponctuation exposées plus haut (41). Pour éviter toute confusion, on trace les ombres en bleu, dans les épures faites à la main et on couvre de hachures parallèles, à l'encre bleue, les parties ombrées qui sont vues.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE PREMIER

1. Epure d'un point d'éloignement positif situé sur le plan horizontal.

2. Epure d'un point situé dans la région (1_1).

3. Id. sur le plan B_1 (figure du n° 33).

4. Id. dans la région (1_2).

5. Epure d'un point de cote positive situé dans le plan vertical.

6. Epure d'un point situé dans la région (2_1).

7. Id. sur le plan B_2.

8. Id. dans la région (2_2).

9. Epure d'un point d'éloignement négatif situé dans le plan horizontal.

10. Epure d'un point situé dans la région (3_1).

11. Id. sur le plan B_3.

12. Id. dans la région (3_2).

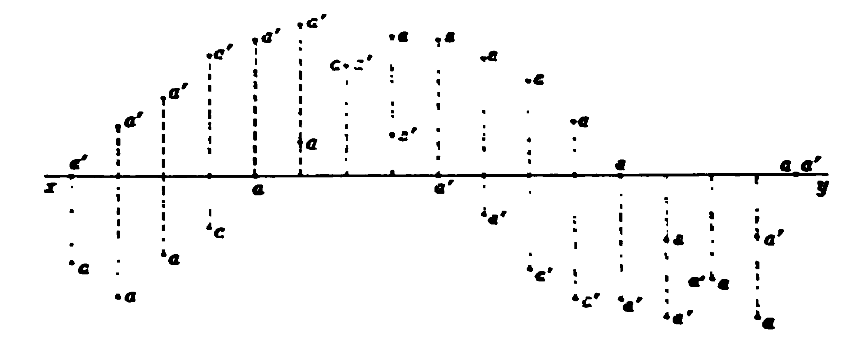
13. Epure d'un point de cote négative situé dans le plan vertical.

14. Epure d'un point situé dans la région (4_1).

15. Id. sur le plan B_4.

16. Id. dans la région (4_2).

17. Lire les épures ci-dessous d'un point :



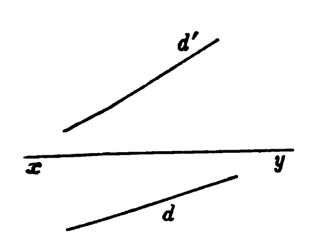
CHAPITRE II

LA LIGNE DROITE

§ I. — *Représentation de la ligne droite.*

44. Définition. — On appelle *plans projetants* d'une droite, les plans menés par cette droite perpendiculairement aux deux plans de projection. On dit aussi le *plan projetant horizontalement* et le *plan projetant verticalement* la droite.

45. Représentation de la droite. — Comme toute figure de l'espace, une droite est représentée par ses projections, ce qui revient à considérer la droite comme l'intersection de ses deux plans projetants. Il y a toutefois exception lorsque la droite est située dans un plan de profil, parce que alors ses deux plans projetants coïncident. L'épure d'une droite D se composera donc, en général, de la ligne de terre xy et de deux droites d et d' représentant, l'une la projection horizontale, l'autre la projection verticale de la droite D. Pour abréger le langage et l'écriture, on dit la droite (d, d') ou la droite D.

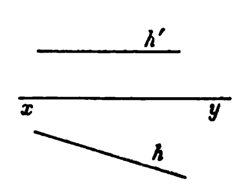


Quant aux positions relatives des trois droites xy, d, d', elles dépendent des positions que peut occuper la droite D par rapport aux deux plans de projection.

Nous allons les passer rapidement en revue, mais en rappelant

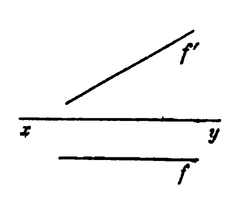
d'abord que *les projections d'une droite sont les lieux géométriques des projections de même nom des divers points de la droite* ; ce qui signifie que la projection horizontale d'un point d'une droite D est sur la projection horizontale d de cette droite, et que la projection verticale du même point est sur la projection verticale d' de la même droite.

46. **Droites horizontales.** — Une droite *horizontale* est une droite parallèle au plan horizontal. En vertu de cette définition, tous les points d'une horizontale ont la même cote et, par suite, le lieu de leurs projections verticales est une parallèle à xy située à une distance de cette droite égale à la cote commune à tous les points de la droite. L'épure d'une horizontale H se compose donc de la ligne de terre, d'une droite quelconque h projection horizontale de H et d'une droite h' parallèle à xy et projection verticale de H.



Si la droite H est dans le plan horizontal, elle coïncide avec h, et sa projection verticale h' coïncide avec xy.

47. **Droites de front.** — Une droite de *front* est une droite parallèle au plan vertical. Tous les points d'une droite de front ont le même éloignement et, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour les droites horizontales, on voit que l'épure d'une droite de front se compose de xy, d'une droite f parallèle à xy et d'une autre droite f' ; f coïncide avec xy si la droite est dans le plan vertical.



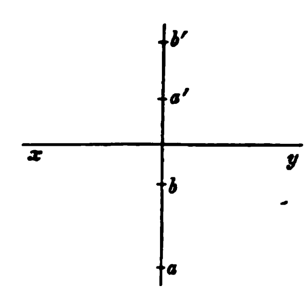
48. **Droites parallèles à la ligne de terre.** — Lorsqu'une droite est parallèle à la ligne de terre, elle est à la fois horizontale et de front ; donc ses deux projections sont parallèles à la ligne de terre, et l'épure d'une telle droite se compose de xy et de deux droites d et d' parallèles à xy.

49. **Droites verticales; droites de bout.** — Une droite *verticale*

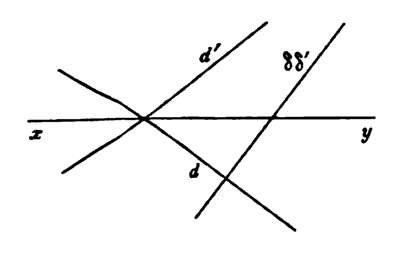
est une droite perpendiculaire au plan horizontal. Sa projection horizontale est un point *d* et sa projection verticale la perpendiculaire *d'* à *xy* menée par ce point.

Une droite *de bout* est une droite perpendiculaire au plan vertical ; sa projection verticale est un point δ' et sa projection horizontale la perpendiculaire δ menée de ce point à la ligne de terre.

50. Droites situées dans un plan de profil. — Lorsqu'une droite est située dans un plan de profil, ses projections, sur l'épure, sont situées sur la même perpendiculaire à la ligne de terre ; cette perpendiculaire est du reste le lieu des projections horizontales ou verticales de toutes les figures situées dans le même plan de profil ; dès lors elle ne définit aucune de ces figures. Ainsi, quand une droite est dans un plan de profil, elle n'est pas représentée par ses projections. Pour la représenter on se donne alors les projections de deux de ses points ; de cette façon la droite est définie sans ambiguïté, car une droite quelconque est complètement déterminée par deux de ses points ; c'est ainsi que les points (*a*, *a'*) et (*b*, *b'*) définissent la droite de profil (*ab*, *a'b'*).



51. Droites situées dans les plans bissecteurs. — Tout point situé dans le premier ou dans le troisième plan bissecteur a, dans l'épure, ses projections symétriques par rapport à la ligne de terre ; tout point situé dans le deuxième ou dans le quatrième plan bissecteur a ses deux projections confondues dans l'épure. Il en résulte : 1° que dans l'épure d'une droite située dans le premier ou dans le troisième plan bissecteur, les deux projections de la droite sont symétriques par rapport à *xy* ; 2° que dans l'épure d'une droite située dans le deuxième ou dans le quatrième plan bissecteur, les deux

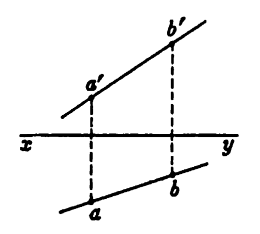


projections de la droite sont confondues. Dans la figure ci-contre (d, d') est une droite située dans le premier plan bissecteur, et (δ, δ') est une droite située dans le deuxième plan bissecteur.

52. Remarque. — Pour avoir terminé tout ce qui a trait à la représentation de la ligne droite, il nous resterait à indiquer comment on peut représenter une droite perpendiculaire à l'un quelconque des plans bissecteurs. Il serait aisé de traiter directement ce problème ; mais il y a avantage à le considérer comme une application de la condition de parallélisme de deux droites. Nous le traiterons donc dans le paragraphe relatif aux droites paralèles.

§ II. — *Problèmes sur la ligne droite.*

53. **Problème I.** — *Construire les projections d'une droite connaissant les projections de deux de ses points.*



Soient (a, a') et (b, b') les deux points donnés. La projection horizontale de la droite étant le lieu des projections horizontales de ses divers points, doit passer par les points a et b : c'est donc la droite ab.

On voit par un raisonnement tout pareil que la projection verticale est la droite $a'b'$.

54. Remarque. — Si la droite ab est perpendiculaire à xy, comme a' et b' sont sur les lignes de rappel menées respectivement par a et par b, la droite $a'b'$ est aussi perpendiculaire à xy au même point que ab. Il suit de là que, *si une des projections d'une droite est perpendiculaire à la ligne de terre, l'autre projection est aussi perpendiculaire à la ligne de terre et au même point que la première.*

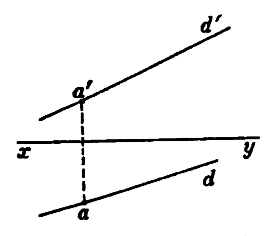
La droite est alors située dans un plan de profil.

55. **Problème II.** — *Connaissant les projections d'une droite, construire les projections d'un point quelconque de cette droite.*

Le problème ainsi posé est indéterminé. Pour le déterminer, on peut se donner : soit l'une des projections du point inconnu, soit la cote positive ou négative de ce point, soit enfin son éloignement positif ou négatif.

Le problème proposé se subdivise donc en trois autres :

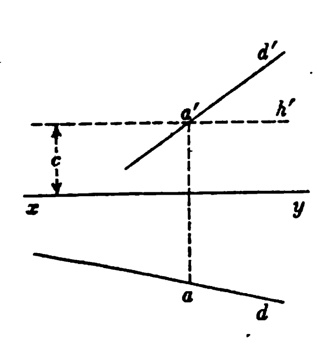
1° Supposons que l'on connaisse l'une des projections du point. Pour avoir l'autre projection, on remarque qu'elle doit se trouver sur la ligne de rappel menée par la projection connue, et sur la projection de la droite de même nom que la projection inconnue du point : celle-ci est donc déterminée par l'intersection de ces deux lignes.



Soit, par exemple, (d, d') la droite. Si l'on connaît la projection horizontale a du point A de la droite D, la projection verticale de ce point sera à l'intersection de d' et de la ligne de rappel menée par a.

Inversement, si l'on connaît la projection verticale a', la projection horizontale sera à l'intersection de d et de la ligne de rappel menée par a'.

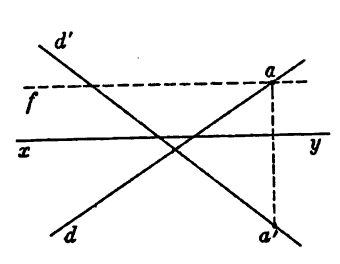
2° Supposons maintenant que l'on connaisse la cote, positive ou négative, du point. Nous déterminerons alors sa projection verticale, et le problème sera ramené au premier cas. Pour déterminer la projection verticale, nous remarquerons qu'elle se trouve sur la projection verticale de la droite et sur le lieu des projections verticales des points de cote donnée. Mais ce lieu est une parallèle à xy, menée au-dessus ou au-dessous de cette ligne suivant que la cote est positive ou négative et à une distance de xy égale à la grandeur de la cote. Cette parallèle et la projection verticale de la droite déterminent la projection verticale du point.



Soient, par exemple, (d, d') la droite et c la cote supposée positive et portée au-dessus de xy. L'intersection de d' avec la droite h' menée parallèlement à xy, au-dessus de cette ligne, et à la distance c, donne le point a' projection verticale du point cherché. On en déduit la projection horizontale a par une ligne de rappel.

3° Supposons enfin que l'on connaisse l'éloignement, positif ou négatif, du point. En recommençant, presque mot à mot, le raisonnement du second cas, on sera conduit à la construction suivante :

On mène, parallèlement à la ligne de terre, une droite f située à une distance de cette ligne égale à la grandeur de l'éloignement, au-dessous ou au-dessus de xy suivant que l'éloignement est positif ou négatif. Le point de rencontre de cette droite f avec la projection horizontale, d, de la droite fait connaitre la projection horizontale, a, du point. On en déduit la projection verticale a' par une ligne de rappel.



Dans l'épure ci-contre, l'éloignement a été supposé négatif.

56. **Traces d'une droite.** — On appelle *traces* d'une droite les points de rencontre de cette droite avec les plans de projection. La *trace horizontale* est le point de rencontre avec le plan horizontal, et la *trace verticale* le point de rencontre avec le plan vertical.

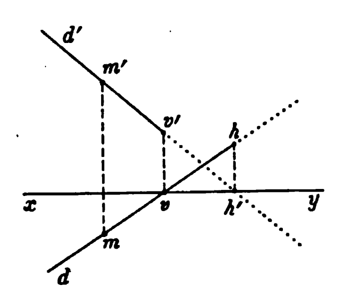
Une horizontale n'a pas de trace horizontale et une frontale n'a pas de trace verticale.

Une parallèle à la ligne de terre n'a ni trace horizontale, ni trace verticale.

57. **Problème III.** — *Connaissant les projections d'une droite, trouver ses traces.*

1° La trace horizontale de la droite est le point de cette droite dont la cote est nulle. Elle est donc projetée verticalement à l'intersection de la ligne de terre et de la projection verticale de la droite ; on en déduit la projection horizontale par une ligne de rappel.

2° Pareillement, la trace verticale est le point de la droite d'éloignement nul. Ce point est donc projeté horizontalement à l'intersection de la ligne de terre et de la projection horizontale de la droite ; on en déduit la projection verticale par une ligne de rappel.



D'après cela, si (d, d') est la droite, on aura la trace horizontale en (h, h'), et la trace verticale en (v, v'). On dit aussi que la trace horizontale est le point h, et que la trace verticale est le point v', parce que la trace horizontale coïncide avec sa projection

horizontale, tandis que la trace verticale coïncide avec sa projection verticale.

Ponctuation. — Proposons-nous, à titre d'exercice, de faire la ponctuation de l'épure de cette droite, en supposant les plans de projection opaques.

En projection horizontale, les parties vues et les parties cachées sont évidemment séparées par la trace horizontale. Si nous considérons alors un point quelconque (m, m') de la droite, nous voyons que ce point est, ici, dans le dièdre (1) et, par conséquent, que sa projection horizontale est vue. Il en résulte que la portion hmd de la projection horizontale est vue, et que l'autre portion, à droite de h, est cachée.

C'est, de même, le point v' qui sépare les parties vues et les parties cachées en projection verticale. Et comme le point m' est vu, la portion $m'v'd'$ tout entière est vue, tandis que l'autre est cachée.

On peut remarquer que la portion de la droite qui est projetée en $(vh, v'h')$ est vue en projection horizontale, mais cachée en projection verticale. Cela tient, ainsi que nous en avons fait la remarque, à ce que l'observateur qui regarde la projection horizontale n'est pas le même que celui qui regarde la projection verticale.

58. Problème IV. — *Construire les projections d'une droite, connaissant ses traces.*

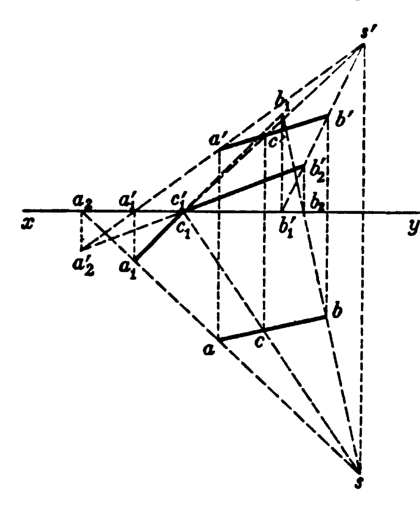
Ce problème est un cas particulier d'un problème déjà résolu (53) ; car, se donner les traces d'une droite, revient à s'en donner deux points.

59. Remarque. — Les solutions des problèmes II et III sont en défaut quand la droite est dans un plan de profil. Dans ce cas ces problèmes seront traités plus loin (voir le § droites parallèles).

60. Application. — *Les plans de projection étant supposés opaques, trouver les ombres portées sur ces plans par un segment de droite opaque, la source lumineuse étant placée en un point* (s, s').

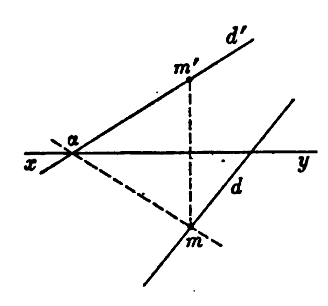
Si le plan vertical n'existait pas, l'ombre portée sur le plan horizontal serait le segment de droite joignant les traces horizontales a_1 et b_1 des deux rayons $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$. Ce segment a_1b_1 est projeté verticalement sur xy et rencontre cette ligne en un point (c_1, c_1'), qui est l'ombre portée par le point (c, c') de la droite sur le plan

horizontal et sur le plan vertical. Il suit de là *et de ce que le point* (s, s') *est dans le dièdre* (1), que les rayons lumineux qui ont leurs traces horizontales sur c_1b_1 sont arrêtés par le plan vertical, et que l'ombre portée sur le plan horizontal se réduit à a_1c_1.



De même si le plan horizontal n'existait pas, l'ombre portée sur le plan vertical serait le segment de droite $a'_2b'_2$ joignant les traces verticales des deux rayons $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$. Ce segment de droite passe aussi par le point (c_1, c'_1), et l'on voit, comme plus haut, que l'ombre portée sur le plan vertical se réduit à $c'_1b'_2$.

61. **Problème V.** — *Points de rencontre d'une droite avec les plans bissecteurs.*

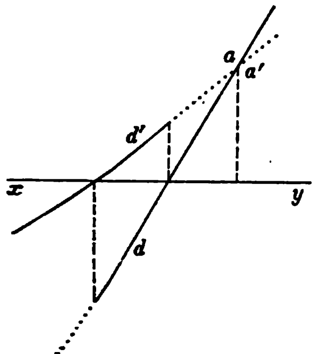


Après avoir déterminé les traces d'une droite sur les plans de projection, il est naturel de déterminer ses traces sur les plans bissecteurs.

1° Soit d'abord à déterminer la trace de la droite (d, d') sur le premier plan bissecteur. Nous remarquerons, pour cela, que les projections d'un point appartenant au premier plan bissecteur sont symétriques par rapport à la ligne de terre dans l'épure. Par conséquent, si nous appelons (m, m') le point cherché, pour trouver ce point il suffit de remarquer que si l'on joint le point m au point de rencontre, α, de d' et de xy, le triangle $m\alpha m'$ ainsi obtenu est isocèle; de sorte que pour obtenir le point m, il n'y a qu'à prendre l'intersection de d avec la droite αm, symétrique de d' par rapport à xy. Le point m' s'en déduit par une ligne de rappel.

Au lieu de déterminer le point m pour en déduire ensuite le

point m', on aurait pu faire l'inverse, en construisant la droite symétrique de d par rapport à xy.

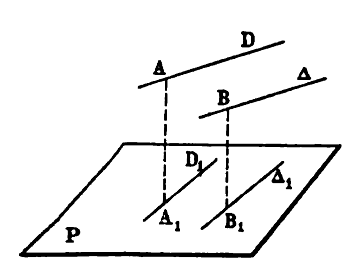


2° Soit maintenant à déterminer la trace de la droite (d, d') sur le deuxième plan bissecteur. Remarquons, pour cela, que tout point appartenant au deuxième plan bissecteur a ses projections confondues sur l'épure. Dès lors, comme ce point appartient à la droite, il sera projeté au point de rencontre, (a, a'), des projections de la droite.

§ III. — *Droites parallèles.*

62. Théorème. — *Pour que deux droites* D *et* Δ *soient parallèles, il faut et il suffit que leurs projections de même nom soient parallèles.*

1° *C'est nécessaire.* — Considérons en effet deux droites parallèles D et Δ, et projetons-les orthogonalement sur le même plan P, en D_1 et en Δ_1. Soient AA_1 et BB_1 les projetantes des points A et B, appartenant respectivement à D et à Δ.



Les deux plans DAA_1 et ΔBB_1, qui sont les plans projetant les deux droites sur le plan P, sont parallèles comme plans de deux angles ayant leurs côtés parallèles. Les sections D_1 et Δ_1 de ces deux plans par le plan P sont donc parallèles. Il en résulte que les projections de même nom sont parallèles.

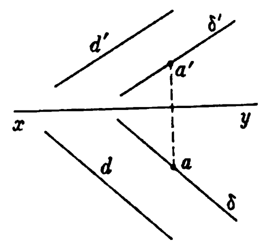
2° *C'est suffisant.* — En effet, si les projections de même nom sont parallèles, les plans projetants de même nom le sont aussi ; dès lors les quatre plans qui projettent les deux droites sur les deux plans de projection forment une surface prismatique dont les deux droites sont deux arêtes, et ils sont, par suite, parallèles.

63. Remarques. — 1° La proposition cesse d'être vraie quand les deux droites sont dans des plans de profil.

2° En vertu du théorème précédent, si l'on a l'épure d'un système de deux droites (d, d') et (δ, δ'), on reconnaîtra que ces deux droites sont parallèles si d et δ sont parallèles, ainsi que d' et δ', pourvu, bien entendu, que les deux droites ne soient pas dans des plans de profil.

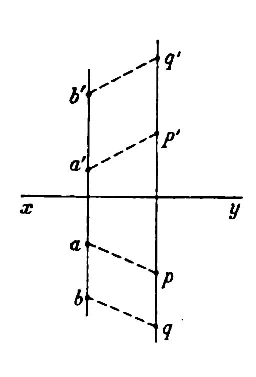
64. **Problème VI.** — *Par un point donné, mener la parallèle à une droite donnée.*

Nous examinerons deux cas, suivant que la droite n'est pas située ou est située dans un plan de profil.



1° Si la droite donnée (d, d') n'est pas située dans un plan de profil, pour lui mener une parallèle par le point (a, a'), il suffit de mener la parallèle à d par le point a et la parallèle à d' par le point a'. La droite (δ, δ') ainsi obtenue est la parallèle demandée.

2° Soit donc à mener par le point (p, p') la parallèle à la droite $(ab, a'b')$ située dans un plan de profil *distinct de celui qui passe par le point* (p, p'). Remarquons d'abord que si un parallélogramme n'est pas situé dans un plan de profil, ses deux projections sont des parallélogrammes, et réciproquement. Construisons alors le quatrième sommet du parallélogramme dont trois sommets sont en (a, a'), (b, b') et (p, p'). Nous obtenons ainsi le point (q, q'), et la droite cherchée est déterminée par les points (p, p') et (q, q'). Il resterait à examiner le cas où le point et la droite sont dans le même plan de profil, mais ce cas sera examiné ultérieurement (voir les rabattements).

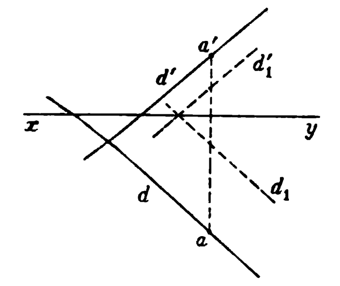


On pourrait, du reste, le traiter directement dès à présent, en s'appuyant sur ce que deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

On mènerait alors la parallèle à la droite donnée par un point non situé dans le même plan de profil, ce que l'on vient d'apprendre à faire ; puis par le point donné situé dans le même plan de profil que la première droite, on mènerait la parallèle à la deuxième.

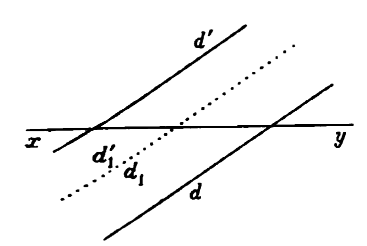
Nous sommes en mesure, maintenant, de résoudre les problèmes suivants :

65. Problème VII. — *Représenter une droite parallèle à l'un quelconque des plans bissecteurs.*



1° Si la droite est parallèle au premier plan bissecteur, elle est parallèle à une droite de ce plan. On se donnera donc une droite dans le premier plan bissecteur, et on lui mènera une parallèle par un point quelconque. On aura ainsi la première des deux épures ci-contre.

2° On opèrera d'une manière tout à fait analogue pour obtenir l'épure d'une droite parallèle au deuxième plan bissecteur. Dans la deuxième épure, ci-contre, (d_1, d'_1) est une droite du deuxième plan bissecteur et (d, d') une droite parallèle au deuxième plan bissecteur.

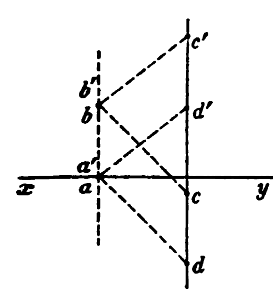


On peut remarquer que les projections d'une droite parallèle au premier plan bissecteur forment un triangle isocèle avec xy ; tandis que les projections d'une parallèle au deuxième plan bissecteur sont parallèles entre elles.

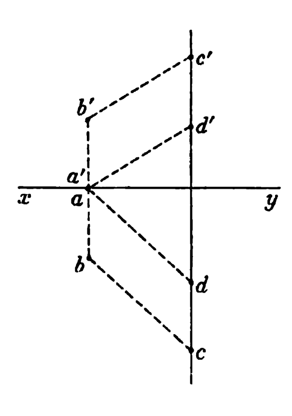
Les réciproques sont évidemment vraies.

66. Problème VIII. — *Représenter une droite perpendiculaire à l'un quelconque des plans bissecteurs.*

1° Soit d'abord à représenter une droite perpendiculaire au premier plan bissecteur. Pour cela, par un point (a, a') pris sur xy, menons la perpendiculaire à ce plan : elle sera située dans le deuxième plan bissecteur, et il suffira d'un autre point pour la définir. Prenons alors un point (b, b') sur la ligne de rappel du point (a, a'), et nous aurons ainsi en $(ab, a'b')$ la perpendiculaire menée au premier plan bissecteur par le point (a, a'). Il ne reste plus qu'à mener une parallèle $(cd, c'd')$ à cette droite, comme cela a été expliqué au n° 64.

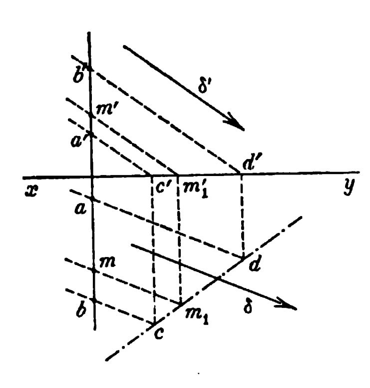


2° Soit maintenant à représenter une droite perpendiculaire au deuxième plan bissecteur. Pour cela, par un point (a, a') pris sur xy, menons la perpendiculaire à ce plan. Cette perpendiculaire sera située dans le plan de profil du point (a, a') et dans le premier plan bissecteur. Si donc nous prenons, dans ce dernier plan, un point (b, b') situé sur la ligne de rappel du point (a, a'), nous aurons en $(ab, a'b')$ la perpendiculaire au deuxième plan bissecteur, menée par le point (a, a'). Il ne reste plus alors qu'à mener une parallèle $(cd, c'd')$ à cette droite, comme cela est expliqué au n° 64.



67. **Problème IX.** — *Une droite étant située dans un plan de profil, se donner un point de cette droite.*

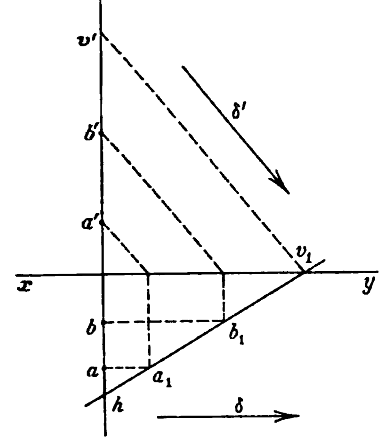
Soit $(ab, a'b')$ la droite donnée, définie par deux de ses points. Donnons-nous, par exemple, la projection verticale du point inconnu, et cherchons sa projection horizontale. Pour cela, projetons la droite sur l'un quelconque des deux plans de projection, sur le plan horizontal par exemple, parallèlement à une direction oblique à ce plan et choisie arbitrairement; soit (δ, δ') cette direction. La projection de la droite s'obtiendra en joignant les traces horizontales des parallèles à (δ, δ') menées par (a, a') et par (b, b'). Soit cd cette projection et soit m' la projection verticale du point inconnu. La projection horizontale de ce point, parallèlement à (δ, δ'), est évidemment le point m_1, intersection de cd avec la ligne de rappel du point de rencontre de xy et de la parallèle à δ' menée par m'. En menant alors par m_1 la parallèle à δ, on aura le point m, ce qui achève de déterminer le point inconnu.



La méthode que nous venons d'employer pour résoudre ce problème s'appelle la *méthode des projections obliques*. Le grand avantage qu'elle

présente réside dans ce que la direction des projetantes est arbitraire, et aussi dans ce qu'elle n'exige que la règle et l'équerre. Nous allons aussi l'appliquer à la résolution du problème suivant :

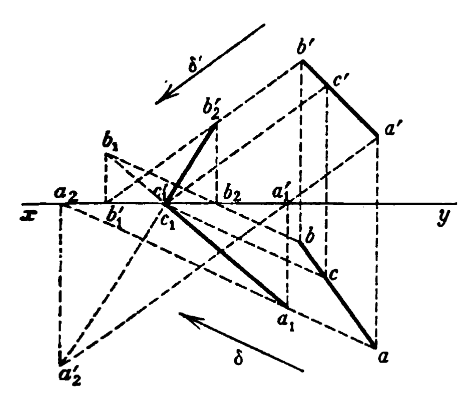
68. Problème X. — *Trouver les traces d'une droite située dans un plan de profil.*



Soit $(ab,\ a'b')$ la droite donnée, définie par deux de ses points. Projetons-la obliquement sur le plan horizontal, en prenant comme direction des projetantes une droite de front quelconque $(\delta,\ \delta')$. La trace verticale se projettera alors sur xy, et la projection de la trace horizontale ne changera pas. Or, la projection de la droite est la ligne a_1b_1, qui joint les traces horizontales des parallèles à $(\delta,\ \delta')$ menées par $(a,\ a')$ et par $(b,\ b')$. Donc la trace horizontale est le point h et la trace verticale est le point v', qui est projeté obliquement en v_1 sur xy et sur a_1b_1.

69. Application. — *Les plans de projection étant supposés opaques, trouver l'ombre portée par un segment de droite opaque, éclairé par des rayons parallèles de direction donnée.*

Soient $(ab,\ a'b')$ le segment donné et $(\delta,\ \delta')$ la direction des rayons lumineux, le sens de propagation de la lumière étant indiqué par des flèches.



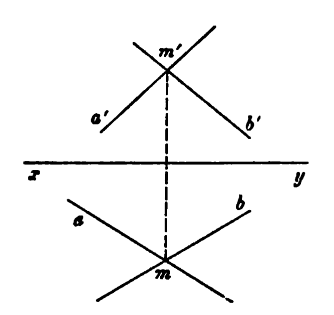
Le problème revient évidemment à projeter obliquement le segment $(ab, a'b')$ sur le plan horizontal et sur le plan vertical, la direction des projetantes étant (δ, δ'). Or la projection sur le plan horizontal est a_1b_1 ; la projection sur le plan vertical est $a'_2b'_2$, rencontrant la première au point $(c_1,\ c'_1)$ de la ligne de terre.

Ce point est l'ombre portée par le point (c, c') sur le plan horizontal et sur le plan vertical. Si alors on a égard au sens de propagation de la lumière, on voit que l'ombre portée sur le plan horizontal doit être limitée à a_1c_1 et, de même, que l'ombre portée sur le plan vertical doit être limitée à $b'_2c'_1$.

§ IV. — *Droites concourantes.*

70. **Problème XI.** — *Reconnaître si deux droites données par leurs projections se coupent, et déterminer leur point de rencontre.*

Nous allons montrer que *la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites données par leurs projections se coupent, est que les deux points de rencontre des projections de même nom soient sur la même ligne de rappel.*

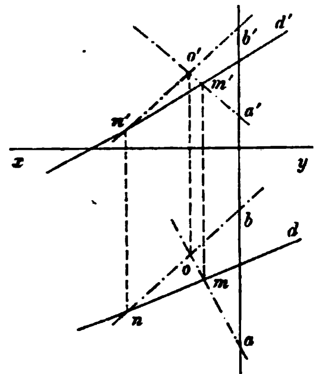


1° *C'est nécessaire ;* car si les deux droites A et B se coupent en un point M, la projection horizontale m de ce point doit se trouver à la fois sur a et sur b, puisque M est à la fois sur A et sur B ; donc elle est à leur intersection. On voit de même que la projection verticale m' est à l'intersection de a' et de b' ; par suite les points de rencontre des projections de même nom sont les projections du même point de l'espace et sont sur la même ligne de rappel.

2° *C'est suffisant ;* car si les points de rencontre m et m' des projections de même nom sont sur la même ligne de rappel, ces deux points sont les projections d'un point M de l'espace. Le point M est d'ailleurs un point commun aux deux droites, puisque ses projections sont sur les projections de même nom des deux droites. Le point de rencontre se trouve d'ailleurs ainsi déterminé.

71. Remarque. — Les conclusions précédentes, en ce qui concerne la détermination du point de rencontre, sont en défaut quand l'une des droites est située dans un plan de profil, parce qu'alors les points de rencontre des projections de même nom sont toujours sur la même ligne de rappel. D'ailleurs, les constructions auxquelles on est con-

duit ne sont plus possibles quand l'un des deux points m ou m' sort des limites du dessin. La remarque suivante conduit à des constructions toujours possibles.

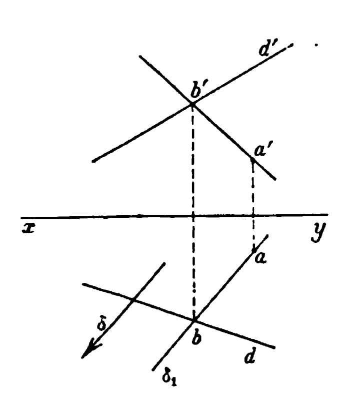


Pour que deux droites se coupent, il faut et il suffit que deux droites quelconques qui s'appuient sur elles, se coupent. Ceci résulte de ce que deux droites qui se coupent déterminent un plan ; dès lors si deux droites quelconques les rencontrent, elles sont dans ce plan et se coupent.

Voyons d'après cela si les deux droites (d, d') et $(ab, a'b')$ se coupent. A cet effet, prenons sur D deux points quelconques (m, m') et (n, n'). Joignons le premier au point (a, a') et le second au point (b, b') ; nous obtenons ainsi deux droites $(am, a'm')$, $(bn, b'n')$ qui se coupent, puisque les points de rencontre o et o' des projections de même nom sont sur la même ligne de rappel ; donc les deux droites (d, d') et $(ab, a'b')$ se coupent aussi.

72. Problème XII (application du précédent). — *Mener par un point donné une droite s'appuyant sur une droite donnée.*

Le problème ainsi posé est indéterminé. Pour le déterminer, on peut se donner soit le point de rencontre de la droite donnée et de la droite cherchée, soit la direction de l'une des projections de la droite cherchée.



Dans le premier cas, on peut prendre comme point de rencontre des deux droites un point quelconque de la droite donnée. On a alors à faire passer une droite par deux points.

Traitons le problème dans le second cas. Soient, pour cela, (d, d') la droite donnée et (a, a') le point donné. Donnons-nous, par exemple, la direction δ de la projection horizontale de la droite cherchée. Celle-ci sera alors projetée horizontalement suivant la parallèle $a\delta_1$ menée à δ par le point a. Cette parallèle ren-

contre d en un point b, qui sera la projection horizontale du point de rencontre de (d, d') avec la droite cherchée. On en déduit la projection verticale b' du même point par une ligne de rappel, et ensuite les projections ab et $a'b'$ de la droite cherchée.

Deux cas particuliers de ce problème, qui se présentent fréquemment dans les applications, sont les suivants :

1° Mener par un point donné une horizontale s'appuyant sur une droite donnée.

2° Mener par un point donné une frontale s'appuyant sur une droite donnée.

Nous laissons au lecteur le soin de les traiter.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1. Trouver les projections d'un point d'une droite donnée, connaissant le rapport de la cote à l'éloignement de ce point. En déduire la détermination du point de rencontre de la droite avec le premier plan bissecteur.

2. Trouver le point de rencontre de deux droites situées dans le même plan de profil, en employant la méthode des projections obliques.

3. Une droite et un point étant situés dans le même plan de profil, reconnaître si le point est sur la droite.

4. Reconnaître si deux droites situées dans le même plan de profil sont parallèles.

5. Reconnaître si deux droites situées dans deux plans de profil différents sont parallèles.

6. Par un point donné, mener une parallèle à une droite de profil, en se servant de la méthode des projections obliques.

7. Une droite perpendiculaire au premier plan bissecteur est déterminée par sa trace verticale et par sa trace sur le plan bissecteur auquel elle est perpendiculaire. On suppose que la portion de cette droite limitée par ces

deux traces soit dans la région (1_2), et l'on demande de déterminer l'ombre qu'elle porte sur le plan horizontal, les rayons lumineux étant supposés de front.

8. Trouver l'ombre portée sur les plans bissecteurs, supposés opaques, par une portion de droite éclairée par une source lumineuse à distance finie ou infinie. On supposera les plans de projection opaques.

9. Si une droite est perpendiculaire au premier plan bissecteur, ses traces sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

10. Si une droite est perpendiculaire au deuxième plan bissecteur, ses traces sont confondues.

CHAPITRE III

LE PLAN

---

§ I. — *Représentation du plan.*

73. **Généralités.** — En vertu de la définition donnée au n° 27, on peut dire qu'une figure est *représentée* en Géométrie descriptive quand on connait les éléments suffisants pour la déterminer complètement. D'après cela, un plan sera représenté : soit par les projections de trois points; soit par les projections d'une droite et d'un point; soit par les projections de deux droites qui se coupent; soit enfin par les projections de deux droites parallèles. Ces divers modes de représentation se ramènent à un seul, n'importe lequel des quatre ; on prend d'habitude le mode de représentation par deux droites qui se coupent.

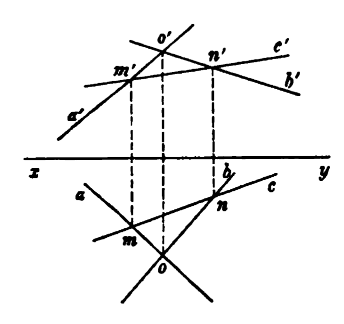
Faire passer un plan par deux droites qui se coupent, signifie *construire les projections d'une figure quelconque située dans le plan de ces deux droites*. On voit alors comment il faut comprendre les énoncés des problèmes suivants, qui se ramènent au précédent, ainsi que nous l'avons déjà dit :

Faire passer un plan : 1° par trois points ; 2° par deux droites parallèles ; 3° par une droite et un point.

Ajoutons d'ailleurs qu'une figure étant un ensemble de points, pour apprendre à construire les projections d'une figure située dans un plan, il suffit d'apprendre à construire les projections d'un point de ce plan. Il est plus commode d'apprendre d'abord à construire les

projections d'une droite du plan, ce qui nous amène à résoudre le problème suivant :

74. **Problème I.** — *Un plan étant déterminé par deux droites qui se coupent, construire les projections d'une droite de ce plan.*



Le problème ainsi posé est indéterminé, et on peut le déterminer en se donnant soit la projection horizontale, soit la projection verticale de la droite inconnue. Donnons-nous, par exemple, la projection horizontale c d'une droite située dans le plan défini par les deux droites qui se coupent (a, a') et (b, b') ; puis cherchons à déterminer la projection verticale c'. A cet effet, remarquons que la droite C coupe la droite A en un point dont la projection horizontale est m, et dont par suite la projection verticale est m' sur a' et sur la ligne de rappel du point m. Le point (m, m') est un point de la droite C et, par un raisonnement tout pareil, on voit qu'il en est de même du point (n, n') ; la projection verticale cherchée, c', n'est donc autre chose que $m'n'$.

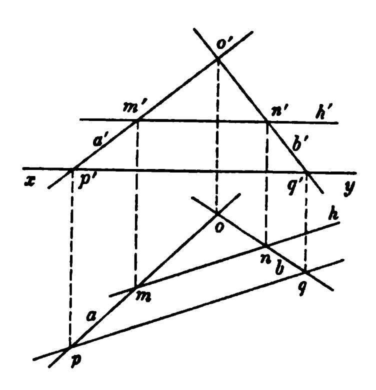
On aurait évidemment à faire des constructions analogues pour obtenir c connaissant c'.

75. **Problème II.** — *Un plan étant déterminé par deux droites qui se coupent, construire les projections d'un point de ce plan.*

Ce problème se ramène au précédent : on construit les projections d'une droite du plan ; puis on construit les projections d'un point de cette droite.

76. Remarque. — Le problème II peut aussi être posé de la manière suivante : *Connaissant l'une des projections d'un point situé dans un plan déterminé par deux droites qui se coupent, trouver l'autre projection.* La solution ne change pas : on se donne une droite du plan passant par le point, en se donnant la projection de la droite qui est de même nom que la projection connue du point et qui doit d'ailleurs contenir celle-ci ; on est donc toujours ramené au problème I.

77. **Horizontales et trace horizontale d'un plan.** — On appelle *horizontales* d'un plan, les droites du plan parallèles au plan horizontal : elles sont toutes parallèles entre elles comme sections du même plan par des plans horizontaux, c'est-à-dire parallèles.



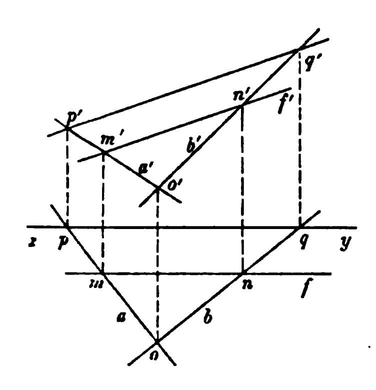
Pour se donner une horizontale du plan des deux droites (a, a') et (b, b'), on se donne sa projection verticale h', parallèle à xy ou, ce qui revient au même, sa cote soit au-dessus, soit au-dessous du plan horizontal ; on en déduit immédiatement la projection horizontale h par des lignes de rappel $m'm$ et $n'n$.

L'horizontale du plan ayant pour cote zéro s'appelle la *trace horizontale* du plan : c'est l'intersection du plan avec le plan horizontal de projection ; c'est aussi le lieu des traces horizontales de toutes les droites du plan. Pour l'obtenir, on procède comme pour obtenir une horizontale quelconque du plan, en remarquant seulement que la projection verticale est sur la ligne de terre, ce qui conduit à mener les lignes de rappel $p'p$ et $q'q$; on obtient ainsi en pq et $p'q'$ les projections de la trace horizontale. On peut du reste observer que (p, p') est la trace horizontale de la droite (a, a') et que (q, q') est la trace horizontale de (b, b') ; ce qui montre que la détermination de la trace horizontale du plan se ramène à la détermination des traces horizontales de deux droites de ce plan. Enfin il est bon de rappeler que la trace horizontale d'un plan coïncide avec sa projection horizontale et se projette verticalement sur la ligne de terre.

78. **Frontales et trace verticale d'un plan.** — On appelle *lignes de front* ou *frontales* d'un plan, les droites du plan parallèles au plan vertical : elles sont toutes parallèles entre elles, comme sections du plan par des plans parallèles au plan vertical.

Pour se donner une frontale du plan de deux droites (a, a') et (b, b'), on se donne sa projection horizontale f, parallèle à xy, ou, ce qui revient au même, son éloignement soit en avant, soit en arrière du

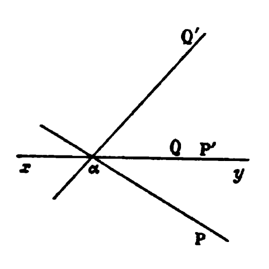
plan vertical; on en déduit immédiatement sa projection verticale f' au moyen des lignes de rappel mm' et nn'.



La frontale du plan d'éloignement nul s'appelle la *trace verticale* du plan : c'est l'intersection du plan avec le plan vertical de projection; c'est aussi le lieu des traces verticales de toutes les droites du plan. Pour l'obtenir, on procède comme pour obtenir une frontale quelconque du plan, en remarquant seulement que la projection horizontale est sur xy, ce qui conduit à mener les lignes de rappel pp' et qq'; on obtient ainsi les projections pq et $p'q'$ de la trace verticale. On peut, du reste, observer que (p, p') et (q, q') sont les traces verticales respectives des deux droites (a, a') et (b, b'), ce qui ramène la détermination de la trace verticale du plan à celle des traces verticales de deux droites de ce plan. Enfin, il est bon de rappeler que la trace verticale d'un plan coïncide avec sa projection verticale et se projette horizontalement sur la ligne de terre.

79. **Détermination d'un plan par ses traces.** — Quand on veut déterminer un plan au moyen de deux droites qui se coupent, il faut tracer dans l'épure, en outre de la ligne de terre, les projections des deux droites et la ligne de rappel qui joint les points de rencontre des projections de même nom et qui indique que les deux droites se coupent; on a donc à tracer cinq lignes, la ligne de terre étant exclue. Mais, supposons qu'au lieu de déterminer le plan par deux droites quelconques, contenues dans le plan, on le détermine par ses traces. La ligne de terre étant tracée, il n'y aura besoin de tracer ni la projection verticale de la trace horizontale, ni la projection horizontale de la trace verticale : il suffira de tracer la projection horizontale de la trace horizontale, c'est-à-dire la trace horizontale elle-même, et la projection verticale de la trace verticale, c'est-à-dire la trace verticale elle-même. Il suffira donc de deux droites au lieu de cinq pour définir le plan, et, par suite, il y a tout avantage, quand cela est possible, à définir un plan par ses traces, au lieu de le définir par deux droites

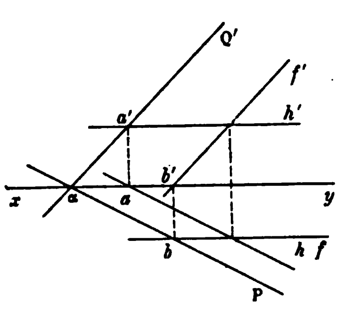
quelconques. Il y a toutefois une précaution à prendre : *il faut que les traces rencontrent la ligne de terre au même point.* En effet, le plan donné et les deux plans de projection forment un trièdre dont les arêtes sont les traces du plan et la ligne de terre ; les traces du plan rencontrent donc la ligne de terre au sommet de ce trièdre.



Quand on représente ainsi un plan par ses trace Pα et αQ', on dit : le plan PαQ' ; mais il faut sous-entendre : le plan déterminé par les deux doites (P, P') et (Q, Q'). De cette façon on ne perd pas de vue que le plan est représenté par deux droites qui se coupent, et les solutions des problèmes traités sur le plan représenté par deux droites qui se coupent restent les mêmes quand le plan est représenté ou défini par ses traces; on peut s'en convaincre bien aisément en traitant à nouveau les problèmes I et II, quand le plan est défini par ses traces.

80. **Problème III.** — *Se donner une horizontale ou une frontale d'un plan défini par ses traces.*

Cherchons, par exemple, à déterminer une horizontale du plan PαQ' : c'est, bien entendu, un problème indéterminé et que l'on détermine en se donnant soit la projection verticale, soit la cote de l'horizontale, ce qui revient au même. Soit donc h' la projection verticale de l'horizontale inconnue; il nous reste à chercher sa projection horizontale. Or nous savons que la projection horizontale est parallèle à αP ; donc elle sera déterminée si l'on en connait un point. Mais l'horizontale inconnue et la trace verticale du plan se coupent en un point dont nous connaissons la projection verticale a' et dont on a, par suite, immédiatement la projection horizontale a. Pour avoir h, il ne reste plus qu'à mener par le point a la parallèle à αP.



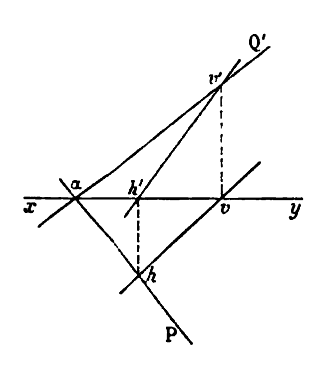
On détermine d'une manière analogue une frontale quelconque (f, f') du plan.

Enfin, ce problème étant résolu, on saura, ainsi que cela a déjà été remarqué plus haut (Probl. II), résoudre le problème suivant :

Se donner un point situé dans un plan défini par ses traces.

81. Remarque. — Quand un plan est défini par ses traces, pour se donner une droite du plan on peut se donner les traces de cette droite, situées sur les traces de même nom du plan.

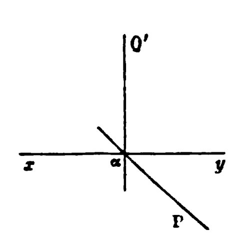
82. Problème IV. — *Faire passer un plan par une droite.*



Le problème est évidemment indéterminé. On peut le déterminer soit en se donnant une droite rencontrant la droite donnée, soit en se donnant un point non situé sur cette droite, soit par toute autre condition qui achève de déterminer le plan.

Si on voulait déterminer le plan par ses traces, il suffirait de déterminer les traces (h, h') et (v, v') de la droite donnée et de joindre les points h et v' à un point quelconque α de xy. On aurait ainsi le plan PαQ', représenté dans la figure ci-contre.

83. Plans verticaux. — On appelle *plan vertical* tout plan perpendiculaire au plan horizontal. On définit un plan vertical par sa trace horizontale et par sa trace verticale. *Celle-ci est perpendiculaire à la ligne de terre*; en effet, elle est perpendiculaire au plan horizontal; donc elle est perpendiculaire à la ligne de terre, qui est située dans ce plan. Quant à la trace horizontale, en vertu de la définition de l'angle plan d'un dièdre, *elle forme avec xy un angle égal à l'angle plan du dièdre formé par le plan vertical considéré avec le plan vertical de projection.* La figure ci-contre est l'épure d'un plan vertical PαQ'.

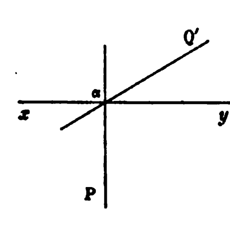


Il est très important de remarquer que *toute figure située dans un plan vertical* PαQ' *est projetée horizontalement sur sa trace horizontale* Pα.

84. **Plans de front.** — Un plan de front est un plan parallèle au plan vertical : c'est un plan vertical dans une position particulière. Il n'a pas de trace verticale, et sa trace horizontale est parallèle à xy. Toute parallèle à xy peut être considérée comme représentant un plan de front.

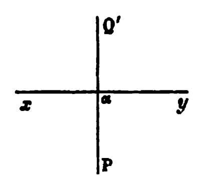
Toute figure située dans un plan de front se projette horizontalement sur la trace horizontale de ce plan, et verticalement suivant une figure qui lui est égale.

85. **Plans de bout.** — Un plan *de bout* est un plan perpendiculaire au plan vertical; on le définit par sa trace verticale et par sa trace horizontale. *Celle-ci est perpendiculaire à xy* ; en effet, elle est perpendiculaire au plan vertical, donc elle est perpendiculaire à xy, qui est située dans ce plan. Quant à la trace verticale, *elle forme avec xy un angle égal à l'angle plan du dièdre formé par le plan de bout avec le plan horizontal de projection.* La figure ci-contre est l'épure d'un plan de bout PαQ'.



Il est très important d'observer que *toute figure située dans un plan de bout est projetée verticalement sur sa trace verticale αQ'.*

86. **Plans horizontaux.** — Un plan *horizontal* est un plan parallèle au plan horizontal : c'est un plan de bout dans une position particulière. Il n'a pas de trace horizontale et sa trace verticale est parallèle à xy. Toute parallèle à xy peut être considérée comme représentant un plan horizontal. Enfin *toute figure située dans un plan horizontal se projette verticalement sur la trace verticale de ce plan, et horizontalement suivant une figure égale.*

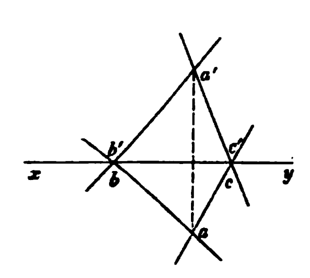


87. **Plans de profil.** — Un plan de *profil* a déjà été défini : c'est un plan perpendiculaire à la ligne de terre; ses deux traces sont confondues avec la même perpendiculaire à xy et sont les projections horizontale et verticale de toutes les figures situées dans le plan de profil. Dans la figure ci-contre PαQ' représente un plan de profil.

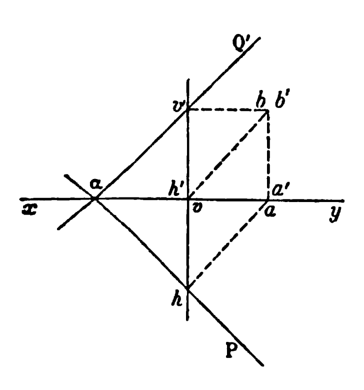
88. Plans parallèles à la ligne de terre. — Lorsqu'un plan est parallèle à la ligne de terre, ses deux traces sont parallèles à cette ligne ; en effet, le plan et les deux plans de projection forment une surface prismatique ayant pour arêtes les traces du plan et la ligne de terre. L'épure d'un plan parallèle à xy se compose, d'après cela, de xy et de deux droites P et Q' parallèles à cette ligne.

Q'
P' Q
x y
P

89. Plans passant par la ligne de terre. — Quand un plan passe par la ligne de terre, ses traces sont confondues avec cette ligne et ne peuvent servir à le déterminer. On le détermine alors par la ligne de terre et un point (a, a'); et même, dans ce cas, il y a avantage à joindre le point (a, a') à deux points (b, b') et (c, c') sur xy, afin de déterminer le plan par deux droites qui se coupent $(ab, a'b')$ et $(ac, a'c')$.



90. Plans perpendiculaires au premier plan bissecteur. — Un plan perpendiculaire au premier plan bissecteur est défini par une droite (D) perpendiculaire à ce plan bissecteur et par un point quelconque P, non situé sur cette droite. On le détermine facilement par deux droites en joignant le point P à un point quelconque de D.



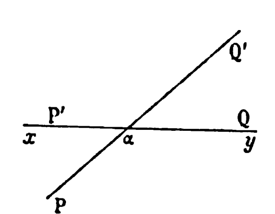
Lorsqu'un plan est perpendiculaire au premier plan bissecteur, ses traces sont symétriques par rapport à la ligne de terre.

Considérons en effet la droite de profil $(hv, h'v')$ dont les traces sont symétriques par rapport à xy. Cette droite est perpendiculaire au premier plan bissecteur, car si on lui mène une parallèle $(ab, a'b')$ par un point (a, a') de xy, cette parallèle est située dans le deuxième plan bissecteur. Or, elle est de profil, donc elle est perpendiculaire au premier plan bissecteur, et il en est de même de $(hv, h'v')$.

Il en résulte que tout plan $P\alpha Q'$ passant par $(hv, h'v')$ est perpendiculaire au premier plan bissecteur; mais il est manifeste que ce plan a ses traces symétriques par rapport à xy.

Comme tout plan perpendiculaire au premier plan bissecteur peut s'obtenir par une construction analogue, la proposition est démontrée.

91. Plans perpendiculaires au deuxième plan bissecteur. — On définit un plan perpendiculaire au deuxième plan bissecteur par une droite D perpendiculaire à ce plan bissecteur et par un point quelconque P non situé sur cette droite. On peut le déterminer ensuite par deux droites, en joignant le point P à un point quelconque de D.



Par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le numéro précédent, on prouve qu'*un plan perpendiculaire au deuxième plan bissecteur a ses traces confondues dans l'épure.*

Il en résulte que l'épure d'un plan perpendiculaire au deuxième plan bissecteur se composera de la ligne de terre et d'une droite $P\alpha Q'$ représentant les traces du plan.

§. II. — *Plans parallèles.*

92. Théorème. — *Lorsque deux plans sont parallèles, leurs traces de même nom sont parallèles, et réciproquement.*

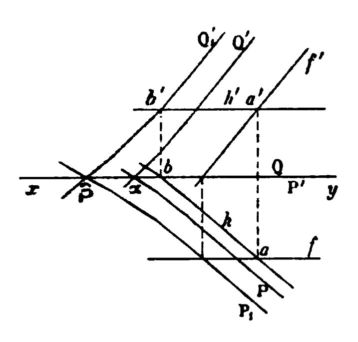
1° Si les plans sont parallèles, leurs traces de même nom sont parallèles comme sections de deux plans parallèles par un troisième.

2° Si les traces de même nom sont parallèles, les deux plans sont parallèles comme plans de deux angles ayant leurs côtés parallèles.

93. Problème V. — *Mener par un point le plan parallèle à un plan donné.*

La solution est immédiate : *on mène par les projections du point les parallèles aux projections de même nom des droites qui déterminent le plan.*

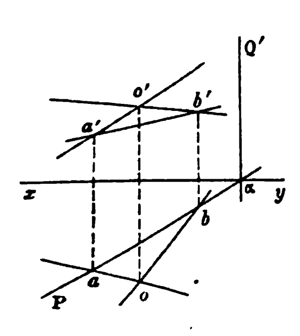
Par exemple, si le plan est déterminé par ses traces PP′ et QQ′, on mène par le point (a, a') les parallèles aux deux droites (P, P′) et (Q, Q′); on détermine ainsi le plan cherché par deux droites (h, h') et (f, f'), c'est-à-dire *par une horizontale et par une ligne de front.* On construit aisément ses traces *si cela est nécessaire*, ~~mais~~ il n'y a généralement aucune nécessité à cela. Toutefois si l'on veut déterminer le plan par ses traces, voici comment il faut procéder : On mène par le point (a, a') la parallèle à l'une des traces du plan, la parallèle (h, h') à la trace horizontale, par exemple. On cherche la trace verticale (b, b') de cette droite, puis on mène : par le point b' la parallèle $\beta Q'_1$ à $\alpha Q'$ et par le point β la parallèle βP_1 à αP. On obtient ainsi en $P_1\beta Q'_1$ le plan cherché.



§ III. — *Intersection de deux plans.*

94. Premier cas. — *Déterminer l'intersection de deux plans dont l'un est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*

Soit par exemple à trouver l'intersection d'un plan quelconque P et d'un plan Q perpendiculaire au plan horizontal. Nous avons vu que toute figure située dans le plan Q est projetée horizontalement sur la trace horizontale de ce plan; il en résulte que l'on connait la projection horizontale de l'intersection des deux plans P et Q (c'est la trace horizontale du plan Q); mais alors le problème est ramené au suivant, déjà résolu : *Connaissant la projection horizontale d'une droite du plan* P, *trouver sa projection verticale.* Dans la figure ci-contre le premier plan est déterminé par deux droites qui se coupent $(oa, o'a')$ et $(ob, o'b')$; le second plan est déterminé par ses traces $P\alpha$ et $\alpha Q'$, et enfin l'intersection est $(ab, a'b')$. La droite $\alpha Q'$ n'intervient pas dans les constructions et on peut se dispenser de la tracer.



On aurait des constructions analogues si le second plan était perpendiculaire au plan vertical.

Nous engageons le lecteur à faire l'épure dans ce cas et dans le cas où le plan P est déterminé par ses traces, situées d'ailleurs d'une manière quelconque par rapport à la ligne de terre.

95. **Deuxième cas.** — *Déterminer l'intersection de deux plans quelconques.*

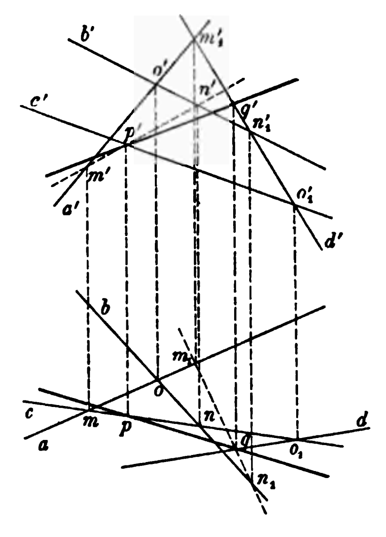
Pour déterminer, dans le cas général, la droite d'intersection de deux plans, on remarque qu'il suffit d'en avoir deux points. Soient alors P et Q les deux plans donnés ; imaginons qu'on les coupe par un plan quelconque R (*plan auxiliaire*). Ce plan coupe le plan P suivant une droite D et le plan Q suivant une droite D_1; les deux droites D et D_1 sont situées dans le même plan R et se coupent en un point M qui est un point de l'intersection des deux plans P et Q. Au moyen d'un second plan auxiliaire on obtient un second point N et, en joignant ces deux points, on a l'intersection demandée.

A la vérité, il semble qu'au lieu de résoudre le problème on en ait compliqué la solution, puisque au lieu de chercher tout simplement l'intersection de deux plans on résout quatre fois le même problème; il semble même qu'on n'ait pas fait faire un pas à la solution. Mais il n'en est pas ainsi et le problème est effectivement résolu de cette façon. En effet, les plans auxiliaires *peuvent être choisis arbitrairement* ; si donc on les choisit perpendiculaires à l'un ou l'autre des deux plans de projection, on saura, en vertu du premier cas, déterminer les droites analogues à D et à D_1 et, par suite, résoudre complètement le problème.

Cela posé, supposons les deux plans déterminés par deux droites qui se coupent et soient : (a, a') et (b, b') les droites qui se coupent en (o, o') et qui déterminent le premier plan O; (c, c') et (d, d') celles qui se coupent en (o_1, o'_1) et qui déterminent le second plan O_1. On peut prendre comme plans auxiliaires, soit des plans horizontaux, soit des plans de front ; mais il est beaucoup plus commode de prendre les plans qui projettent horizontalement ou verticalement les droites de l'un ou l'autre plan ; en effet, si l'on prend, par exemple, comme plan auxiliaire le plan qui projette horizontalement la droite (a, a') du premier plan, on connaît l'intersection de ce dernier plan et du plan auxiliaire employé [c'est la droite (a, a') elle-même], et le problème se trouve ainsi simplifié.

Dans l'exemple actuel prenons d'abord, comme plan auxiliaire, le plan qui projette horizontalement (c, c') ; ce plan coupe le plan O_1 suivant la droite (c, c') et le plan O suivant la droite $(mn, m'n')$; ces deux droites se coupent en un point (p, p') qui est l'un des points cherchés.

Pour obtenir un second point, prenons comme plan auxiliaire le plan qui projette verticalement la droite (d, d') ; il coupe les deux

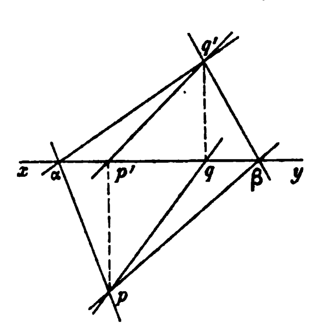


plans O_1 et O respectivement suivant les droites (d, d') et $(m_1n_1, m'_1n'_1)$; ces deux droites se coupent au point (q, q') qui est le second point cherché. La droite d'intersection des deux plans est donc $(pq, p'q')$.

96. **Suppression de la ligne de terre.** — Dans cette épure, ainsi que dans beaucoup d'autres, la ligne de terre a été supprimée parce qu'elle sert tout simplement à indiquer la direction des lignes de rappel. Mais il y a, à cette suppression de la ligne de terre, un avantage autre que celui de la simplification d'un dessin. Si en effet on ne trace pas la ligne de terre, ce qui revient à la laisser indéterminée, on peut supposer que l'un quelconque des deux plans de projection se déplace parallèlement à lui-même ; cela ne change pas la projection d'une figure quelconque sur ce plan, et cela ne change que la position de la figure par rapport aux plans de projection. On peut donc supposer les plans de projection placés de telle sorte qu'un corps quelconque

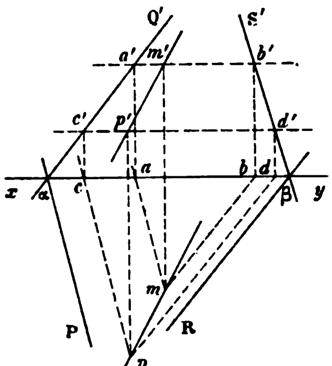
soit *tout entier* dans le premier dièdre. De cette façon, pour faire la ponctuation de l'épure de ce corps, on pourra faire totalement abstraction des plans de projection. Nous utiliserons cette remarque dans la suite.

97. **Troisième cas.** — *Déterminer l'intersection de deux plans dont les traces sont quelconques.*



Soient $p\alpha q'$ et $p\beta q'$ les deux plans donnés. On pourrait obtenir leur intersection par le procédé général indiqué dans le deuxième cas; mais il vaut mieux remarquer : 1° Que leurs traces horizontales sont toutes deux situées dans le plan horizontal et se coupent en un point (p, p') ; 2° Que leurs traces verticales sont toutes deux situées dans le plan vertical et se coupent en un point (q, q'). L'intersection des deux plans est donc la droite $(pq, p'q')$; on voit qu'elle est déterminée par ses traces. Toutefois la méthode n'est pas applicable lorsque les deux traces de même nom ne se rencontrent pas dans les limites du dessin.

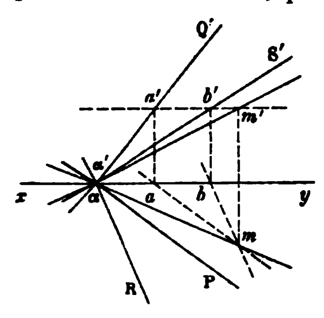
98. **Quatrième cas.** — *Déterminer l'intersection de deux plans dont les traces de même nom ne se rencontrent pas dans les limites du dessin.*



La méthode consiste alors à couper par deux plans auxiliaires horizontaux ou de front. Soit par exemple à déterminer l'intersection des deux plans $P\alpha Q'$ et $R\beta S'$. En coupant par un premier plan horizontal auxiliaire $a'b'$, on obtient une horizontale dans chacun des deux plans et un point (m, m') de l'intersection; en coupant par un second plan horizontal auxiliaire $c'd'$, on obtient une nouvelle horizontale de chaque plan et un second point (p, p') de l'intersection. Les projections de l'intersection sont donc mp et $m'p'$.

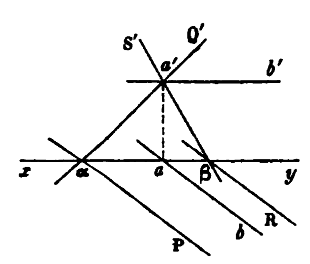
99. **Cinquième cas.** — *Déterminer l'intersection de deux plans dont les traces rencontrent la ligne de terre au même point.*

Soient $P\alpha Q'$ et $R\alpha S'$ les deux plans donnés. On connait un premier point de l'intersection, qui est le point de rencontre des deux traces, et il suffit d'en déterminer un second. Pour cela, on coupe les deux plans par un plan auxiliaire quelconque, par exemple par un plan horizontal $a'b'$; on obtient ainsi une horizontale $(am, a'm')$ du premier plan et une horizontale $(bm, b'm')$ du second. Ces deux droites se coupent en un point (m, m'), et les projections de l'intersection sont αm et $\alpha' m'$.



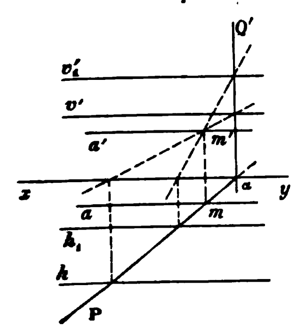
100. Sixième cas. — *Déterminer l'intersection de deux plans dont deux traces de même nom sont parallèles.*

Soit à déterminer l'intersection des deux plans $P\alpha Q'$ et $R\beta S'$ dont les traces horizontales sont parallèles. On remarque que l'intersection est horizontale; car, si par un point de l'intersection on mène la parallèle aux traces horizontales, elle est contenue dans chacun des deux plans et constitue par suite l'intersection des deux plans. D'après cela il suffit d'avoir un point de l'intersection pour qu'elle soit déterminée; or, les traces verticales se coupent en un point (a, a'); donc l'intersection est la droite $(ab, a'b')$.



101. Septième cas. — *Déterminer l'intersection de deux plans dont les traces sont parallèles à la ligne de terre.*

L'intersection est évidemment parallèle à la ligne de terre; il suffit donc d'en avoir un point, et on obtient ce point à l'aide d'un plan auxiliaire quelconque, par exemple vertical. Dans la figure ci-contre les traces du premier plan sont h et v', celles du second h_1 et v'_1, et enfin les traces du plan auxiliaire sont $P\alpha$ et $\alpha Q'$. L'intersection est $(ma, m'a')$.



102. Problème VI. — *Déterminer le point commun à trois plans.*

Soient P, Q, R les trois plans. Pour déterminer leur point commun on détermine d'abord l'intersection de deux de ces plans, P et Q par exemple, puis l'intersection du plan P et du plan R ou du plan Q et du plan R. Ces deux droites se coupent en un point qui est le point demandé. Le problème se ramène donc au problème V. Si l'on déterminait les droites d'intersection des trois plans deux à deux, on aurait les arêtes du trièdre formé par ces trois plans.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1. Prouver qu'un plan est déterminé quand on connaît une de ses lignes de plus grande pente, soit par rapport au plan horizontal, soit par rapport au plan vertical, et construire les traces d'un plan connaissant l'une de ses lignes de plus grande pente.

2. On donne une ligne de plus grande pente et la projection horizontale d'un point d'un plan ; construire la projection verticale de ce point.

3. Question analogue en supposant connue la projection verticale du point.

4. Un plan est défini par deux droites OA, OB qui se coupent au point O. On connaît l'une des projections d'une droite du plan passant par le point O, trouver l'autre projection.

5. Un plan est défini par la ligne de terre et un point. On connaît l'une des projections d'un point de ce plan, trouver l'autre projection du même point.

6. On donne la projection horizontale d'un polygone plan et les projections verticales de trois des sommets de ce polygone ; trouver sa projection verticale.

7. Déterminer l'ombre au soleil portée sur les plans de projection par un quadrilatère opaque donné. On connaît la direction des rayons lumineux et le sens de propagation de la lumière.

8. Mener par une droite un plan parallèle à une autre droite.

9. Même question en supposant que la seconde droite soit la ligne de terre.

10. Mener par un point un plan parallèle à deux droites.

11. Construire l'intersection de deux plans tels que les traces de chacun d'eux soient confondues. — Position de l'intersection par rapport aux plans de projection.

12. Construire l'intersection de deux plans tels que les traces de l'un coïncident avec les traces de nom contraire de l'autre. — Position de l'intersection par rapport aux plans de projection.

13. Construire l'intersection deux plans connaissant la trace horizontale et un point donné de chacun d'eux.

14. Même question en remplaçant les traces horizontales par les traces verticales.

15. Construire l'intersection de deux plans définis chacun par une ligne de plus grande pente, soit par rapport au plan horizontal, soit par rapport au plan vertical.

16. Construire l'intersection de deux plans dont l'un est défini par une ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal, et l'autre par une ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical.

17. Construire l'intersection de deux plans définis, le premier par une horizontale et un point, le deuxième par une frontale et un point.

18. Construire l'intersection de deux plans dont l'un passe par la ligne de terre et un point, et dont l'autre est le plan parallèle à la ligne de terre mené par une droite donnée.

CHAPITRE IV

LA DROITE ET LE PLAN COMBINÉS

---

§ I. — *Intersection d'une droite et d'un plan.*

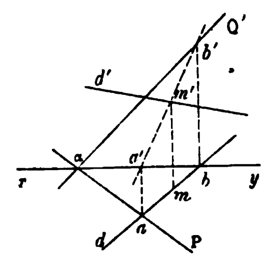
103. Indication de la méthode. — Soient P le plan et D la droite. On coupe par un plan *auxiliaire* contenant D ; ce plan et le plan P se coupent suivant une droite Δ, dont le point de rencontre avec D est le point cherché.

On prend généralement comme plan auxiliaire l'un des plans projetant la droite, mais cela n'est pas indispensable.

Nous allons traiter quelques exemples.

104. Exemple I. — *Le plan est déterminé par deux droites qui se coupent* $(oa,\ o'a')$ *et* $(ob,\ o'b')$.

Soient d et d' les projections de la droite ; en prenant comme plan auxiliaire le plan de bout mené par $(d,\ d')$, on obtient la droite $(ab,\ a'b')$ qui coupe $(d,\ d')$ au point cherché $(m,\ m')$.

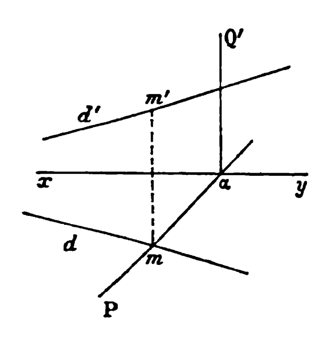


105. Exemple II. — *Le plan est déterminé par ses traces* $P\alpha$ *et* $\alpha Q'$.

Soient d et d' les projections de la droite ; en prenant comme plan auxiliaire le plan vertical mené par $(d,\ d')$, on obtient la droite $(ab,\ a'b')$ qui coupe la droite $(d,\ d')$ au point cherché $(m,\ m')$.

106. Cas particuliers. — 1° *Le plan est vertical ou de bout.*

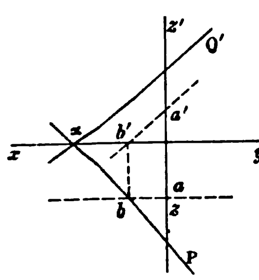
Pour fixer les idées, supposons que le plan soit vertical et soit représenté par ses traces $P\alpha$ et $\alpha Q'$. Soit d'ailleurs (d, d') la droite.



On pourrait évidemment obtenir le point de rencontre de cette droite avec le plan en employant la méthode générale indiquée au nº **102**; mais il est plus commode de remarquer ici que le point cherché se trouvant dans le plan, sa projection horizontale est sur αP; comme elle est d'autre part sur d, elle est à l'intersection m de ces deux droites. On en déduit la projection verticale m' par une ligne de rappel.

Au reste, la méthode générale, quand on emploie comme plan auxiliaire le plan qui projette horizontalement la droite, conduit absolument à la même solution.

2° *La droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection.*



Si la droite est verticale, on prend comme plan auxiliaire le plan de front mené par la droite ; si la droite est de bout, on prend comme plan auxiliaire le plan horizontal mené par la droite. Dans la figure ci-contre, la droite est verticale et le plan est déterminé par ses traces; le point de rencontre est le point (a, a').

Remarquons au surplus que nous avons déjà résolu ce problème quand nous avons déterminé un point d'un plan connaissant l'une des projections de ce point.

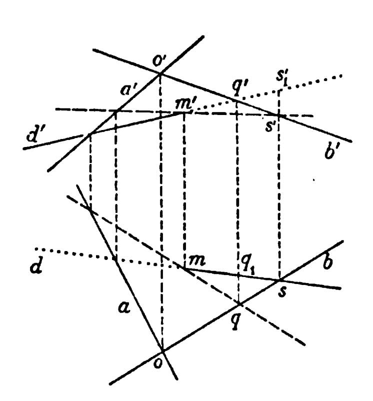
107. Remarque. — Le problème que nous venons de résoudre (*Intersection d'un plan et d'une droite verticale ou de bout*) permet de déterminer la position d'un point par rapport à un plan. Il suffit, pour cela, de construire l'intersection du plan et de la verticale ou de la ligne de bout menée par le point. En comparant la cote ou l'éloignement du point donné à la cote ou à l'éloignement du point obtenu, on pourra reconnaître la position du point par rapport au plan.

Nous allons en donner des applications.

108. Application I. — *Un plan opaque défini par deux droites*

(a, a') et (b, b'), qui se coupent en un point (o, o'), est traversé par une droite indéfinie (d, d'). Établir la ponctuation du système, en supposant les plans de projection transparents.

Puisque les plans de projection sont supposés transparents, il n'y a lieu de s'occuper que de la ponctuation des projections de la droite, en ayant égard seulement au plan donné. D'ailleurs, en projection verticale comme en projection horizontale, les parties vues de la droite seront séparées des parties cachées par le point de rencontre de la droite et du plan. On commence donc par construire les projections *m* et *m'* de ce point. Puis, pour ponctuer la projection horizontale de la droite, on considère un point quelconque, *s*, de cette projection et on cherche le point de rencontre du plan avec la verticale du point *s*. En se servant, pour cela, du plan vertical mené par *d*, on obtient le point (*s*, *s'*) dont la cote est inférieure à celle du point (*s*, s'_1) de la droite ; donc le point (*s*, s'_1) est vu en projection horizontale, et toute la portion *ms* doit être tracée en trait plein ; le reste de la droite *d* doit être tracé en points ronds.



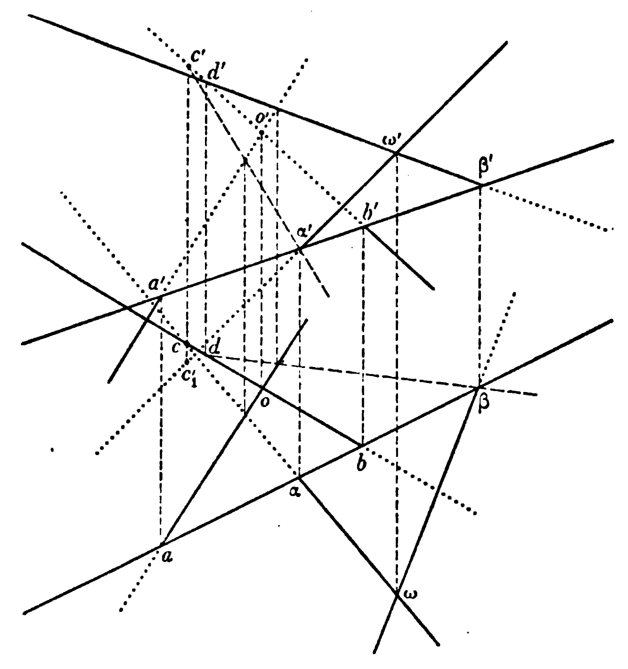
Pour ponctuer, de même, la projection verticale, on prend un point quelconque, *q'*, sur *d'* et l'on cherche le point de rencontre (*q*, *q'*) du plan avec la ligne de bout du point *q'*. On peut se servir, pour cela, du plan qui projette verticalement (*d*, *d'*), et l'on voit que l'éloignement du point (*q*, *q'*) est supérieur à celui du point (q_1, *q'*) de la droite ; donc la portion *m'q'* de *d'* est cachée et le reste est vu.

109. Application II. — *Chacune des faces opaques d'un angle dièdre est définie par deux droites qui se coupent. Ponctuer le système.*

Soient (*oa*, *o'a'*) et (*ob*, *o'b'*) les deux droites qui déterminent la première face, (ωα, ω'α') et (ωβ, ω'β') les deux droites qui déterminent la seconde. Sur chacune des deux faces les parties vues seront séparées des parties cachées par l'arête du dièdre, c'est-à-dire par l'intersection des plans des faces. Cette intersection a été obtenue, dans la figure ci-après, à l'aide du plan de bout mené par ω'β' et du plan

vertical mené par $\omega\alpha$. Le premier de ces deux plans fournit le point (β, β') de l'intersection, et le second fournit le point (α, α'). Ces deux points sont les points d'intersection des droites qui déterminent l'une des faces avec le plan de l'autre face. Les droites qui déterminent celle-ci coupent l'intersection ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) aux points (a, a') et (b, b').

Cela posé, pour faire la ponctuation en projection horizontale, con-



sidérons le point c, intersection de ob et de $\omega\alpha$. La verticale de ce point rencontre l'un des plans en (c, c'), et l'autre plan en (c, c'_1). Le point (c, c') cachant le point (c, c'_1), les portions de droites qui aboutissent au point c, en projection horizontale, seront vues si elles appartiennent au même plan que (c, c'), et seront cachées si elles appartiennent au même plan que (c, c'_1).

D'après cela :

ob est vue à gauche de b, cachée à droite ;
oa est vue à droite de a, cachée à gauche ;
$\omega\beta$ est vue à gauche de β, cachée à droite ;
$\omega\alpha$ est vue à droite de α, cachée à gauche.

On raisonne d'une manière analogue pour faire la ponctuation de

la projection verticale, en se servant de la ligne de bout menée par le point d'.

§ II. — *Problèmes sur la droite et le plan combinés.*

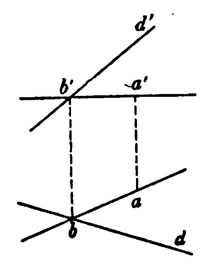
110. Problème I. — ***Reconnaître, sur une épure, si une droite donnée est dans un plan donné.***

Supposons le plan déterminé par deux droites qui se coupent ou sont parallèles. Pour que la droite soit située dans le plan, il faut et il suffit évidemment qu'elle rencontre les deux droites qui déterminent le plan ; ceci donne la solution du problème.

111. Problème II. — ***Mener par un point une droite parallèle à un plan donné et s'appuyant sur une droite donnée.***

Soient A le point, P le plan et D la droite. Par le point A on mène le plan Q parallèle au plan P, on détermine l'intersection du plan Q et de la droite D et l'on joint ce point au point A : la ligne de jonction est la droite demandée. Cela posé :

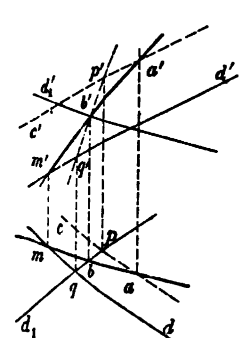
1° *Le plan donné est quelconque.* — Soit PαQ$'$ ce plan, que nous supposerons déterminé par ses traces, et soient (d, d') et (a, a') la droite et le point donnés. Le plan mené par (a, a') parallèlement au plan PαQ$'$ est déterminé par une horizontale $(ah, a'h')$ et par une frontale $(af, a'f')$. Pour avoir l'intersection de ce plan et de la droite (d, d'), nous prenons comme plan auxiliaire le plan de bout mené par (d, d'), ce qui donne la droite $(hf, h'f')$ rencontrant (d, d') au point (b, b'). Les projections de la droite cherchée sont ab et $a'b'$.



2° *Le plan donné est parallèle à l'un des plans de projection.* — La solution est alors immédiate ; car si (d, d') et (a, a') désignent la droite et le point donnés, et si le plan est par exemple horizontal, la droite cherchée est $(ab, a'b')$.

112. Problème III. — *Mener par un point une droite s'appuyant sur deux droites données.*

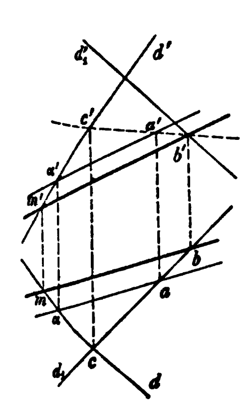
Soient A le point, D la première droite et D_1 la deuxième. Le point A et la droite D déterminent un plan P ; soit B le point d'intersection de ce plan et de la droite D_1 ; la droite AB est la droite cherchée ; en effet elle passe par le point A, elle rencontre D_1 au point B et enfin elle rencontre la droite D puisqu'elle est, comme D, située dans le plan P.



Dans l'épure ci-contre le point A, la droite D et la droite D_1 sont représentés respectivement en (a, a'), (d, d') et (d_1, d_1'). Le plan P est déterminé par la droite (d, d') et par la parallèle $(ac, a'c')$ menée par (a, a') à la droite (d, d'). Le plan auxiliaire à l'aide duquel on détermine l'intersection du plan P et de la droite (d_1, d_1') est le plan vertical qui projette horizontalement cette droite ; il coupe le plan P suivant la droite $(pq, p'q')$, dont l'intersection avec (d_1, d_1') donne le point (b, b'). La droite cherchée est $(ab, a'b')$, et l'on voit, comme vérification, que cette droite rencontre (d, d') au point (m, m').

113. Problème IV. — *Mener une droite de direction donnée et s'appuyant sur deux droites données.*

Soient A la direction donnée, D et D_1 les deux droites données. La droite D et la direction A déterminent un plan P : autrement dit, soit P le plan passant par D et parallèle à A. Ce plan P et la droite D_1 se coupent en un point B et, pour avoir la droite demandée, il suffit de mener par le point B la parallèle à la direction donnée A.

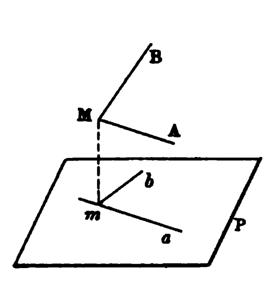


Dans l'épure ci-contre les droites données D et D_1 sont représentées respectivement en (d, d') et en (d_1, d'). La direction donnée, A, pouvant être menée par un point quelconque de l'espace, a été menée par le point (α, α') pris sur (d, d') et elle est représentée en $(\alpha a, \alpha' a')$; de cette façon le plan P est déterminé par les deux droites

(d, d') et $(\alpha a, \alpha' a')$. Le plan auxiliaire à l'aide duquel on détermine l'intersection du plan P et de la droite (d_1, d'_1) est le plan qui projette horizontalement celle-ci ; il coupe le plan P suivant la droite $(ac, a'c')$, qui donne le point (b, b') par son intersection avec (d_1, d'_1). La droite cherchée est la parallèle $(bm, b'm')$ menée par le point (b, b') à la droite $(\alpha a, \alpha' a')$. On voit, comme vérification, que les deux droites $(bm, b'm')$ et (d, d') se coupent au point (m, m').

§ III. — *Droites et plans perpendiculaires.*

114. **Théorème I.** — *Si un angle droit a un côté parallèle à un plan* P, *sa projection orthogonale sur le plan* P *est un angle droit.*



Soit AMB un angle droit ayant un côté MA parallèle au plan P, et soit *amb* la projection de cet angle droit sur le plan P. Si l'on mène la projetante M*m* du point M, cette droite est perpendiculaire à *ma*; or la droite *ma* est parallèle à MA, donc M*m* est aussi perpendiculaire à MA. D'autre part MA est aussi perpendiculaire à MB, puisque l'angle AMB est droit; il en résulte qu'elle est perpendiculaire au plan BM*m*, c'est-à-dire au plan qui projette MB sur le plan P et qui contient, bien entendu, *mb*; mais alors *ma*, qui est parallèle à MA, est aussi perpendiculaire au plan BM*m*; donc elle est perpendiculaire à la droite *mb* qui est dans ce plan; donc enfin l'angle *amb*, projection de AMB, est un angle droit.

115. **Théorème II** (Réciproque du théorème I). — *Si la projection d'un angle droit* AMB *sur un plan* P *est un angle droit, l'un des côtés de l'angle* AMB *est parallèle au plan* P.

Soit un angle droit AMB (fig. précédente) dont la projection *amb* sur le plan P est un angle droit. Supposons que MB ne soit pas parallèle au plan P; nous allons prouver que MA est parallèle à ce plan. Pour cela, nous remarquons que MA peut être considérée comme l'intersection : 1° du plan mené par M perpendiculairement à MB, puisque $\widehat{AMB} = 1$ droit; 2° du plan AM*ma* qui projette MA sur le plan P. Ces deux plans sont perpendiculaires au plan BM*mb* qui projette MB sur le plan P : c'est évident pour le premier; c'est vrai égale-

ment pour le second, car les deux plans AM*ma* et BM*mb* forment un dièdre dont le rectiligne est *amb*, c'est-à-dire est droit. Il suit de là que la droite AM est elle-même perpendiculaire au plan BM*mb* et par suite à M*m* ; mais alors les deux droites MA et *ma*, situées toutes deux dans le plan AM*ma*, sont perpendiculaires à la même droite M*m* et sont parallèles ; il en résulte bien que AM est parallèle au plan P.

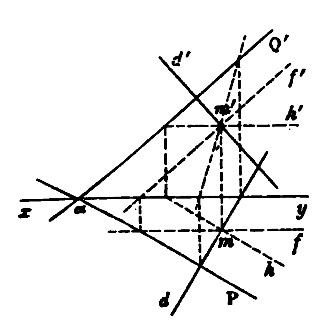
116. Théorème III. — *Lorsqu'un angle* AMB (même figure) *a un côté* AM *parallèle à un plan* P *et se projette sur ce plan suivant un angle droit, il est lui-même droit.*

En effet, si la projection *amb* de l'angle AMB est un angle droit, *ma* est perpendiculaire à la fois sur la projetante M*m* du point M et sur *mb* ; donc elle est perpendiculaire au plan BM*mb*. Mais MA étant parallèle à *ma*, la droite MA est aussi perpendiculaire au plan BM*mb*; il résulte bien de là que l'angle AMB est droit.

117. Remarque. — Ces trois théorèmes donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que la projection d'un angle droit sur un plan soit un angle droit.

118. Théorème IV. — *Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit que ses projections soient perpendiculaires aux traces de même nom du plan.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soit, en effet, (d, d') une droite perpendiculaire au plan PαQ′ et rencontrant ce plan en un point (m, m'). Considérons l'horizontale (h, h') du plan menée par le point (m, m') : elle forme avec (d, d') un angle droit dont un côté est parallèle au plan horizontal, et, d'après ce qui précède, la projection horizontale de cet angle droit est un angle droit. Il en résulte que d est perpendiculaire sur h et par suite sur αP. En considérant la frontale (f, f') qui passe par le point (m, m'), on verrait de même que d' est perpendiculaire sur f' et par suite sur αQ′.



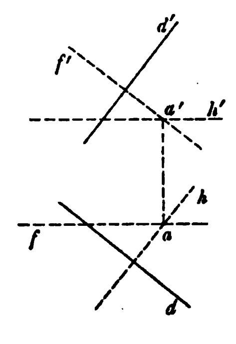
2° *La condition est suffisante.* — Soit, en effet, (d, d') une droite dont les projections sont perpendiculaires aux traces de même nom du plan $P\alpha Q'$, et qui rencontre ce plan en un point (m, m'). Traçons l'horizontale (h, h') et la frontale (f, f') situées dans le plan $P\alpha Q'$ et passant par le point (m, m'). La droite (d, d') et l'horizontale (h, h') forment un angle dont un côté (h, h') est parallèle au plan horizontal ; de plus, par hypothèse, la projection horizontale de cet angle est un angle droit, puisque d étant perpendiculaire à αP est aussi perpendiculaire à h ; il en résulte (th. III) que l'angle lui-même est droit, c'est-à-dire que (d, d') est perpendiculaire à (h, h'). On verrait de même que (d, d') est perpendiculaire à (f, f') ; mais alors (d, d') est perpendiculaire à deux droites du plan $P\alpha Q'$ et, par suite, elle est perpendiculaire au plan.

119. Problème I. — *Mener par un point une droite perpendiculaire à un plan.*

La solution de ce problème est une conséquence du théorème IV : il suffit de mener par les projections du point les perpendiculaires aux traces de même nom du plan. On obtient ainsi les projections de même nom de la perpendiculaire.

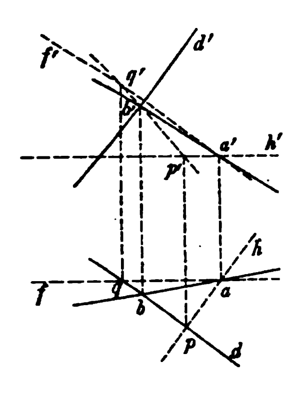
Il importe de remarquer qu'il est inutile d'avoir les traces mêmes du plan pour résoudre ce problème : il suffit d'en avoir les directions et, par suite, il suffit d'avoir une horizontale et une frontale de ce plan.

120. Problème II. — *Mener par un point un plan perpendiculaire à une droite donnée.*



La solution de ce problème est aussi une conséquence du théorème IV. Soient en effet (a, a') et (d, d') le point et la droite donnés. Menons par le point (a, a') l'horizontale (h, h') et la frontale (f, f') telles que h soit perpendiculaire à d et f' perpendiculaire à d' ; ces deux droites déterminent un plan dont la trace horizontale est perpendiculaire à d et dont la trace verticale est perpendiculaire à d'. De plus ce plan passe par le point (a, a') ; il est donc le plan cherché.

121. Problème III. — *Mener par un point (a, a′) une droite perpendiculaire à une droite donnée (d, d′).*



La solution du problème est la suivante : Par le point donné A on mène le plan P perpendiculaire à la droite D et l'on détermine l'intersection, B, de la droite et du plan ; la perpendiculaire demandée est la ligne de jonction des deux points A et B.

Dans la figure ci-contre, le plan P est déterminé par une horizontale (*h*, *h*′) et par une frontale (*f*, *f*′). Le plan auxiliaire à l'aide duquel on détermine l'intersection de la droite (*d*, *d*′) et du plan P est le plan vertical mené par (*d*, *d*′) ; il coupe le plan P suivant la droite (*pq*, *p*′*q*′), dont l'intersection avec (*d*, *d*′) donne le point (*b*, *b*′). Les projections de la perpendiculaire cherchée sont *ab* et *a*′*b*′.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

1. Construire l'intersection d'une droite et d'un plan dont les traces sont parallèles à la ligne de terre.

2. Construire l'intersection d'une droite D et du plan parallèle à la ligne de terre mené par une autre droite Δ.

3. Intersection d'une droite et d'un plan passant par la ligne de terre et par un point donné.

4. Intersection d'une droite située dans le deuxième plan bissecteur et d'un plan dont les traces sont confondues

5. Ponctuer le système défini par un plan donné par ses traces, par une droite et par les plans de projection, le plan donné et les plans de projection étant supposés opaques.

6. Un triangle dont on donne les projections des sommets est éclairé au

soleil. On connaît la direction des rayons lumineux, ainsi que le sens de propagation de la lumière, et l'on demande quelle est la face du triangle qui est éclairée.

7. On donne quatre points A, B, C, E, non situés dans le même plan. Les points A, C, E sont dans le dièdre (1), et le point B est dans le dièdre (2). On construit deux parallélogrammes, l'un sur AB et BC, l'autre sur AB et BE, et l'on demande de représenter le système formé par ces deux parallélogrammes et les plans de projection supposés opaques, ainsi que les plans des parallélogrammes.

8. Par un point donné, mener une droite rencontrant la ligne de terre et une autre droite donnée quelconque.

9. Même question en remplaçant la droite quelconque ou par une horizontale, ou par une frontale, ou par une droite de profil.

10. Résoudre les mêmes problèmes en supposant que le point donné soit à l'infini dans une direction donnée.

11. Mener une droite passant par un point donné et s'appuyant sur deux droites de profil.

12. Mener une droite parallèle à une direction donnée et s'appuyant sur deux droites de profil.

13. Mener par un point donné la perpendiculaire à un plan vertical ou de bout.

14. Mener par un point donné un plan perpendiculaire à un plan donné.

15. Mener par un point donné la perpendiculaire à un plan parallèle à la ligne de terre, en considérant cette perpendiculaire comme l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan donné.

16. Même question en supposant que le plan donné passe par la ligne de terre.

17. Mener par un point la perpendiculaire à un plan de profil.

18. Par un point donné, mener le plan perpendiculaire à une horizontale ou à une frontale.

19. Par une droite donnée, mener le plan perpendiculaire à un plan donné, et déterminer l'intersection des deux plans.

20. Même question en supposant le plan donné perpendiculaire à l'un des plans de projection.

21. Même question en supposant que les traces du plan donné soient en ligne droite.

CHAPITRE V

LES MÉTHODES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

---

§ I. — *Changement de l'un des plans de projection.*

122. Objet de la méthode. — Le degré de simplicité de la solution d'un problème de Géométrie descriptive dépend souvent de la position des données par rapport aux plans de projection. La méthode des changements de plans de projection fournit le moyen d'amener les plans de projection à occuper, par rapport à une figure donnée, la position qui se prête le mieux à la résolution des problèmes concernant cette figure.

Nous allons donc nous proposer de résoudre le problème suivant :

Étant données les projections d'une figure sur deux plans rectangulaires, construire ses projections sur deux nouveaux plans rectangulaires, définis de position par rapport aux anciens.

Nous nous bornerons, toutefois, à examiner le cas où, parmi les nouveaux plans, se trouve l'un des deux plans de projection donnés. On aura alors à résoudre les deux problèmes suivants :

1° *On prend un nouveau plan vertical et l'on propose de trouver les nouvelles projections de la figure :* On dit alors qu'*on change de plan vertical.*

2° *On prend comme plan horizontal un plan de bout quelconque et l'on propose de trouver les nouvelles projections de la figure :* On dit alors qu'*on change de plan horizontal.*

Il suffit évidemment de résoudre ces divers problèmes pour un point ; nous les résoudrons néanmoins aussi pour une droite et pour un plan. Les remarques suivantes en facilitent la résolution.

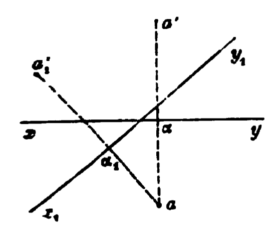
123. Remarques préliminaires. — 1° Si l'on change de plan verti-

cal, la projection horizontale et la cote de tout point de la figure restent invariables.

2° Si l'on change de plan horizontal, la projection verticale et l'éloignement de tout point de la figure demeurent invariables.

124. Problème I. — *Connaissant les projections d'un point, construire ses nouvelles projections quand on change de plan vertical.*

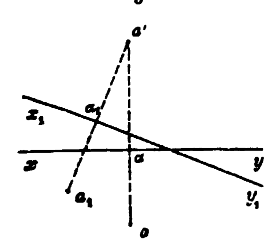
Soit (a, a') le point dans le système de projection défini par la ligne de terre xy. Supposons que l'on conserve le plan horizontal de projection et que l'on prenne comme nouveau plan vertical de projection un plan vertical quelconque ; la trace horizontale x_1y_1 de ce plan sera la nouvelle ligne de terre, et l'ordre des lettres x_1 et y_1 indiquera, par convention, le sens dans lequel on a fait tourner le plan vertical pour le rabattre sur le plan horizontal (35).



Cela posé, la projection horizontale du point ne changeant pas, la projection verticale se trouve sur la perpendiculaire à x_1y_1 menée par a ; d'autre part, la cote au-dessus ou au-dessous du plan horizontal ne changeant pas non plus, en portant $\alpha_1a'_1 = \alpha a'$ on aura en a'_1 la nouvelle projection verticale du point. Il faut d'ailleurs remarquer que a' étant au-dessus de xy, a'_1 doit être au-dessus de x_1y_1.

125. Problème II. — *Connaissant les projections d'un point, construire ses projections quand on change de plan horizontal.*

Soit (a, a') le point dans le système de projection défini par la ligne de terre xy. On conserve le plan vertical de projection et l'on prend comme plan horizontal un plan de bout quelconque ; il s'agit de trouver les nouvelles projections du point. Soit, pour cela, x_1y_1 la trace verticale du plan de bout que l'on prend comme plan horizontal de projection ; x_1y_1 est la nouvelle ligne de terre. La projection verticale et l'éloignement du point ne changent pas, puisque le plan vertical est conservé ; pour avoir la projection horizontale on remarque alors qu'elle doit se trouver sur la ligne de rappel du point a', en un point a_1 tel que $\alpha_1a_1 = \alpha a$, et situé au-dessous de x_1y_1 puisque le point a est au-dessous de xy.



126. Problème III. — *Changer l'un des plans de projection pour une droite.*

C'est une manière abrégée d'énoncer le problème suivant :

Connaissant les projections d'une droite, construire ses nouvelles projections quand on change l'un des plans de projection.

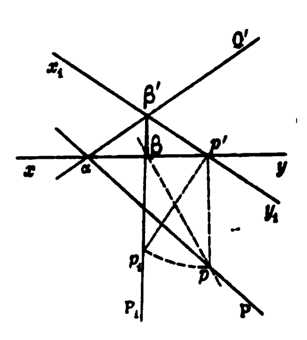
Ce problème est une conséquence de l'un des deux premiers; il suffit en effet de faire les constructions pour deux points de la droite. Pour fixer les idées, supposons que l'on change de plan vertical ; il y a alors avantage à choisir la trace horizontale parmi les deux points et quand cela est possible, car la cote de ce point est nulle. Si l'on voulait la trace verticale nouvelle de la droite, il suffirait de construire la nouvelle projection verticale de l'intersection de la droite avec le plan vertical qui a été pris comme nouveau plan de projection.

On arrive à des conclusions analogues si, au lieu de changer de plan vertical, on change de plan horizontal.

127. Problème IV.—*Changer l'un des plans de projection pour un plan.*

On résout le problème soit pour trois points, soit pour une droite et un point, soit pour deux droites qui se coupent.

Supposons, par exemple, le plan déterminé par ses traces, et changeons de plan horizontal. Soit PαQ' le plan donné, représenté dans le système primitif xy, et soit x_1y_1 la nouvelle ligne de terre, c'est-à-dire l'intersection du plan vertical et du plan de bout que l'on prend comme nouveau plan horizontal. Le plan vertical ne changeant pas, la trace verticale du plan donné ne change pas non plus ; il suffit donc de construire sa nouvelle trace horizontale. On connait d'ailleurs un point de cette trace horizontale, le point β', et il suffit d'en avoir un second; pour cela on cherche dans le système xy l'intersection du plan de bout x_1y_1 et d'une droite quelconque du plan PαQ' ; puis on construit la nouvelle projection horizontale de ce point. Ou bien encore, on cherche dans le système xy les projections de l'intersection du plan PαQ' et du plan de bout x_1y_1 ; puis on construit la nouvelle projection horizontale de cette droite et on a la trace horizontale demandée. Dans la figure ci-dessus la nouvelle trace horizontale est la droite $P_1\beta'$.



On aurait à effectuer des constructions analogues si l'on changeait de plan vertical.

128. Application I. — *Rendre une droite horizontale ou de front.*

Pour rendre une droite horizontale, on change de plan horizontal, et l'on prend comme nouveau plan horizontal un plan parallèle à celui qui projette verticalement la droite : la nouvelle ligne de terre est parallèle à la projection verticale de la droite.

Pour rendre une droite de front, on prend comme nouveau plan vertical un plan parallèle à celui qui projette horizontalement la droite : la nouvelle ligne de terre est parallèle à la projection horizontale de la droite.

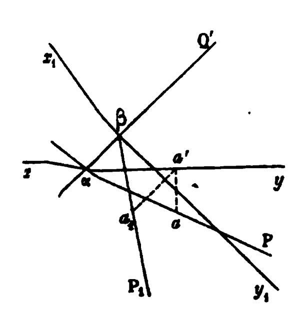
129. Application II. — *Rendre une droite verticale ou de bout.*

Soit d'abord à rendre une droite verticale; pour cela, on commence par la rendre de front par un changement de plan vertical ; cela fait, on change de plan horizontal et l'on prend comme nouveau plan horizontal un plan quelconque perpendiculaire à la droite : la nouvelle ligne de terre sera perpendiculaire à la projection verticale de la droite dans le second système, c'est-à-dire dans le système par rapport auquel la droite est de front.

On voit de même que pour rendre une droite de bout, il faut exécuter deux changements de plan successifs : un changement de plan horizontal pour rendre la droite horizontale, puis ensuite, un changement de plan vertical pour achever le problème.

130. Application III. — *Un plan étant donné, le rendre vertical ou de bout.*

1° Soit d'abord à rendre vertical le plan $P\alpha Q'$. On prend comme nouveau plan horizontal un plan de bout dont la trace verticale x_1y_1 soit perpendiculaire à $\alpha Q'$; x_1y_1 est la nouvelle ligne de terre et, pour avoir la nouvelle trace horizontale du plan, il suffit de chercher la nouvelle projection horizontale d'un point quelconque du plan et de la joindre au point β ; *car la trace horizontale d'un plan vertical est le lieu des projections horizontales de tous les points du plan.*



Dans l'épure ci-contre on a fait la construction pour le point (a, a').

2° Pour rendre un plan de bout, on fait un changement de plan vertical et l'on prend, comme nouveau plan vertical, un plan vertical quelconque dont la trace horizontale soit perpendiculaire à la trace horizontale du plan donné ; on a du reste ainsi la nouvelle ligne de terre et l'on détermine la nouvelle trace verticale du plan en observant qu'*elle est le lieu des projections verticales nouvelles de tous les points du plan.*

131. **Application IV.** — *Un plan étant donné, le rendre horizontal ou de front.*

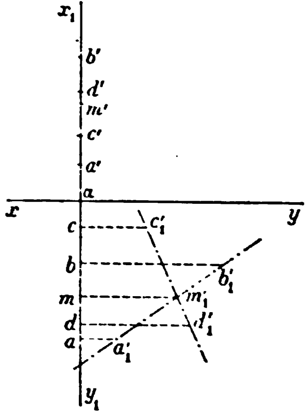
1° Pour rendre un plan horizontal, on commence par le rendre de bout, ce qui exige le changement du plan vertical ; après cela on le rend horizontal en prenant comme nouveau plan horizontal, soit le plan lui-même, soit un plan parallèle.

2° On opère d'une manière analogue pour rendre un plan de front ; on commence par un changement de plan horizontal et l'on termine par un changement de plan vertical.

132. **Remarque.** — Les changements de plans sont très commodes pour déterminer une figure dans un plan de profil et en particulier pour déterminer le point de rencontre de deux droites situées dans le même plan de profil : il suffit de prendre ce plan, soit comme nouveau plan horizontal, soit comme nouveau plan vertical de projection.

Nous allons donner des exemples.

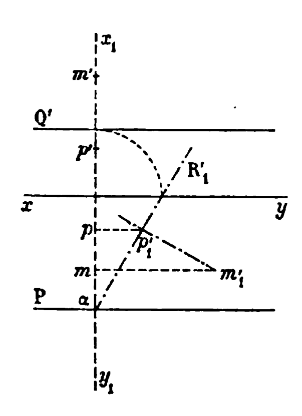
133. **Exemple I.** — *Trouver le point de rencontre de deux droites situées dans le même plan de profil.*



Soient $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$ les deux droites données. Prenons le plan de profil qui les contient comme nouveau plan vertical, et soit par suite x_1y_1 la nouvelle ligne de terre. Les nouvelles projections verticales des deux droites sont $a'_1b'_1$ et $c'_1d'_1$: elles se coupent en un point m'_1 qui est la nouvelle projection verticale du point de rencontre des deux droites. On en déduit la projection horizontale m en menant par m'_1 la perpendiculaire à x_1y_1, et la projection verticale m' en prenant $\alpha m' = mm'_1$.

134. Exemple II. — *Mener par un point donné la perpendiculaire à un plan parallèle à la ligne de terre.*

Supposons le plan déterminé par ses traces P et Q', et soit (m, m') le point donné. La perpendiculaire au plan donné, menée par le point (m, m'), est évidemment contenue dans le plan de profil qui passe par ce point. Prenons alors ce plan de profil comme nouveau plan vertical, et soit par suite x_1y_1 la nouvelle ligne de terre. La nouvelle trace verticale du plan (P, Q') est $\alpha R'_1$; la nouvelle projection verticale du point est m'_1. La nouvelle projection verticale de la perpendiculaire est donc $m'_1p'_1$ perpendiculaire à $\alpha R'_1$. En déterminant alors la projection verticale p' du point (p, p'_1), dans le système (xy), on aura en $(mp, m'p')$ la perpendiculaire demandée.



Il est bon d'observer que $m'_1p'_1$ est la longueur de cette perpendiculaire.

§ II. — *Rotations.*

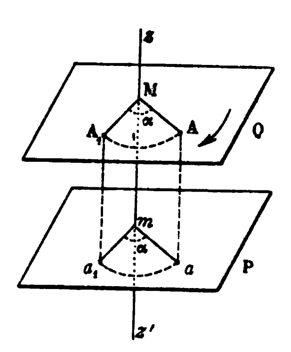
135. Objet de la méthode des rotations. — Comme la méthode des changements de plans de projection, la méthode des rotations a pour objet d'amener une figure à occuper, par rapport aux plans de projection, la position qui se prête le mieux à la résolution des problèmes concernant cette figure.

Elle consiste à faire tourner la figure d'un angle donné et dans un sens convenu, autour d'un axe perpendiculaire à l'un ou à l'autre des deux plans de projection, et à déterminer les projections de cette figure après la rotation, connaissant ses projections avant la rotation. Si d'ailleurs une seule rotation ne suffit pas, on en effectue deux successives : l'une autour d'un axe vertical et l'autre autour d'un axe de bout.

Il y a une différence essentielle entre la méthode des changements de plan et la méthode des rotations ; car, tandis que dans la méthode des rotations on *déplace* la figure pour l'amener à occuper la position

voulue par rapport aux plans de projection, dans la méthode des changements de plans on change les plans de projection afin que la figure, *qui n'a pas bougé*, occupe la position voulue par rapport à ces plans.

136. **Remarques préliminaires.** — Une figure étant un ensemble de points, on saura résoudre le problème des rotations pour une figure si on sait le résoudre pour un point ; nous le résoudrons néanmoins pour le point, pour la droite et pour le plan. Nous nous servirons pour cela des remarques suivantes :



1° Si une figure F est dans un plan parallèle à un plan P, sa projection f sur le plan P est une figure égale à F ;

2° Soient A un point et Q le plan mené par ce point perpendiculaire à un axe zz' et coupant cet axe au point M. Si l'on fait tourner le point A d'un angle α, dans un sens convenu, autour de zz', la position A_1 du point, après la rotation, s'obtient en construisant dans le plan Q, et dans le sens convenu, l'angle $AMA_1 = \alpha$ et en prenant $MA_1 = MA$.

3° Soient P un plan quelconque perpendiculaire à l'axe et a la projection du point A sur le plan P. En vertu de 1°, la projection sur le plan P de la figure AMA_1 est une figure égale ; il en résulte que la projection sur le même plan, du point A après la rotation, s'obtiendra en construisant dans le plan P, et dans le sens convenu, l'angle $ama_1 = AMA_1 = \alpha$, et en portant $ma_1 = ma$.

137. **Problème I.** — *Faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe vertical ou de bout.*

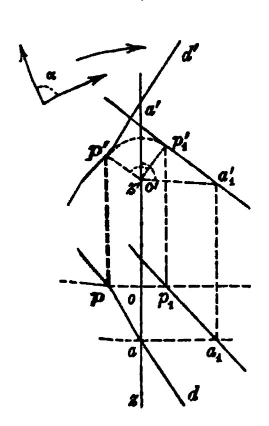
Soit par exemple un axe vertical $(oz, o'z')$ et proposons-nous de faire tourner le point (a, a') d'un angle donné α autour de cet axe. Marquons par une flèche le sens de la rotation et observons que la projection horizontale du point, après la rotation, s'obtient en appliquant la troisième remarque du numéro précédent ; soit a_1 le point ainsi obtenu. Pour avoir la projection verticale, on remarque que la cote du point n'a pas changé ; par conséquent la projection verticale se

trouve sur la perpendiculaire à zz' menée par a'; elle se trouve aussi sur la ligne de rappel menée par a_1, donc elle est à l'intersection de ces deux lignes. Les projections du point après la rotation sont donc a_1 et a'_1.

On raisonnerait d'une manière tout à fait analogue si l'axe, au lieu d'être vertical, était de bout. Il faut seulement observer que ce qui demeure constant dans ce cas c'est, non pas la cote, mais l'éloignement du point.

138. **Problème II.** — *Faire tourner une droite d'un angle donné autour d'un axe vertical ou de bout.*

Soit par exemple à faire tourner une droite (d, d') autour de l'axe de bout $(oz, o'z')$. Appelons encore α l'angle de rotation et marquons par une flèche le sens du mouvement du point. Cela posé, pour résoudre le problème, il suffit évidemment de faire tourner deux points de la droite. Parmi ces points il y a avantage à choisir le pied de la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite; comme second point on prend un point quelconque.



Pour avoir la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite, on en cherche d'abord la projection verticale (il faudrait chercher d'abord la projection horizontale si l'axe, au lieu d'être de bout, était vertical). Cette projection verticale passe évidemment par le point o', projection verticale de tous les points de l'axe; de plus, la perpendiculaire commune étant de front, elle forme avec la droite un angle droit qui se projette verticalement suivant un angle droit. Il suit de là que la projection verticale de la perpendiculaire commune est la perpendiculaire à d' menée par o'; elle coupe d' en un point p' qui est la projection verticale du pied de la perpendiculaire commune sur (d, d'); on en déduit la projection horizontale p et, finalement, la projection horizontale op de la perpendiculaire commune, projection horizontale qui est évidemment perpendiculaire à zz'.

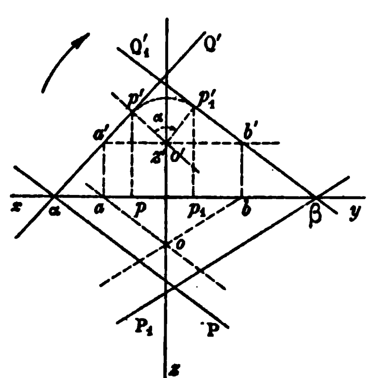
Cela posé, l'avantage du choix du point (p, p') résulte de ce que la perpendiculaire commune forme avec (d, d') un angle droit qui reste

toujours droit pendant la rotation, et qui se projette toujours verticalement suivant un angle droit ; de sorte que si (p_1, p'_1) est la nouvelle position du point (p, p') après la rotation, la projection verticale de la droite, dans sa nouvelle position, s'obtient en menant par p'_1 la perpendiculaire, $p'_1a'_1$, à $o'p'_1$. Pour obtenir la projection horizontale, nous ferons tourner le point (a, a') en remarquant que le point a_1, nouvelle projection verticale du point, se trouve à l'intersection de $p'_1a'_1$ et de la droite $o'a'_1$ menée de telle sorte que l'angle $a'z'a'_1$ soit égal à α et de même sens que lui ; les nouvelles projections de la droite sont donc a_1p_1 et $a'_1p'_1$.

On aurait, bien entendu, des constructions analogues si, au lieu d'un axe de bout, on avait un axe vertical.

139. Problème III. — *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe vertical ou de bout.*

La méthode employée consiste à faire tourner un point et une droite. Toutefois, si l'on observe que le point de rencontre de l'axe et du plan reste fixe, il suffit de faire tourner une droite. On choisit une horizontale du plan si l'axe est vertical (de préférence la trace horizontale quand cela est possible), et une frontale si l'axe est de bout (de préférence la trace verticale quand cela est possible). Dans tous les cas il faut commencer par déterminer le point de rencontre de l'axe et du plan.



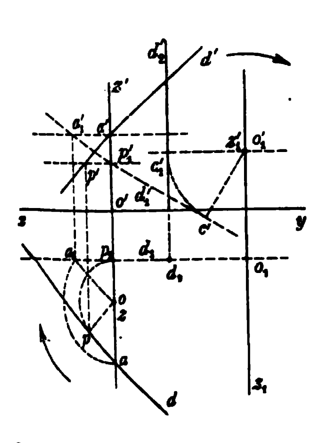
Dans l'épure ci-contre, l'axe est de bout et le plan est défini par ses traces $P\alpha$ et $\alpha Q'$. Pour avoir le point de rencontre de l'axe et du plan on a coupé le plan par le plan horizontal $a'o'$ qui contient l'axe ; on a ainsi le point (o, o'). Pour faire tourner la trace verticale on a fait tourner le point (p, p') et l'on a mené $\beta Q'_1$ perpendiculaire à $o'p'_1$; enfin, pour avoir la trace horizontale, on a construit l'horizontale du plan, dans sa nouvelle position, passant par (o, o') ; cette droite est déterminée par sa projection verticale $o'b'$, par sa trace verticale (b, b') et par le point (o, o'), ce qui permet de tracer sa projection horizontale ob ; les nouvelles traces du plan sont donc $P_1\beta$ et $\beta Q'_1$.

140. Application I. — *Une droite étant donnée par ses projections, l'amener à être de front.*

Il suffit de la faire tourner autour d'un axe *vertical* jusqu'à ce que sa projection horizontale soit parallèle à la ligne de terre.

141. Remarque. — Si on voulait rendre la droite horizontale, il faudrait la faire tourner autour d'un axe *de bout* jusqu'à ce que sa projection verticale soit parallèle à la ligne de terre.

142. Application II. — *Rendre une droite verticale.*



On commence par la rendre de front (140); puis on la fait tourner autour d'un axe de bout jusqu'à ce que sa projection verticale soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Dans l'épure ci-contre la droite est représentée en (d, d'). On l'a fait tourner d'abord autour de l'axe vertical $(oz, o'z')$ pour l'amener à être de front en (d_1, d'_1), puis on a fait tourner (d_1, d'_1) autour de l'axe de bout $(o_1z_1, o'_1z'_1)$ pour l'amener à être verticale : elle est alors projetée en d_2 et en d'_2 (d_2 est un point). Les deux flèches indiquent les sens des deux rotations.

143. Remarque. — Pour rendre une droite de bout, on commence par la rendre horizontale; puis on la fait tourner autour d'un axe vertical, jusqu'à ce que sa projection horizontale soit perpendiculaire à la ligne de terre.

144. Application III. — *Un plan étant donné, le rendre vertical.*

On le fait tourner autour d'un axe de bout jusqu'à ce que sa trace verticale devienne perpendiculaire à la ligne de terre.

145. Remarque. — Pour rendre un plan de bout, on le fait tourner autour d'un axe vertical jusqu'à ce que sa trace horizontale devienne perpendiculaire à la ligne de terre.

146. Application IV. — *Un plan étant donné, le rendre horizontal ou de front.*

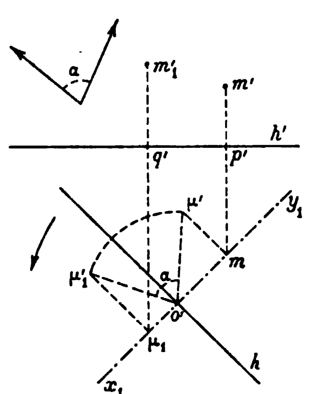
Pour rendre un plan horizontal, on le rend d'abord de bout (145), puis on le fait tourner autour d'un axe de bout jusqu'à ce que sa nouvelle trace verticale soit parallèle à la ligne de terre.

Pour rendre un plan de front, on commence par le rendre vertical (144), puis on le fait tourner autour d'un axe vertical jusqu'à ce que sa nouvelle trace horizontale soit parallèle à la ligne de terre.

147. Remarque. — Pour faire tourner une figure, on fait tourner les points, les droites et les plans de la figure.

148. **Problème IV.** — *Faire tourner une figure d'un angle donné autour d'un axe horizontal.*

Il suffit évidemment de résoudre le problème pour un point de la figure.



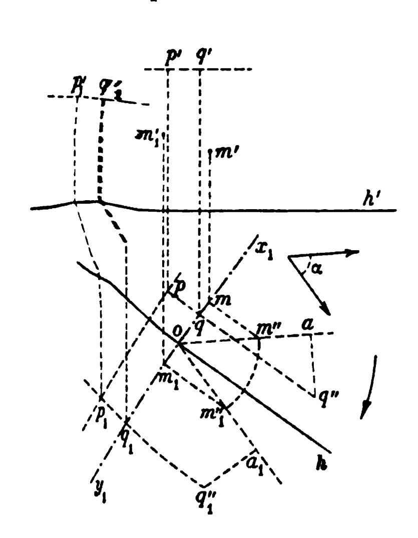
Soit donc à faire tourner un point (m, m') autour de l'axe horizontal (h, h'). Pour cela, prenons comme plan horizontal celui qui passe par (h, h') et comme plan vertical un plan quelconque perpendiculaire à l'axe : il y a avantage à faire passer ce plan par le point (m, m'), et à prendre, par suite, comme ligne de terre la perpendiculaire x_1y_1 menée à h par le point m.

Dans le système de projections ainsi défini, la projection verticale de l'axe se réduit à un point o', puisque l'axe est perpendiculaire au plan vertical. D'ailleurs, à cause de cela, le problème est ramené à un autre déjà résolu (137). Pour en achever la résolution, observons que la projection verticale du point (m, m'), dans le système x_1y_1, est μ'. Si donc on fait tourner le point de l'angle α, dans le sens indiqué par la flèche, on obtient en μ_1 et en μ'_1 les projections du point dans le système x_1y_1 et après la rotation. On en déduit les projections μ_1 et m'_1 dans le système primitif, en observant que la cote de m'_1 par rapport à h' est la même, en grandeur et en signe, que celle de μ'_1 par rapport à x_1y_1.

D'après cela, on peut énoncer la règle suivante pour déterminer les nouvelles projections du point (m, m') :

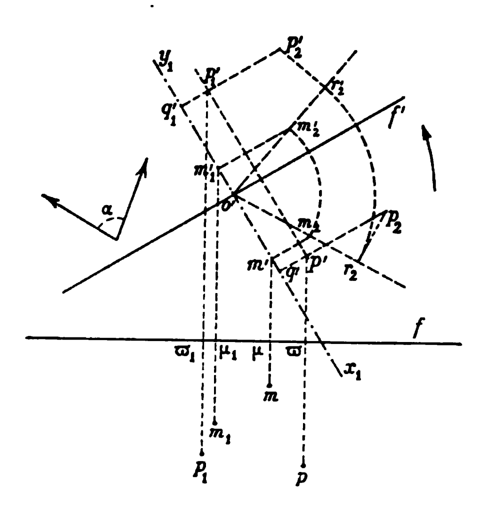
Par le point m on mène la perpendiculaire x_1y_1 *et la parallèle* $m\mu$ *à la projection horizontale de l'axe ; on porte* $m\mu'$ *égale à la distance du point* m' *à la projection verticale de l'axe, et l'on fait tourner le point* μ'*, de l'angle* α*, autour du point* o'*, pied de la perpendiculaire menée du point m sur h. On obtient ainsi le point* μ'_1*, duquel on déduit le point* μ_1 *par une parallèle à h. On mène enfin la ligne de rappel du point* μ_1 *et, à partir du point de rencontre,* q'*, de cette ligne avec* h' *on porte* $q'm'_1 = \mu_1\mu'_1$*, dans le même sens que* $p'm'$ *si* μ' *et* μ'_1 *sont du même côté de* x_1y_1*, dans le sens opposé si* μ' *et* μ'_1 *sont de part et d'autre de* x_1y_1*.* On a ainsi les projections μ_1 et m'_1 demandées.

149. Remarque. — Quand on a ainsi fait tourner un point d'une figure, on peut, dans une certaine mesure, utiliser les constructions pour faire tourner un autre point quelconque de cette figure. Supposons en effet que l'on ait fait tourner le point (m, m'), et proposons-nous de faire tourner le point (p, p'). Pour cela, menons par (p, p') la parallèle $(pq, p'q')$ à l'axe de rotation. Cette droite tourne de l'angle α autour de l'axe, et pour obtenir ses projections après la rotation, il suffit de faire tourner son point de rencontre (q, q') avec le plan vertical x_1y_1 et de mener la parallèle à l'axe par la nouvelle position de ce point. Faisons donc tourner le point (q, q'). A cet effet, construisons le point q'' déduit de q comme m'' a été déduit de m, et menons $q''a$ perpendiculaire à om''. La figure oaq'' demeure invariable ; par conséquent, si nous faisons tourner cette figure de l'angle α, dans le sens de la flèche, pour l'amener en $oa_1q''_1$, en menant par q''_1 la parallèle à h nous aurons la projection horizontale q_1 du point (q, q'), après la rotation. Nous en déduirons la projection verticale q'_1 à l'aide d'une ligne de rappel et en nous rappelant que $q_1q''_1$ est égale à la distance du point q'_1 à h'. Il en



résulte que les projections de $(pq, p'q')$, après la rotation, seront les parallèles à h et à h' menées respectivement par les points q_1 et q'_1. C'est sur cette parallèle que se trouvent les nouvelles projections du point (p, p'). Comme la projection horizontale se trouve aussi sur la perpendiculaire à h menée par p, elle est déterminée par l'intersection de cette perpendiculaire et de $q_1q''_1$; on a ainsi le point p_1, et l'on en déduit le point p'_1 par une ligne de rappel.

150. Problème V. — *Faire tourner une figure d'un angle donné autour d'un axe de front.*



Le raisonnement est le même que dans le problème précédent. On fait d'abord tourner un point (m, m'). Pour cela, on construit le point m_2 situé sur la parallèle à la projection verticale f' de l'axe (f, f'), et tel que $m'm_2 = m\mu$. On fait tourner ensuite m_2 autour du point o' de l'angle donné α, dans le sens convenu, indiqué par une flèche, et l'on obtient ainsi successivement m'_2 et m'_1 ; on en déduit m_1 par une ligne de rappel et en observant que $\mu_1m_1 = m'_1m'_2$. On observe d'ailleurs aussi que m_1 est, par rapport à f, du même côté que m ou du côté opposé, suivant que m_2 et m'_2 sont du du même côté de x_1y_1 ou du côté opposé.

Pour faire tourner, ensuite, un point quelconque (p, p'), on construit le point p_2 tel que $q'p_2 = \varpi p$, on mène p_2r_2 perpendiculaire à $o'm_2$ et l'on fait tourner la figure $o'r_2p_2$ de l'angle α et dans le sens de la flèche autour du point o', de manière à l'amener en $o'r'_2p'_2$. Cela fait, on a p'_1 par l'intersection d'une parallèle $p'p'_1$ à x_1y_1 et d'une perpendiculaire $p'_2p'_1$ à cette ligne. On en déduit p_1 en observant que $q'_1p'_2 = \varpi_1p_1$. Le sens dans lequel on doit placer ϖ_1p_1 par rapport à f se détermine comme pour le point (m_1, m'_1).

151. Application V. — *Construire les projections d'un cube dont une diagonale est verticale et dont une arête aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale est de front.*

On a immédiatement les projections du cube si l'on suppose qu'il repose sur le plan horizontal. Supposons alors, non seulement que le cube repose sur le plan horizontal, mais encore que le plan qui passe par la diagonale et par l'arête qui doit être de front soit parallèle au plan vertical. Soient

$$a_1b_1cd_1e_1f_1g_1h_1$$

et $$a'_1b'_1c'd'_1e'_1f'_1g'_1h'_1$$

les projections du cube dans cette position. Soient aussi $(ce_1, c'e'_1)$ et $(a_1e_1, a'_1e'_1)$ la diagonale qu'il s'agit de rendre verticale, et l'arête qui doit être de front.

Comme ces deux droites sont déjà de front, pour résoudre le problème proposé il suffira de faire tourner le cube, autour d'un axe de bout, jusqu'à ce que $c'e_1'$ soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Dans la figure ci-dessus, on a fait tourner autour de l'axe de bout qui passe par le point c', jusqu'à ce que $c'e'_1$ soit venue en $c'e'$. La section faite dans le cube par le plan de front mené par a_1c et qui est projetée verticalement suivant le rectangle $a'_1c'g'_1e'_1$ avant la rotation, se projette verticalement suivant le rectangle égal $a'c'g'e'$, après la rotation. En faisant tourner du même angle tous les sommets du cube, on a finalement les deux projections demandées $abcdefgh$, $a'b'c'd'e'f'g'h'$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que le polygone *abfghd* est un hexagone régulier et, pour la ponctuation, nous nous bornerons à observer : 1° que toutes les lignes doivent être tracées en traits pleins en projection verticale ; 2° que les seules arêtes cachées en projection horizontale sont celles qui aboutissent au point (c, c').

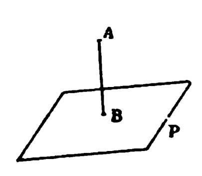
152. Remarque. — La méthode des rotations conduit généralement

à des constructions moins simples que celle des changements de plans, parce que, pour effectuer une rotation, il faut construire deux nouvelles projections de la figure, alors qu'il n'en faut qu'une nouvelle pour un changement de plan. Il y aura donc tout avantage, en général, à employer les changements de plans plutôt que les rotations.

Rien ne s'oppose, du reste, à ce qu'on emploie alternativement les changements de plans et les rotations si l'on aperçoit quelque avantage à opérer ainsi.

§ III. — *Méthode des rabattements.*

153. **Définitions.** — Soit AB la perpendiculaire abaissée d'un point A sur un plan P. Lorsque le plan P se déplace d'après une loi quelconque, on dit que le point A *est invariablement lié au plan* P si le point B reste fixe dans le plan et si la longueur AB demeure constante. On dit qu'une figure est *invariablement liée à un plan* quand tous les points de la figure sont invariablement liés à ce plan; le cas le plus simple est celui où la figure est dans le plan.



154. **Enoncé du problème des rabattements.** — Supposons connues les projections d'une figure invariablement liée à un plan P, puis faisons tourner le plan autour d'une horizontale H de ce plan, jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan horizontal de projection; la figure ayant suivi le mouvement du plan prend une certaine position, et le problème qui a pour objet la détermination des nouvelles projections de la figure constitue ce qu'on appelle le *rabattement du plan* P *sur le plan horizontal mené par* H.

Si H est la trace horizontale du plan P, on dit que le plan a été rabattu sur le plan horizontal.

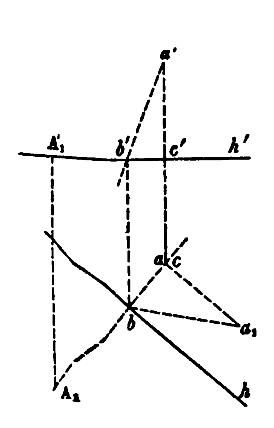
De même, supposons que l'on fasse tourner le plan P autour d'une frontale F de ce plan, jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection ; le problème qui a pour objet la détermination des projections de la figure, dans sa nouvelle position, constitue ce qu'on appelle le *rabattement du plan* P *sur le plan de front mené par* F ; si F est la trace verticale du plan P, on dit que ce plan a été rabattu sur le plan vertical.

155. Remarque. — Il est bon de remarquer que nous avons résolu le problème des rabattements quand nous avons fait tourner une figure autour d'un axe horizontal ou de front (148 et 150) : il suffit de supposer que l'angle de rotation est égal à l'un des angles que le plan invariablement lié à la figure fait avec le plan horizontal ou avec le plan vertical, suivant qu'il s'agit d'un rabattement sur un plan horizontal ou d'un rabattement sur un plan de front.

Nous allons néanmoins le reprendre à nouveau, en ayant surtout égard aux simplifications qu'il y a lieu d'introduire dans la solution quand la figure est située dans le plan que l'on rabat.

156. **Problème I** (problème des rabattements). — *Rabattre un plan donné sur un plan horizontal ou sur un plan de front.*

Pour fixer les idées, supposons que l'on fasse le rabattement sur un plan horizontal. Pour cela, on cherche à déterminer les projections d'un point du plan après le rabattement; on rabat donc un point du plan, puis, pour rabattre une figure située dans le plan, on rabat successivement tous les points de la figure. Soient alors h et h' les projections de l'horizontale autour de laquelle s'effectue le rabattement et soit (a, a') le point à rabattre. On remarque :

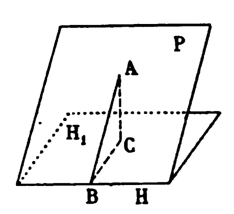


1° Que le point reste dans le plan vertical mené par (a, a') perpendiculairement à (h, h') et, par conséquent, que sa projection horizontale se déplace sur la trace horizontale de ce plan vertical, c'est-à-dire sur la perpendiculaire ab à h menée par a;

2° Que la distance du point à la charnière demeure invariable.

Or, quand le plan est horizontal, la longueur de la perpendiculaire $(ab, a'b')$ menée du point sur la charnière, se projette horizontalement suivant une longueur égale; et, comme le pied de la perpendiculaire ne bouge pas, on voit que la projection horizontale du point, après le rabattement, se trouve sur la perpendiculaire à h menée par a, et à une distance du pied b de cette perpendiculaire égale à la distance du point (a, a') à la droite (h, h').

Cherchons cette distance. Pour cela, figurons à part, en H_1, le plan horizontal sur lequel on rabat, et soit P le plan que l'on rabat et qui coupe le premier suivant l'horizontale H.



Soient A le point projeté en (a, a') et B le pied de la perpendiculaire à H menée par A, et dont les projections sont b et b'. Si nous menons AC perpendiculaire à H, et si nous joignons C à B, la distance cherchée AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ACB, dont les côtés de l'angle droit sont AC et CB. Mais la droite AC étant verticale, se projette verticalement suivant une longueur égale; d'autre part, C étant projeté en (c, c'), on a $AC = a'c'$. De même la droite BC étant horizontale, se projette horizontalement suivant une longueur égale, de sorte que $BC = bc$.

Ainsi, *la distance cherchée est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, baa_1, ayant pour côtés de l'angle droit les distances des projections du point aux projections de même nom de la charnière.*

On peut la porter soit d'un côté de h, soit du côté opposé, suivant le sens dans lequel on a fait tourner le plan pour effectuer le rabattement. En la portant, par exemple, au-dessous de h, on obtient le point A_1, projection horizontale du point après le rabattement; la projection verticale sera du reste le point A'_1 sur h', puisque dans sa nouvelle position le plan est confondu avec le plan horizontal dont la trace verticale est h'. Toute la difficulté réside donc, comme on le voit, dans la détermination du point A_1; c'est le point A_1 qu'on appelle le rabattement du point (a, a') sur le plan horizontal mené par h' et, pour l'obtenir, on est conduit à la règle suivante, appelée *règle du triangle rectangle :*

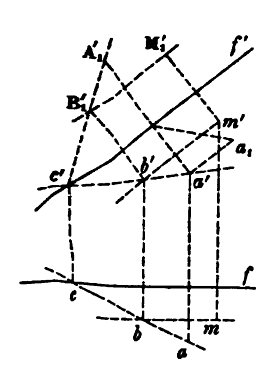
Règle. — *Quand on rabat un plan autour d'une horizontale de ce plan, la nouvelle projection horizontale du point, c'est-à-dire son rabattement, se trouve sur la perpendiculaire à la projection horizontale de la charnière, menée par la projection horizontale du point, et à une distance du pied de cette perpendiculaire égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les distances des projections du point aux projections de même nom de la charnière.*

Par analogie, *quand on rabat un plan autour d'une frontale, la nouvelle projection verticale du point, c'est-à-dire son rabattement, se*

trouve sur la perpendiculaire à la projection verticale de la charnière, menée par la projection verticale du point, et à une distance du pied de cette perpendiculaire égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit s'obtiennent comme plus haut.

On pourrait, du reste, établir directement la deuxième partie de la règle comme on a établi la première.

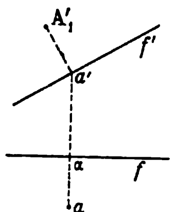
157. Remarque I. — Quand on a à rabattre une figure située dans le plan, on peut simplifier le rabattement des divers points de la figure au moyen du rabattement de l'un d'eux. Soit par exemple le plan déterminé par une frontale (f, f') et par un point (a, a'); supposons que l'on ait rabattu ce plan sur le plan de front mené par (f, f'), et proposons-nous de trouver le rabattement d'un point quelconque (b, b') du plan, connaissant le rabattement A'_1 du point (a, a'). Pour cela, traçons la droite $(ab, a'b')$ et remarquons que si le point (b, b') est dans le plan, cette droite rencontre (f, f') en un point (c, c') qui ne bouge pas pendant le rabattement; il en résulte que (b, b') se rabat sur $c'A'_1$ et à l'intersection de cette droite et de la perpendiculaire à f' menée par b'.



158. Remarque II. — Dès qu'on a rabattu une droite $(ab, a'b')$ du plan, on peut en profiter pour avoir le rabattement d'un point quelconque (m, m'). A cet effet, on mène par le point (m, m') la parallèle à la charnière; soit (b, b') le point de rencontre de cette parallèle et de la charnière et soit B'_1 son rabattement; le rabattement de la parallèle est évidemment la parallèle à f' menée par B'_1 et il contient le rabattement du point (m, m'); celui-ci se trouve donc déterminé par la parallèle à f' menée par B'_1 et par la perpendiculaire à f' menée par m'.

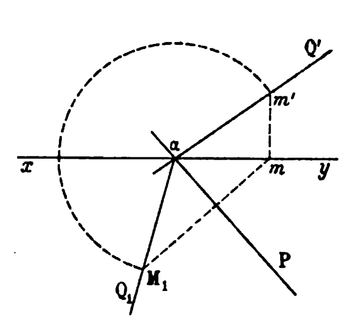
159. **Rabattement d'un plan vertical ou de bout.** — La règle générale énoncée plus haut permet d'effectuer le rabattement dans tous les cas possibles. Il n'est pas inutile toutefois d'indiquer en quelques mots les modifications qu'il y a lieu de lui faire subir quand le plan est vertical ou de bout.

Supposons d'abord que le plan soit vertical et que l'on rabatte le point (a, a') autour de l'horizontale (h, h') de ce plan. Le triangle rectangle aba_1 du n° 156 n'existe plus puisque $ab = 0$, et le rabattement se trouve sur la perpendiculaire à h menée par a et à une distance de a égale à la cote du point (a, a') au-dessus de h'; car la longueur de la perpendiculaire menée par (a, a') à la charnière est égale actuellement à la cote de ce point au-dessus de h', c'est-à-dire à $\alpha' a'$.



Pareillement, si l'on a à rabattre un plan de bout autour de la frontale (f, f'), on voit que le rabattement A'_1 d'un point quelconque (a, a') de ce plan se trouve sur la perpendiculaire à f' menée par a', et à une distance de a' égale à la distance $a\alpha$.

160. Rabattement d'un plan autour de sa trace horizontale. — Supposons d'abord que la trace horizontale soit quelconque et que le plan ne soit pas vertical. La solution exposée au n° 156 est alors textuellement applicable : il suffit de remarquer que si $P\alpha Q'$ est le plan qu'il s'agit de rabattre, les projections de la charnière sont $P\alpha$ et xy.



Si l'on voulait rabattre la trace verticale du plan, il suffirait d'en rabattre un point (m, m'), puique le point α ne bouge pas. D'ailleurs, pour rabattre le point (m, m') on peut : ou bien employer la méthode générale de rabattement d'un point quelconque; ou bien se servir de ce que la distance $\alpha m'$ demeure constante ; de sorte que le rabattement du point (m, m') se trouve, d'une part, sur la perpendiculaire à $P\alpha$ menée par m, d'autre part, sur la circonférence de centre α et de rayon $\alpha m'$. Ces deux lignes se coupant en deux points, il semble qu'il y ait deux solutions ; mais cela tient à ce que l'on peut rabattre soit d'un côté de αP, soit de l'autre.

Supposons maintenant que l'on se propose de rabattre un plan

vertical autour de sa trace horizontale. On aura alors à faire les constructions indiquées au nº 159, en observant que la projection verticale de la trace horizontale est sur la ligne de terre.

Pour rabattre, dans ce cas, la trace verticale du plan, il suffit de mener la perpendiculaire à αP dans le plan horizontal et par le point α; on aura ainsi le rabattement de la trace verticale, car, quand le plan est vertical, les deux traces sont rectangulaires dans l'espace et en rabattement.

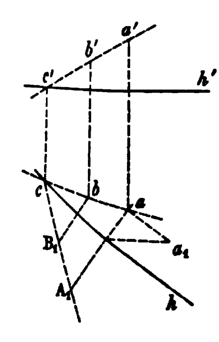
Supposons enfin que la trace horizontale soit perpendiculaire à la ligne de terre, c'est-à-dire que le plan soit de bout. On pourrait encore employer la construction générale, mais il est plus commode et il revient au même d'observer qu'on a alors à effectuer une rotation autour d'un axe de bout.

161. **Rabattement d'un plan autour de sa trace verticale.** — On a encore trois cas à examiner, suivant que le plan est quelconque, de bout ou vertical.

Les résultats sont analogues à ceux que nous avons obtenus dans le problème précédent, et s'en déduisent en changeant simplement partout horizontal en vertical, ou inversement.

Au fond, il n'y aurait nullement lieu d'examiner ces cas particuliers, puisqu'ils se résolvent comme le cas général : aussi les avons-nous examinés uniquement à titre accessoire.

162. **Problème II** (inverse du précédent). — *Un plan est supposé rabattu sur un plan horizontal ou sur un plan de front ; on connaît le rabattement d'une figure située dans ce plan, et l'on demande de construire les projections de cette figure.*



Considérons, par exemple, un plan défini par une horizontale (h, h') et un point (a, a'). Supposons ce plan rabattu autour de l'horizontale (h, h'), et proposons-nous de construire les projections d'une figure située dans ce plan et définie par son rabattement. Il est clair qu'il suffit, pour cela, de résoudre le problème pour un point quelconque de la figure. A cet effet, *on commence toujours par rabattre un point du plan.* Rabattons donc le

point (a, a'), et soient A_1 le rabattement ainsi obtenu, B_1 le point de la figure dont on cherche les projections. Menons A_1B_1; cette droite, qui est le rabattement de la droite $(ab, a'b')$, rencontre h en un point c, projection horizontale de l'intersection de (h, h') avec $(ab, a'b')$. La projection verticale c' de ce point d'intersection s'en déduit par une ligne de rappel, et l'on voit que les projections de $(ab, a'b')$ s'obtiennent en joignant respectivement c et c' à a et a'.

Cherchons alors la projection horizontale du point (b, b') : elle doit se trouver sur ac et sur la perpendiculaire à h menée par B_1; donc elle est à l'intersection b de ces deux droites. On en déduit la projection verticale b' en prenant l'intersection de $a'c'$ et de la ligne de rappel du point b.

La seule difficulté que puissent présenter les constructions réside dans ce que le point c peut être en dehors des limites du dessin. Mais ceci sera toujours facile à éviter, en remplaçant le point A_1 par un autre mieux choisi. Il n'y a, pour cela, qu'à construire les projections d'une droite quelconque du plan, dont le rabattement passe par B_1 et rencontre h dans les limites du dessin.

Le problème que nous venons de résoudre s'appelle le *relèvement* du plan rabattu.

163. Remarque. — Si l'on se reporte au problème I (nº 156), on voit que l'angle aba_1 est égal à l'angle ABC du plan P avec le plan horizontal sur lequel on rabat le plan P. (Ce serait l'angle avec le plan vertical si le rabattement était effectué sur un plan de front.)

Il suit de là que tous les triangles rectangles analogues à aba_1 sont semblables, car l'angle aba_1 est constant quand on passe d'un triangle à un autre.

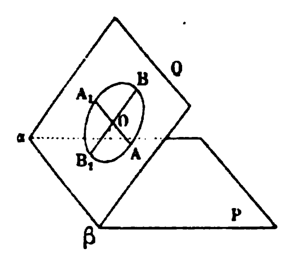
On pourrait se servir de cette propriété pour relever le point B_1, *après qu'on a rabattu* (a, a'); mais il faudrait pour cela faire usage de la règle et du compas, tandis que la construction que avons donnée dispense de se servir du compas.

164. **Usages des rabattements.** — On fait usage des rabattements, soit pour déterminer la grandeur d'une figure plane donnée par ses projections, ou inversement, soit pour ramener à des problèmes sur le plan certains problèmes de géométrie dans l'espace. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut résoudre facilement le problème suivant : *Mener par un point donné la parallèle à une droite située dans le même*

plan de profil que le point. On rabat le plan de profil sur l'un des plans de projection, par le rabattement du point on mène la parallèle au rabattement de la droite et on relève le plan rabattu.

Les applications du problème des rabattements sont nombreuses, et nous les rencontrerons fréquemment dans la suite de ce cours. Aussi nous bornerons-nous, actuellement, à en traiter deux.

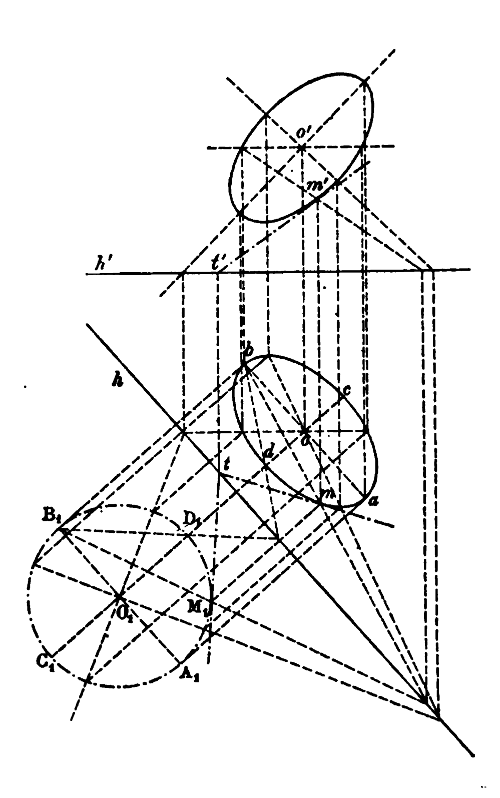
165. Application I. — *Projections d'un cercle.* — Soit O le centre d'un cercle situé dans un plan Q, et soit P un plan quelconque, coupant le plan Q suivant la droite $\alpha\beta$. Menons le diamètre AA_1 du cercle parallèle au plan P, c'est-à-dire parallèle à $\alpha\beta$, et soit BB_1 le diamètre du cercle perpendiculaire au premier. *On démontre que la projection du cercle* O *sur le plan* P *est une ellipse ayant pour centre la projection du point* O, *pour grand axe la projection de* AA_1 *et pour petit axe la projection de* BB_1.



Nous allons nous proposer de construire les projections d'un cercle O connaissant son plan, son centre et son rayon. Pour cela supposons le plan du cercle défini par une horizontale (h, h') et par le point (o, o'), centre du cercle ; puis rabattons le plan du cercle autour de l'horizontale sur le plan horizontal passant par cette droite, et soit O_1 le rabattement du centre. Le rayon du cercle étant connu, ainsi que son centre, on peut tracer son rabattement ; pour achever le problème il n'y a plus alors qu'à relever le cercle rabattu, en relevant successivement autant de points qu'il est nécessaire d'en avoir pour pouvoir tracer la projection horizontale et la projection verticale. Dans l'épure ci-après on a construit les projections m et m' du point qui est rabattu en M_1, ainsi que les projections mt et $m't'$ de M_1t, tangente au cercle rabattu, au point M_1 ; on a ainsi obtenu en même temps que les projections du point les tangentes aux projections de même nom du cercle.

Pour avoir le grand axe de la projection horizontale on a construit les projections des points A_1 et B_1 situés sur le diamètre horizontal du cercle, diamètre dont le rabattement est évidemment parallèle à h ; pour avoir le petit axe de la même projection, on a construit les projections des points C_1 et D_1, extrémités du diamètre perpendicu-

laire au premier. On détermine d'une manière analogue les axes de la projection verticale : on construit d'abord une ligne de front du plan du cercle et son rabattement ; on mène ensuite les diamètres du cercle parallèle et perpendiculaire à ce rabattement et on construit les pro-

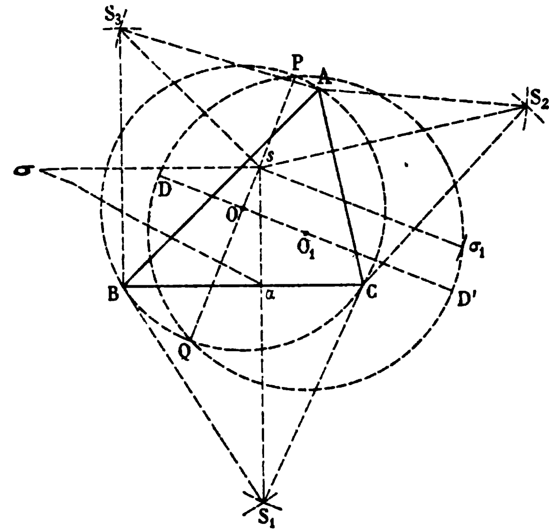


jections des extrémités de ces diamètres. Le grand axe de la projection verticale est la projection verticale du diamètre parallèle à la ligne de front, et le petit axe est la projection verticale du diamètre perpendiculaire à cette ligne.

En général, pour résoudre un problème quelconque relatif au cercle, on le résout pour le cercle rabattu, puis on relève les constructions.

166. **Application II.** — *Connaissant les six arêtes d'un tétraèdre, déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite à ce tétraèdre.*

Supposons que la base du tétraèdre soit dans le plan horizontal, cas



auquel on peut toujours se ramener par un rabattement. Soit donc ABC la base du tétraèdre, construite en observant qu'on en connaît les trois côtés. Rabattons sur le plan horizontal les faces adjacentes à cette base ; comme les longueurs des arêtes sont connues, il sera aisé de construire les rabattements S_1BC, S_2CA, S_3AB de ces faces, puisqu'on aura à construire des triangles connaissant les trois côtés de chacun d'eux. Appelons S le sommet du tétraèdre. Il est facile d'en obtenir la projection horizontale et la cote. Pour en obtenir la projection horizontale, imaginons qu'on relève les faces rabattues. En relevant d'abord la face S_1BC, on voit que la projection horizontale du sommet se trouve sur la perpendiculaire à BC menée par S_1. En relevant ensuite la face S_2CA, on voit de même qu'il se trouve sur la perpendiculaire à CA menée par S_2, de sorte qu'il se trouve à l'intersection s de ces deux lignes. Comme vérification, la perpendiculaire à AB menée par S_3 doit passer par s.

Pour obtenir la cote du sommet, observons que si l'on voulait rabattre la face SBC en appliquant la règle du triangle rectangle (156), on aurait à construire un triangle rectangle $\sigma s \alpha$, ayant pour côtés de l'angle droit $s\alpha$ et la cote du point S. Or nous pouvons construire ce triangle rectangle, puisque nous en connaissons un côté $s\alpha$ et l'hypoténuse $\alpha\sigma = \alpha S_1$. On en déduit la cote cherchee $s\sigma$.

Cela posé, la sphère circonscrite au tétraèdre coupe le plan horizontal suivant le cercle circonscrit au triangle ABC, et son centre est situé sur la verticale menée par le centre o de ce cercle. Coupons alors la sphère par le plan vertical passant par os : ce plan passera par le centre de la sphère et coupera par suite celle-ci suivant un grand cercle. La cote du centre de ce cercle achèvera de déterminer le centre de la sphère, dont le rayon sera égal à celui du même cercle.

Pour terminer le problème, remarquons que le plan vertical mené par os passe aussi par le sommet du tétraèdre, de sorte qu'il en est de même du grand cercle qu'il détermine dans la sphère. Il en résulte que si l'on rabat ce grand cercle sur le plan horizontal, on connaîtra facilement trois points du rabattement, savoir : les deux points P et Q, où os rencontre la circonférence circonscrite au triangle ABC, et le rabattement σ_1 de S autour de os, rabattement qui se trouve sur la perpendiculaire à os menée par s et à une distance de s égale à la cote $s\sigma$ du sommet.

Traçons donc la circonférence passant par les trois points P, Q, σ_1 et nous aurons le rabattement du grand cercle déterminé dans la sphère circonscrite par le plan vertical mené par os. Soient O_1 le centre de cette circonférence et DD' le diamètre oO_1 qui est d'ailleurs perpendiculaire à PQ : DD' est le diamètre de la sphère circonscrite au tétraèdre, et oO_1 est la cote du centre de cette sphère.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE V

1. Amener une droite à être parallèle à la ligne de terre par des changements de plans.

2. Deux droites non situées dans le même plan étant données, les amener à avoir leurs projections horizontales ou leurs projections verticales parallèles, par un seul changement de plan.

3. Résoudre le même problème par une seule rotation.

4. Rendre un plan donné parallèle à la ligne de terre, par un changement de plan ou par une rotation.

5. Deux droites A et B sont définies par leurs projections horizontales, leurs traces horizontales et les cotes de deux points P et Q pris respectivement sur les deux droites. Mener par l'une d'elles un plan parallèle à l'autre.

6. Les données restant les mêmes, on considère A et B comme les lignes de plus grande pente de deux plans ; trouver la projection horizontale et la cote d'un point de l'intersection de ces deux plans.

7. On donne une ligne de plus grande pente d'un plan P par sa projection horizontale, sa trace horizontale et la cote d'un de ses points. On définit de la même manière une droite A, et l'on demande de déterminer la projection horizontale et la cote de l'intersection de la droite A et du plan P.

8. Mener par un point donné la perpendiculaire à un plan donné, à l'aide d'un changement de plan.

9. Traiter ce problème quand le plan donné passe par la ligne de terre.

10. Mener par un point donné le plan perpendiculaire à une droite de profil, à l'aide d'un changement de plan.

11. Amener une droite à être parallèle à la ligne de terre par des rotations.

12. Même problème en employant un changement de plan et une rotation.

13. Rendre un plan parallèle à la ligne de terre par une rotation.

14 Amener, par une rotation, deux plans à avoir leurs traces horizontales ou leurs traces verticales parallèles.

15. Faire tourner un plan autour d'un axe vertical donné jusqu'à ce qu'il passe par un point donné.

16. Même problème en remplaçant l'axe vertical par un axe de bout.

17. Même problème en supposant l'axe horizontal ou de front.

18. Faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe quelconque (par un rabattement).

19. Deux droites A et B se coupent et A est horizontale. Faire tourner B autour de A jusqu'à ce que la projection horizontale de B passe par un point donné du plan horizontal.

20. Même question en supposant B parallèle à A.

21. A et B sont deux droites parallèles ; faire tourner B autour de A jusqu'à ce que la projection verticale de B passe par un point donné du plan vertical.

22. On donne le centre d'un cercle et les axes de sa projection horizontale. Construire la projection verticale de ce cercle par points et par tangentes.

23. Étant donnés : 1° un point O situé à $4^{cm},5$ au-dessus du plan horizontal et à $7^{cm},5$ en avant du plan vertical, et 2° le plan passant par O et par xy, on demande :

1° De construire les projections d'un tétraèdre régulier s'appuyant par sa base sur le plan donné, de telle sorte que le centre de cette base soit au point O, la longueur de l'arête étant 7^{cm} ;

2° De faire tourner le plan donné d'un angle de 90° autour de la verticale passant par le sommet du tétraèdre ;

3° De construire les projections du solide dans cette nouvelle position.

(*École de Saint-Cyr*, *2e concours*, *1880*.)

CHAPITRE VI

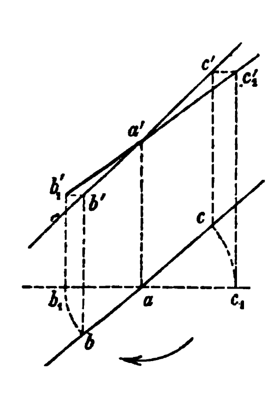
DISTANCES ET ANGLES ; APPLICATION A LA CONSTRUCTION DES ANGLES TRIÈDRES

---

§ I. — *Détermination de la distance de deux points, d'un point à un plan et d'un point à une droite.*

167. Problème I. — *Connaissant les projections de deux points, déterminer leur distance.*

On remarque, pour résoudre ce problème, que la longueur de la droite qui joint deux points se projette suivant une longueur égale sur tout plan parallèle à cette droite. Si donc on amène la droite à être parallèle à l'un des plans de projection, la distance des projections des deux points sur ce plan, après l'opération, sera la distance demandée. Nous avons vu d'ailleurs plus haut qu'on peut rendre une droite parallèle à l'un des plans de projection soit par une rotation, soit par un changement de plan. Dans la figure ci-contre on a fait tourner la droite autour de la verticale du point (a, a'), et la distance cherchée est b'_1a'.



168. Problème II (inverse du précédent). — Le problème inverse s'énonce ainsi :

Connaissant les projections d'une droite, porter sur cette droite une longueur donnée, à partir d'un point donné.

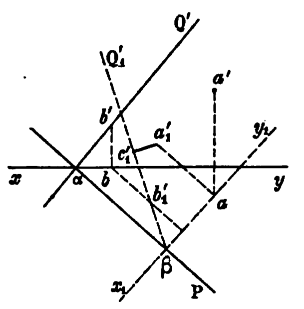
Pour le résoudre, on commence par amener la droite à être parallèle à l'un des plans de projection ; on résout le problème pour la droite dans cette position, puis on revient aux anciennes projections. Dans la figure précédente on a porté la longueur donnée en $a'c'_1$; elle

est projetée horizontalement en ac_1 après la rotation ; donc, avant la rotation, ses projections sont ac et $a'c'$.

Comme la longueur donnée peut être portée soit d'un côté du point (a, a'), soit de l'autre, le problème admet deux solutions.

169. Problème III. — *Déterminer la distance d'un point à un plan.*

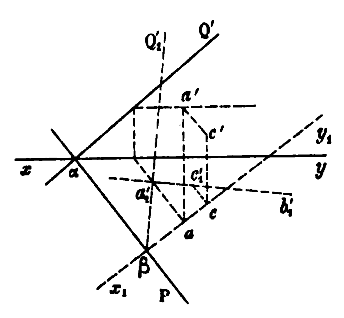
On remarque que la longueur de la perpendiculaire menée du point sur le plan se projette suivant une longueur égale sur tout plan perpendiculaire au premier.



Soient alors PαQ′ et (a, a') le plan et le point donnés. On amène le plan à être perpendiculaire à l'un des plans de projection soit par un changement de plan, soit par une rotation. Dans l'épure ci-contre on a fait un changement de plan vertical et on a pris comme nouveau plan vertical le plan perpendiculaire à αP mené par le point (a, a'). Pour avoir la nouvelle trace verticale du plan, on a déterminé la nouvelle projection verticale du point (b, b'), et la distance demandée est $a'_1c'_1$.

170. Problème IV (inverse du précédent). — *Sur la perpendiculaire à un plan, menée par un point de ce plan, porter une longueur donnée.*

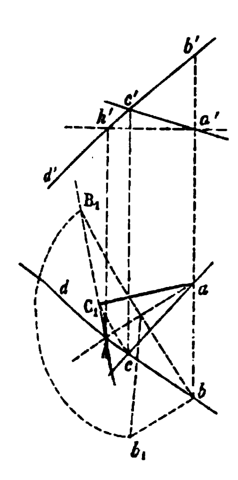
Soit (a, a') un point donné dans le plan PαQ′. Prenons comme nouveau plan vertical le plan perpendiculaire à αP mené par le point (a, a'), et soient PβQ′₁ et (a, a'_1) le plan et le point dans ce nouveau système de projections. Les projections de la perpendiculaire au plan menée par (a, a'_1) sont x_1y_1 et $a'_1b'_1$, et si sur $a'_1b'_1$ nous portons $a'_1c'_1$ égale à la longueur donnée, nous avons en (c, c'_1) les projections de la deuxième extrémité de cette longueur dans le système x_1y_1. Pour achever la résolution du problème, il n'y a plus qu'à chercher les projections c



et c' du point (c, c'_1) dans le système xy. Comme vérification, $a'c'$ doit être perpendiculaire à $\alpha Q'$.

171. Problème V. — *Connaissant les projections d'une droite et celles d'un point, déterminer la distance du point à la droite.*

La distance d'un point à une droite est la longueur de la perpendiculaire menée du point sur la droite. Pour l'obtenir, on rabat le plan déterminé par la droite et par le point, soit autour d'une horizontale, soit autour d'une frontale.



Soient alors (d, d') la droite et (a, a') le point ; nous ferons le rabattement autour de l'horizontale $(ah, a'h')$, et, comme les points (a, a') et (h, h') sont fixes, il suffit de rabattre un point quelconque de la droite, par exemple le point (b, b') ; on obtient ainsi en hB_1 le rabattement de la droite. La distance du point à la droite est la longueur aC_1 de la perpendiculaire menée du point a sur hB_1. Le point C_1 est le rabattement du pied de la perpendiculaire ; par des constructions inverses, on a facilement les projections c et c' de ce point ainsi que les projections ac et $a'c'$ de la perpendiculaire.

172. Remarque I. — Quand la droite est parallèle à l'un des plans de projection, les constructions se simplifient en faisant le rabattement *autour de la droite* : la droite reste fixe et c'est le point que l'on rabat. On procède en particulier ainsi lorsque la droite est, ou parallèle à la ligne de terre, ou confondue avec cette ligne. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, la distance est égale à l'hypoténuse du triangle rectangle qui sert à effectuer le rabattement.

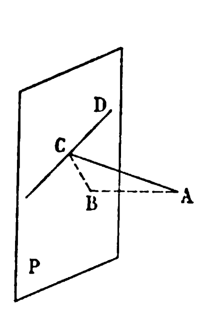
Quand la droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, la distance du point à la droite est projetée suivant une longueur égale sur ce plan. Par exemple, si la droite est perpendiculaire au plan horizontal, la distance d'un point à cette droite est égale à la distance de la projection horizontale du point à la projection horizontale de la droite.

Le cas où la droite est parallèle à l'un des plans de projection peut se ramener à celui qui vient d'être examiné, par un changement de

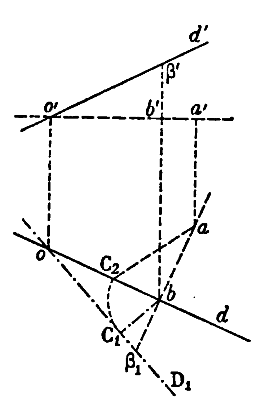
plan. C'est du reste, au fond, ce que l'on fait quand on détermine l'hypoténuse du triangle rectangle dont il a été question plus haut et dans les rabattements.

173. Remarque II. — Enfin, quand on veut simplement la distance du point à la droite, on peut quelquefois avoir avantage à employer une méthode basée sur la remarque suivante :

Soient D la droite, A le point et P un plan passant par la droite. Si l'on mène AB perpendiculaire au plan P et BC perpendiculaire à la droite D, dans ce plan, AC est la distance cherchée, en vertu du théorème des trois perpendiculaires. La distance cherchée est donc l'hypoténuse du triangle rectangle ABC.



D'après cela, supposons que le plan P soit l'un des plans projetant la droite, le plan projetant horizontalement par exemple, et représentons la droite et le point par leurs projections en (d, d') et en (a, a'). La droite AB est alors projetée en $(ab, a'b')$ et, pour obtenir la longueur BC, il suffit de rabattre le plan vertical mené par la droite sur le plan horizontal passant par le point. En prenant $b\beta_1 = b'\beta'$ et en joignant le point o au point β_1, on obtient ainsi en D_1 le rabattement de D et en bC_1 le rabattement de BC. Comme d'ailleurs AB est égale à sa projection horizontale ab, le triangle rectangle ABC est facile à construire en abC_2, ce qui donne en aC_2 la distance demandée.

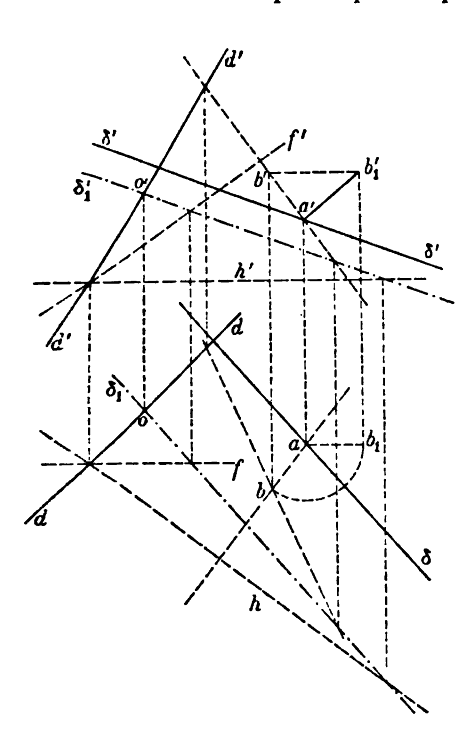


Ajoutons qu'en relevant le point rabattu en C_1, on aurait les projections du pied de la perpendiculaire et, finalement, les projections de cette perpendiculaire en joignant aux projections de même nom du point A.

§ II. — *Plus courte distance de deux droites.*

174. **Première méthode.**— Soient D et Δ les deux droites et P le plan mené par l'une d'elles parallèlement à l'autre ; supposons, pour

fixer les idées, que ce plan ait été mené par D parallèlement à Δ. On apprend en Géométrie que la plus courte distance des deux droites est la distance d'un point quelconque de Δ au plan P, et le problème est ainsi ramené à un autre déjà résolu.



Dans l'épure ci-contre, les deux droites données sont (d, d') et (δ, δ'); le plan P est déterminé par la droite (d, d') et par la parallèle (δ_1, δ'_1) à (δ, δ'), menée par un point quelconque (o, o') de (d, d'). On a déterminé, dans le plan P, une horizontale (h, h') et une frontale (f, f') ; puis, par un point quelconque (a, a') de (δ, δ'), on a mené la perpendiculaire, $(ab, a'b')$, au plan P.

Le pied (b, b') de cette perpendiculaire sur le plan P a été déterminé en coupant le plan P par le plan projetant verticalement $(ab, a'b')$. La distance du point (a, a') au plan P, c'est-à-dire la plus courte distance des deux droites D et Δ, est alors égale à la distance des deux points (a, a') et (b, b'). On a déterminé cette distance en faisant tourner $(ab, a'b')$ autour de l'axe vertical (a, a'), de manière à la rendre parallèle au plan vertical. On a ainsi en $a'b'_1$ la plus courte distance cherchée.

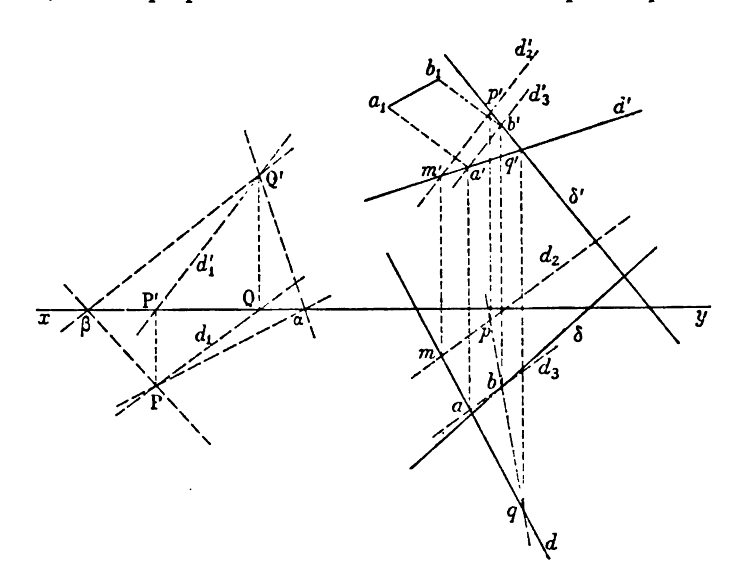
175. Deuxième méthode. — La méthode que nous venons d'exposer présente un inconvénient : elle permet d'obtenir la plus courte distance des deux droites, mais ne fournit pas la perpendiculaire commune à ces deux lignes. Par la méthode suivante, on obtient à la fois la perpendiculaire commune et la plus courte distance :

Soient toujours D et Δ les deux droites données. On commence par

déterminer la direction D_1 de la perpendiculaire commune à ces deux droites; puis on mène la droite parallèle à D_1, s'appuyant sur D et sur Δ. Cette parallèle rencontre D et Δ aux points respectifs A et B, dont la distance est égale à la plus courte distance cherchée.

Pour déterminer la direction D_1, on observe qu'elle est perpendiculaire à la fois à D et à Δ; donc, on peut : ou bien la considérer comme perpendiculaire à tout plan parallèle aux deux droites, par exemple au plan P dont il a été question dans la première méthode ; ou bien la considérer comme l'intersection de deux plans perpendiculaires respectivement à D et à Δ.

C'est cette seconde manière d'envisager D_1 qui a été adoptée pour l'exécution de l'épure ci-dessous. Les deux droites données sont encore (d, d') et (δ, δ') ; $P\alpha Q'$ et $P\beta Q'$ sont les deux plans respectivement perpendiculaires à (d, d') et à (δ, δ'), et qui se coupent suivant la direction (d_1, d'_1) de la perpendiculaire commune. Par un point quelconque



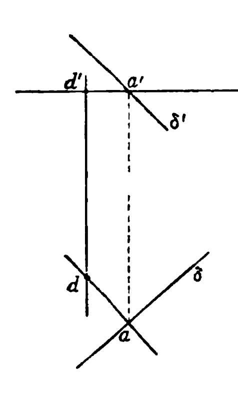
(m, m') de (d, d') on a mené (d_2, d'_2) parallèle à (d_1, d'_1), et on a déterminé l'intersection de (δ, δ') avec le plan des deux droites D, D_2. Enfin, par le point (b, b') ainsi obtenu on a mené la parallèle (d_3, d'_3) à (d_1, d'_1) : cette parallèle est la perpendiculaire commune aux deux droites D et Δ. Elle coupe D en (a, a'), Δ en (b, b'), et la distance de ces deux points est la plus courte distance cherchée. Celle-ci a été obtenue

en a_1b_1 par un rabattement, sur le plan vertical, du plan de bout mené par $(ab, a'b')$.

176. Premier cas particulier. — *L'une des deux droites est verticale ou de bout.*

Ce cas a déjà été examiné incidemment à propos des rotations. Nous allons néanmoins le reprendre à nouveau comme application de la méthode générale.

Soient donc (d, d') et (δ, δ') les deux droites données, dont l'une, la première par exemple, est perpendiculaire au plan horizontal. Le plan parallèle à (d, d') mené par (δ, δ') est le plan qui projette horizontalement (δ, δ'). La direction de la perpendiculaire commune est donc l'horizontale perpendiculaire à ce plan, ce qui veut dire que sa projection horizontale est perpendiculaire à δ, et que sa projection verticale est perpendiculaire aux lignes de rappel. Mais cette perpendiculaire commune devant s'appuyer sur D, sa projection horizontale passe par le point d, projection horizontale de tous les points de D; il en résulte que la perpendiculaire commune est projetée horizontalement suivant la perpendiculaire da à δ, menée par le point d. Le point de rencontre de la perpendiculaire commune avec Δ sera donc projeté horizontalement à l'intersection a de da et de δ. On en déduit la projection verticale a de ce point par une ligne de rappel, et ensuite, la projection verticale $a'd'$ de la perpendiculaire commune.



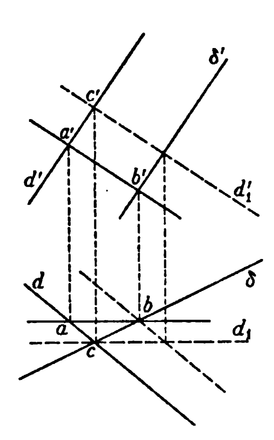
Quant à la plus courte distance des deux droites, elle est évidemment égale à da, puisque la perpendiculaire commune est horizontale.

On raisonnerait d'une manière tout à fait analogue pour trouver la plus courte distance de deux droites et leur perpendiculaire commune, quand l'une de ces deux droites est de bout au lieu d'être verticale.

177. Remarque. — On peut ramener le cas général à ce cas particulier ou par des changements de plans, ou par des rotations, ou par des changements de plans et des rotations combinés.

178. Deuxième cas particulier. — *Les deux droites ont deux projections de même nom parallèles.*

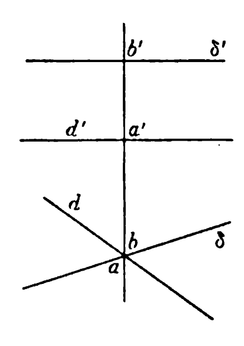
Supposons, par exemple, les projections verticales parallèles, et soient encore (d, d') et (δ, δ') les deux droites données.



Si l'on voulait simplement la plus courte distance des deux droites, il suffirait de remarquer que les plans projetant verticalement les deux droites étant parallèles, le plan projetant verticalement (d, d'), par exemple, est le plan mené par cette droite parallèlement à l'autre. Dès lors, la plus courte distance cherchée est égale à la distance de ces deux plans parallèles ; et comme ceux-ci sont de bout, elle est égale à la distance de leurs traces verticales d' et δ'.

Pour obtenir en même temps la perpendiculaire commune, on observe qu'elle est de front, puisqu'elle est perpendiculaire aux deux plans de bout menés respectivement par d' et par δ'. On en connait donc la direction (d_1, d'_1), dont la projection horizontale est perpendiculaire aux lignes de rappel et dont la projection verticale est perpendiculaire commune à d' et à δ' : cette direction a été menée, dans l'épure ci-dessus, par le point (c, c') pris sur (d, d').

Il ne reste donc plus alors qu'à mener la parallèle $(ab, a'b')$ à (d_1, d'_1), s'appuyant sur (d, d') et sur (δ, δ'). Cette parallèle est la perpendiculaire commune cherchée.



179. Troisième cas particulier. — *Les deux droites sont parallèles au même plan de projection.*

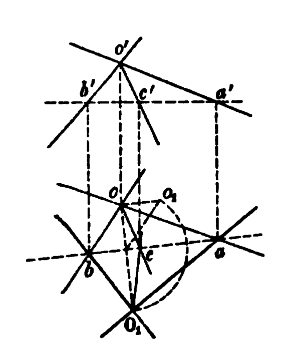
Supposons-les, par exemple, parallèles au plan horizontal, et soient (d, d') et (δ, δ') ces deux droites. Il est manifeste que la perpendiculaire commune est la verticale $(ab, a'b')$ qui s'appuie sur les deux droites, et que la plus courte distance est égale à la longueur de $a'b'$.

§ III. — *Détermination des angles de deux droites et d'une droite avec un plan.*

180. Angle de deux droites. — On appelle angle de deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace l'angle formé par les parallèles à ces deux droites, menées par un point quelconque. D'après cette définition, la recherche de l'angle de deux droites quelconques peut toujours se ramener à la recherche de l'angle de deux droites qui se coupent.

181. Problème I. — *Connaissant les projections de deux droites qui se coupent, déterminer leur angle.*

La méthode employée consiste à rabattre le plan de ces deux droites soit autour d'une horizontale, soit autour d'une frontale de ce plan.



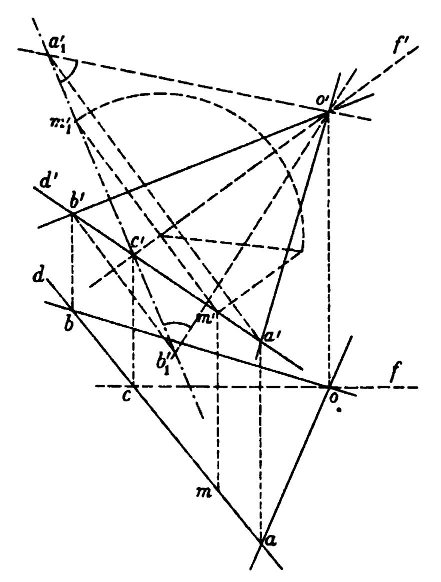
Dans l'épure ci-contre les deux droites sont représentées en $(oa, o'a')$ et $(ob, o'b')$; le rabattement a été effectué autour de l'horizontale $(ab, a'b')$, en remarquant qu'il suffit de rabattre le point (o, o'). L'angle cherché est rabattu en aO_1b.

Remarque. — On peut se proposer de déterminer les projections des bissectrices des angles formés par les deux droites. Pour cela, on construit les bissectrices des angles rabattus ; soit O_1c l'une d'elles, rencontrant la charnière au point (c, c') ; $(oc, o'c')$ est l'une des bissectrices cherchées. On opérerait de même pour l'autre bissectrice.

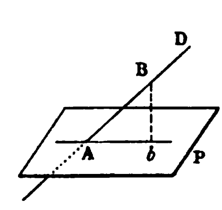
182. Problème II (inverse du précédent). — *Par un point pris sur un plan, mener une droite faisant un angle donné avec une droite donnée dans ce plan.*

Nous pouvons supposer le plan déterminé par la droite et par le point donnés. Soient donc (d, d') la droite et (o, o') le point. Rabattons le plan autour de la frontale (f, f') du point (o, o') : il suffit,

pour cela, de rabattre un point quelconque (m, m') de (d, d'), et l'on obtient ainsi en $c'm'_1$ le rabattement de (d, d'). Menons alors par le point o' les droites $o'a'_1$ et $o'b'_1$ faisant l'angle donné avec $c'm'_1$, et relevons les points a'_1 et b'_1 en (a, a') et en (b, b'). Nous obtenons ainsi en $(oa, o'a')$ et en $(ob, o'b')$ les deux droites qui répondent à la question. Comme cela est évident, le problème admet toujours deux solutions, si l'angle donné n'est pas droit.

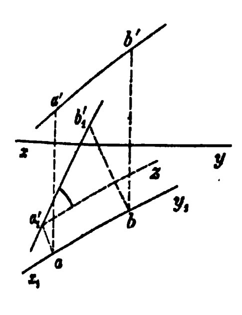


183. Angle d'une droite et d'un plan. — On appelle angle d'une droite D et d'un plan P non parallèle à la droite, l'angle aigu formé par la droite D avec sa projection sur le plan P. Soient A le point de rencontre de la droite et du plan et Bb la perpendiculaire menée d'un point quelconque B de la droite sur le plan ; la projection de la droite est Ab, et l'angle de la droite et du plan est l'angle aigu BAb. Cet angle est le complément de l'angle aigu ABb qui est l'angle aigu formé par D avec la perpendiculaire Bb menée au plan P par un point quelconque de D. Connaissant l'angle ABb, on connaît évidemment l'angle BAb ; donc la recherche de l'angle de la droite D et du plan P se ramène à la recherche de l'angle de deux droites D et Bb, problème que nous venons de résoudre. Nous allons néanmoins indiquer toutes les constructions à faire pour déterminer l'angle d'une droite avec les plans de projection.



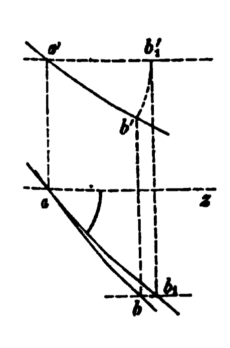
184. Problème III. — *Connaissant les projections d'une droite, déterminer les angles qu'elle forme avec les deux plans de projection.*

Premier cas. — *Angle avec le plan horizontal.* — Soient ab et $a'b'$ les projections de la droite. Si l'on prend comme nouveau plan vertical le plan qui projette horizontalement la droite, celle-ci coïncide avec sa projection verticale nouvelle, sa projection horizontale coïncide avec la nouvelle ligne de terre, et l'angle formé par ces deux droites est l'angle cherché. La nouvelle projection verticale étant $a'_1b'_1$, l'angle cherché est $b'_1a'_1z$.



On peut encore obtenir l'angle de la droite et du plan horizontal en amenant le plan qui projette horizontalement la droite à être parallèle au plan vertical ; car alors l'angle se projette verticalement suivant un angle égal.

Deuxième cas. — *Angle avec le plan vertical.* — On pourrait obtenir cet angle par une méthode analogue à celle qui a été employée dans le premier cas, c'est-à-dire en prenant comme nouveau plan horizontal le plan qui projette verticalement la droite. Au lieu de cela, nous adopterons la méthode que nous avons seulement indiquée dans le premier cas : nous amènerons, par une rotation, le plan qui projette verticalement la droite à être parallèle au plan horizontal.



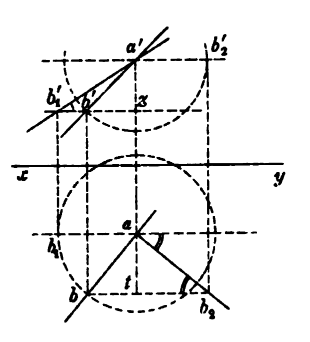
Si l'on fait tourner autour de l'axe de bout mené par (a, a'), les nouvelles projections de la droite sont ab_1 et $a'b'_1$, et l'angle demandé est b_1az.

Bien que les constructions soient différentes, il est bien clair que les deux méthodes, au fond, sont identiques, puisque dans les deux cas on amène l'angle à évaluer à être parallèle à l'un des plans de projection.

185. **Problème IV** (inverse du précédent). — *Mener par un point donné une droite faisant des angles donnés avec les plans de projection.*

Supposons le problème résolu et soit $(ab, a'b')$ la droite cherchée

menée par le point donné (a, a'). Nous allons chercher à déterminer un second point (b, b') de la droite ***en nous donnant arbitrairement*** sa distance l au point (a, a'). A cet effet, opérons comme si nous voulions déterminer les angles de la droite avec les plans de projection. Faisons d'abord tourner la droite autour de l'axe vertical mené par (a, a') jusqu'à ce qu'elle soit parallèle au plan vertical; si on suppose le point (b, b') connu, après la rotation il vient en (b_1, b'_1), et dans le triangle rectangle $a'b'_1z$ on connaît la longueur $a'b'_1 = l$ et l'angle $a'b'_1z$, qui est l'angle de la droite avec le plan horizontal. On peut donc construire ce triangle rectangle et tracer la parallèle b'_1z à xy ainsi que la circonférence de centre a et de rayon $ab_1 = b'_1z$; la première de ces deux lignes donne un lieu géométrique du point b' et la deuxième donne un lieu géométrique du point b. Nous allons chercher un second lieu géométrique du point b.



Pour cela, cherchons l'angle de la droite avec le plan vertical, en faisant tourner autour de l'axe de bout mené par (a, a'), jusqu'à ce que la droite soit parallèle au plan horizontal; ses nouvelles projections sont alors ab_2 et $a'b'_2$; en outre, dans le triangle rectangle ab_2t on connaît $ab_2 = l$ et l'angle ab_2t qui est l'angle de la droite avec le plan vertical. On peut donc construire ce triangle rectangle et tracer bb_2 parallèle à xy, ce qui donne un second lieu géométrique du point b. Le point b étant ainsi déterminé, on en déduit le point b' par une ligne de rappel.

On peut construire le triangle ab_2t soit au-dessus de ab_1, soit au-dessous; pareillement, le triangle $a'b'_1z$ peut être construit soit au-dessus, soit au-dessous de $a'b'_2$. Il suit de là que si le problème est possible, il peut admettre jusqu'à quatre solutions; il n'en admet que deux si la droite bb_2 est tangente à la circonférence ab_1.

Pour qu'il y ait quatre solutions, il faut que bb_2 coupe la circonférence ab_1, ce qui s'exprime par l'inégalité $at < ab_1$ (distance du centre à la droite inférieure au rayon de la circonférence). Appelons h et v les angles respectifs de la droite avec le plan horizontal et avec le plan vertical; les triangles rectangles ab_2t et $a'b'_1z$ donnent facile-

ment $at = l \sin v$ et $ab_1 = zb'_1 = l \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$. L'inégalité devient ainsi, après réduction,

$$\sin v < \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$$

et, comme les angles sont aigus, on en déduit $v < \frac{\pi}{2} - h$ et $h + v < \frac{\pi}{2}$.

Si au lieu de $h + v < \frac{\pi}{2}$ on avait $h + v = \frac{\pi}{2}$, on aurait $at = ab_1$ et la droite bb_1 serait tangente à la circonférence : dans ce cas le nombre des solutions se réduirait à deux, situées dans le plan de profil du point (a, a'). Enfin, si $h + v > \frac{\pi}{2}$, il n'y a pas de solution.

§ IV. — *Détermination de l'angle de deux plans.*

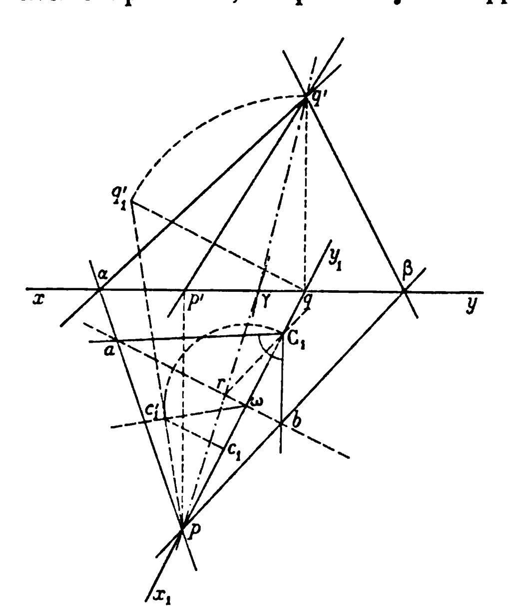
186. **Indication de la méthode.** — On mesure l'angle dièdre formé par deux plans au moyen de l'angle plan correspondant. On obtient du reste l'angle plan correspondant à un dièdre formé par deux plans P et Q en coupant ces deux plans par un troisième, R, perpendiculaire à leur intersection; si l'on appelle D l'intersection des deux plans P et R, D_1 l'intersection des deux plans Q et R, l'angle plan correspondant au dièdre est l'angle des deux droites D et D_1. On ramène ainsi la détermination de l'angle de deux plans à celle de l'angle de deux droites (*). Nous allons examiner les divers cas qui peuvent se présenter, en observant d'ailleurs que l'on peut, si cela parait avantageux, remplacer les deux plans donnés par deux autres plans quelconques respectivement parallèles aux premiers.

187. **Problème I.** — *Trouver l'angle de deux plans définis par leurs traces.*

En remplaçant, s'il y a lieu, les deux plans par deux autres respec-

(*) On peut encore ramener la détermination de l'angle de deux plans à celle de l'angle de deux droites, en observant que l'angle de deux plans est égal à celui de leurs normales respectives.

tivement parallèles, on peut toujours supposer que les deux plans se coupent dans les limites du dessin. Soient donc $p\alpha q'$, $p\beta q'$ les deux plans donnés, $(pq, p'q')$ leur intersection. Si on coupe les deux plans par un plan R perpendiculaire à leur intersection, les traces de ce plan sont perpendiculaires aux projections de même nom de la droite. En particulier, la trace horizontale est une droite quelconque ab, perpendiculaire à pq. Ce plan R coupe les deux plans donnés suivant deux droites, et c'est l'angle de ces deux droites



que nous cherchons. Pour le déterminer, nous rabattons le plan R sur le plan horizontal, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ab. Les deux points a et b qui appartiennent respectivement aux côtés de l'angle restent fixes, puisqu'ils sont sur la charnière, et il n'y a plus qu'à rabattre le sommet de l'angle.

Pour cela, changeons de plan vertical et prenons comme plan vertical le plan qui projette horizontalement $(pq, p'q')$, de sorte que la nouvelle ligne de terre, x_1y_1, sera confondue avec pq. La nouvelle projection verticale de $(pq, p'q')$ étant pq'_1, la nouvelle trace verticale du plan R est la perpendiculaire à pq'_1 menée par le point ω. Il en résulte que le sommet de l'angle à déterminer est projeté verticalement en c'_1 dans le système défini par la ligne de terre x_1y_1; sa projection horizontale est d'ailleurs sur x_1y_1 en c_1. Si donc on rabat le plan R sur le plan horizontal, comme cela revient à effectuer une rotation autour de l'axe ab, qui est un axe de bout dans le système x_1y_1, le rabattement de ce point sera le point C_1 situé à l'intersection de pq et de la circonférence de centre ω et de rayon $\omega c'_1$. L'angle cherché sera donc rabattu en aC_1b.

Comme on le voit, la trace horizontale du plan R suffit pour résoudre le problème. On pouvait, bien entendu, faire usage de la trace verticale comme on a fait usage de la trace horizontale, et on aurait été conduit à des constructions analogues, effectuées sur le plan vertical.

188. **Plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans.** — Pour déterminer les plans bissecteurs des dièdres formés par deux plans $p\alpha q'$ et $p\beta q'$, on commence par construire l'angle aC_1b de ces deux plans, comme plus haut. On mène ensuite les bissectrices de cet angle et de l'angle supplémentaire; soit C_1r l'une de ces bissectrices, rencontrant ab au point r. Ce point r appartient évidemment à la trace horizontale de l'un des plans bissecteurs cherchés. Il en résulte que ce plan sera défini par ses traces $p\gamma$ et $\gamma q'$, puisqu'il passe par la droite $(pq, p'q')$. On déterminerait de même le second plan bissecteur.

189. **Problème II** (inverse du précédent). — *On donne un plan et une droite de ce plan; mener par la droite un plan faisant un angle donné avec le premier.*

Soient (fig. précédente) $p\alpha q'$ le plan donné et $(pq, p'q')$ la droite donnée. Supposons le problème résolu et soit $p\beta q'$ le plan demandé. Cherchons l'angle des deux plans en procédant comme cela a été indiqué au nº 187. Nous obtenons ainsi en aC_1b cet angle rabattu, et dans le rabattement nous connaissons le point a et le point C_1. Par conséquent, si nous menons C_1b faisant avec C_1a l'angle donné, nous aurons le point b de la trace horizontale du plan inconnu. La trace horizontale elle-même sera $pb\beta$, et l'on en déduira la trace verticale $\beta q'$.

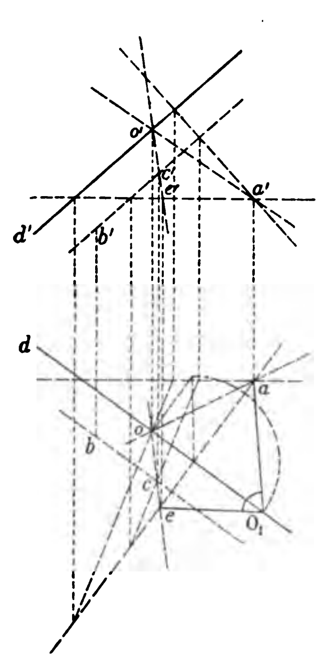
Comme l'on peut mener deux droites faisant l'angle donné avec C_1a, le problème admet deux solutions. Il n'y en a qu'une qui soit indiquée sur la figure, mais on obtiendrait l'autre de la même manière.

190. Remarque. — Il importe d'observer que la méthode indiquée au nº 186 pour trouver l'angle de deux plans ne souffre aucune exception. Dans les applications, elle ne présente guère qu'une difficulté, facile à surmonter à l'aide des changements de plans ou des rotations, s'il y a lieu. Cette difficulté réside uniquement dans la détermination du plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans donnés et des droites suivant lesquelles ceux-ci sont coupés par celui-là.

191. Problème III. — *Déterminer l'angle de deux plans définis d'une manière quelconque.*

Quelle que soit la définition des deux plans, nous commencerons par construire leur intersection et nous prendrons un point sur chacun d'eux; de sorte que chacun des plans sera défini par une droite et par un point, avec cette condition en plus que les droites sont confondues avec l'intersection des deux plans.

Considérons donc un premier plan défini par la droite (d, d') et par le point (a, a'), et un second plan qui passe par la droite (d, d') et par un point (b, b'). Coupons les deux plans par un troisième plan, R, perpendiculaire à (d, d') et mené par un point quelconque de l'espace, par exemple par le point (a, a'); puis cherchons les droites d'intersection du plan R avec les deux autres respectivement. Pour cela, supposons le plan R défini par l'horizontale et par la frontale du point (a, a'), et construisons d'abord son point de rencontre (o, o') avec (d, d'); nous aurons ainsi en $(oa, o'a')$ l'intersection du plan R avec le plan défini par (d, d') et par (a, a').



Pour trouver l'intersection du plan R avec le plan déterminé par (d, d') et par (b, b'), il suffit évidemment de joindre le point (o, o') au point de rencontre (c, c') du plan R avec la parallèle à (d, d') menée par le point (b, b'); car le plan déterminé par (d, d') et par (b, b') est le même que celui qui est déterminé par (d, d') et par la parallèle à cette droite menée par le point (b, b').

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer l'angle des deux droites $(oa, o'a')$ et $(oc, o'c')$. Il suffit, pour cela, de rabattre le plan R autour de l'horizontale $(ae, a'e')$, ce qui donne en aO_1e l'angle demandé.

192. Problème IV. — *Déterminer les angles d'un plan avec les plans de projection.*

L'angle d'un plan avec le plan horizontal peut être obtenu en rabattant un point du plan autour d'une horizontale de ce plan, par l'application de la règle du triangle rectangle.

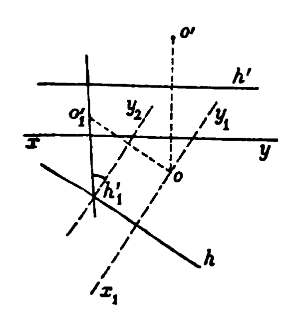
On peut aussi l'obtenir par la méthode générale indiquée au numéro 186.

On peut obtenir, de même, l'angle d'un plan avec le plan vertical, soit par l'application de la méthode générale, soit par le rabattement d'un point du plan autour d'une frontale de ce plan.

Ces diverses manières sont du reste identiques quant au fond, et leurs seules différences résident dans le procédé d'exposition. A ce point de vue, il y a peut-être avantage à procéder comme il suit :

1° *Angle d'un plan avec le plan horizontal.* — Supposons d'abord que le plan soit perpendiculaire au plan vertical. Celui-ci étant perpendiculaire au plan donné et au plan horizontal, est perpendiculaire à leur intersection. Il coupe le plan donné suivant sa trace verticale; il coupe le plan horizontal suivant la ligne de terre; donc l'angle cherché, quand le plan est de bout, est égal à l'angle que la trace verticale du plan fait avec la ligne de terre.

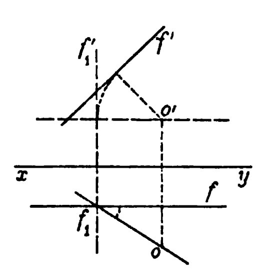
Supposons maintenant que le plan soit quelconque. Pour déterminer son angle avec le plan horizontal, on le rend de bout, soit par un changement de plan vertical, soit par une rotation autour d'un axe vertical, ce qui ne change pas son inclinaison sur le plan horizontal.



Dans l'épure ci-contre le plan est déterminé par une horizontale (h, h') et par le point (o, o'). On a pris un nouveau plan vertical défini par la ligne de terre x_1y_1 perpendiculaire à h, et l'on a obtenu en $h'_1o'_1$ la nouvelle trace verticale du plan en joignant les nouvelles projections verticales de deux de ses points. L'angle cherché est $y_1h'_1o'_1$.

2° *Angle d'un plan avec le plan vertical.* — Par analogie avec le premier cas on voit que, si le plan donné est vertical, l'angle qu'il fait avec le plan vertical est égal à l'angle que sa trace horizontale fait avec la ligne de terre.

Si le plan est quelconque, on le rend vertical, soit par un changement de plan horizontal, soit par une rotation autour d'un axe de bout, ce qui n'altère pas l'inclinaison du plan sur le plan vertical. Comme on a employé un changement de plan dans le premier cas, nous ferons une rotation dans le cas actuel. Supposons alors le plan donné déterminé par la frontale (f, f') et par le point (o, o'). Puis faisons tourner ce plan autour de l'axe de bout passant par le point (o, o') jusqu'à ce que la nouvelle projection verticale de (f, f') soit perpendiculaire à xy. La nouvelle trace horizontale du plan s'obtient alors en joignant les nouvelles projections horizontales de deux de ses points, et l'angle cherché est of_1f.



193. Problème V (inverse du précédent). — *Mener par un point donné un plan faisant des angles donnés avec les plans de projection.*

Soient A le point donné et P le plan cherché. Si l'on mène par le point A la perpendiculaire D au plan P, cette droite fait avec les plans de projection des angles respectivement complémentaires de ceux que fait le plan P avec les mêmes plans. On peut donc déterminer les projections de la droite D, et, pour achever le problème, il suffira de mener par le point A le plan perpendiculaire à cette droite.

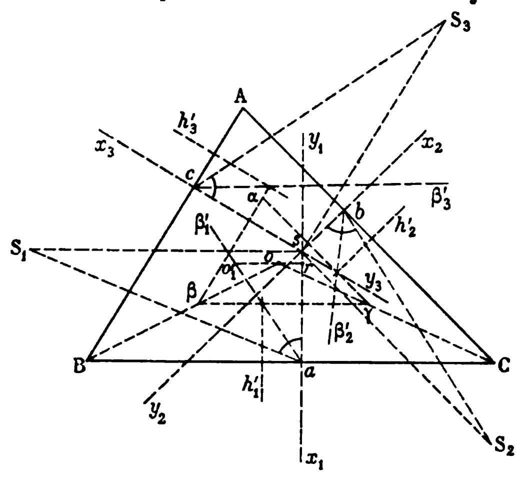
On ramène ainsi le problème à un autre déjà résolu. Mais nous en donnerons plus tard (voir plans tangents au cône) une solution plus directe.

194. Application. — *Déterminer le centre et le rayon de la sphère inscrite dans un tétraèdre.*

Première méthode. — On peut toujours supposer, en effectuant un rabattement, s'il y a lieu, que l'une des faces du tétraèdre est dans le plan horizontal. Considérons donc un tétraèdre dont la base, supposée connue, est dans le plan horizontal, et supposons que l'on connaisse, en outre, la projection horizontale et la cote du sommet opposé à cette base. Soient ABC la base et s la projection horizontale du sommet. Pour avoir le centre de la sphère inscrite, il suffit évidemment de déterminer la projection horizontale et la cote du point d'intersection des plans bissecteurs des dièdres BC, CA et AB du tétraèdre. Com-

mençons d'abord par déterminer l'intersection des plans bissecteurs des dièdres BC, BA. Comme nous connaissons déjà un premier point B de cette intersection, il suffit d'en déterminer un second.

Pour cela, coupons les deux plans bissecteurs par le même plan horizontal H et prenons le point de rencontre des deux droites d'intersection. Tout revient alors à déterminer ces deux droites. A cet effet, prenons comme nouveau plan vertical le plan perpendiculaire à BC mené par le sommet et défini par la ligne de terre x_1y_1. La cote du sommet étant connue, on peut aisément construire, dans le système x_1y_1, la trace verticale aS$_1$ de la face du tétraèdre adjacente à la face



ABC suivant l'arête BC. On en déduit, dans le même système, la trace verticale $a\beta'_1$ du plan bissecteur du dièdre BC. Mais alors, si l est la cote arbitraire du plan H, la trace verticale de ce plan dans le système x_1y_1 est une droite h'_1 parallèle à x_1y_1 et de cote l. Il en résulte que la projection horizontale de l'intersection du plan H et du plan bissecteur du dièdre BC est la droite $\beta\gamma$ perpendiculaire à x_1y_1 et passant par le point de rencontre de $a\beta'_1$ avec h'_1.

On détermine d'une manière analogue l'intersection du même plan horizontal et du plan bissecteur du dièdre BA, en faisant le changement de plan vertical défini par la ligne de terre x_3y_3, passant par s et perpendiculaire à BA. Cette intersection est projetée en $\beta\alpha$, sur le plan horizontal, de sorte que Bβ est la projection horizontale de l'intersection des deux plans bissecteurs.

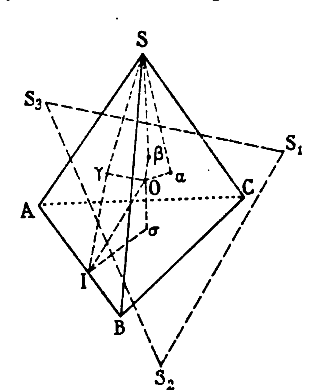
Cela posé, nous déterminons ensuite de la même manière l'inter-

section des plans bissecteurs des dièdres BC, CA. Cette intersection étant projetée horizontalement en Cγ, on en conclut que le centre de la sphère inscrite a sa projection horizontale à l'intersection o de Bβ et de Cγ. Pour avoir le rayon de la sphère, il suffit de déterminer la projection verticale du centre, dans l'un quelconque des systèmes auxiliaires, x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, par exemple dans le système x_1y_1. Cette projection verticale se trouve sur $a\beta'_1$ et s'obtient par une ligne de rappel oo'_1 : c'est le point o'_1. Le rayon de la sphère est alors égal à la distance du point o'_1 à x_1y_1.

Ajoutons que l'épure renferme toutes les constructions analogues à celles qui viennent d'être exposées et que, pour en faciliter la lecture, on a désigné les lignes analogues par la même lettre affectée des indices 1, 2 ou 3, suivant que les lignes sont rapportées aux systèmes x_1y_1, x_2y_2 ou x_3y_3.

Deuxième méthode. — Cette méthode est due à M. Hermary; en voici l'expositon succincte :

Soient O le centre d'une des sphères tangentes aux quatre faces du tétraèdre SABC, et σ, α, β, γ les points de contact de cette sphère avec les faces opposées respectivement aux sommets S, A, B, C. Si l'on considère l'une des faces, ABC par exemple, il est possible de rabattre les trois autres sur le plan de cette face de manière que les points de contact α, β, γ viennent coïncider avec le point σ. Menons en effet les rayons Oσ et Oγ. Ces rayons sont perpendiculaires aux plans des faces respectives ABC et ABS, de sorte qu'ils déterminent un plan perpendiculaire à l'arête AB. Si donc I est le point d'intersection de ce plan avec AB, les lignes Iσ et Iγ sont perpendiculaires à AB au point I; de plus elles sont égales comme tangentes menées à la même sphère par le point I. Il en résulte que si l'on fait tourner le plan SAB autour de AB dans un sens convenable, de manière à l'appliquer sur le plan ABC, le point γ vient coïncider avec le point σ.



On prouverait de même que l'on peut rabattre les deux faces SBC et SAC de manière à faire coïncider les points α et β avec le point σ.

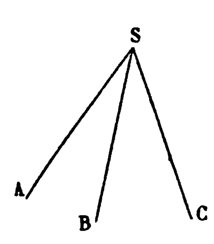
Cela posé, observons que les lignes $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ sont égales comme tangentes menées du point S à la même sphère; de sorte que lorsqu'on a rabattu les trois faces SAB, SBC, SAC sur le plan ABC de manière à faire coïncider les points α, β, γ avec le point σ, les trois positions S_1, S_2, S_3 du point S après ces rabattements sont trois points également distants du point σ. Donc le point σ est le centre du cercle circonscrit au triangle $S_1S_2S_3$.

Le point σ étant trouvé, pour déterminer la sphère O il suffit de déterminer la longueur σO de son rayon, lequel est confondu avec la perpendiculaire menée par le point σ au plan ABC. Mais σO est le deuxième côté de l'angle droit d'un triangle rectangle σIO dans lequel on connaît le premier côté de l'angle droit σI et l'angle aigu σIO; l'angle σIO est en effet la moitié de l'angle $\sigma I\gamma$ des deux plans SAB et ABC, ainsi que cela résulte de l'égalité des triangles rectangles $OI\sigma$ et $OI\gamma$; d'ailleurs l'angle $\sigma I\gamma$ de ces deux plans a été obtenu quand on a rabattu le plan SAB sur le plan ABC.

Ces indications sont suffisantes pour que le lecteur puisse exécuter l'épure sans aucune difficulté.

§ V. — *Construction des angles trièdres.*

195. Généralités. — Dans tout trièdre SABC on distingue six éléments : trois trièdres et trois faces. On apprend en Géométrie que l'on peut construire un trièdre connaissant trois quelconques des six éléments. De là six problèmes, qu'on appelle les six cas de ***résolution*** des angles trièdres, et qui sont compris dans l'énoncé suivant :



Résoudre un trièdre connaissant :

1° Les trois faces ;

2° Deux faces et le dièdre compris ;

3° Deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles ;

4° Une face et les dièdres adjacents ;

5° Une face, un dièdre adjacent à cette face et le dièdre opposé ;

6° Les trois drièdres.

Les trois derniers cas peuvent se ramener aux trois premiers par la considération des trièdres supplémentaires. Nous les résoudrons néanmoins tous directement, sauf le dernier dont la solution directe ne

sera donnée que plus tard (voir le chapitre des plans tangents à la sphère). Nous ferons d'ailleurs usage, pour traiter ces divers problèmes, de la notation habituelle, qui consiste à désigner par les lettres A, B, C les dièdres du trièdre ayant respectivement pour arêtes SA, SB, SC, et par les lettres a, b, c les faces respectivement opposées à ces arêtes.

196. Premier cas — *Construire un trièdre connaissant les trois faces* a, b, c.

Prenons pour plan horizontal le plan de la plus grande face et appelons a cette face. Le problème sera résolu si nous pouvons déterminer la projection horizontale et la cote d'un point quelconque de l'arête SA. Considérons donc le point O de l'arête SA qui est à une distance donnée l du point S, et cherchons la projection horizontale et la cote de ce point.

Pour cela, imaginons que l'on ait rabattu sur le plan horizontal, et extérieurement à la face a, les faces du trièdre qui sont adjacentes à cette face. Soient O_1 et O_2 les rabattements respectifs du point O autour de SB et de SC, de sorte que l'on a :

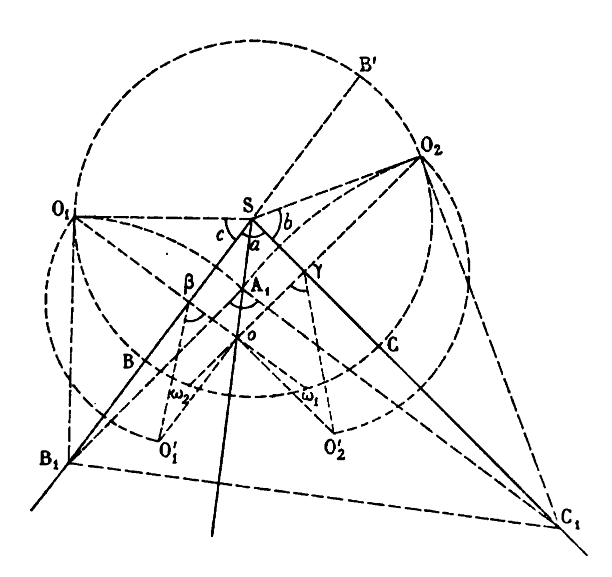
$$\text{angle } O_1SB = c, \qquad \text{angle } BSC = a, \qquad \text{angle } CSO_2 = b\,;$$
$$SO_1 = SO_2 = l.$$

Si on relève la face c, on voit que la projection horizontale du point O doit se trouver sur la perpendiculaire à SB menée par O_1 ; de même, si on relève la face b, on voit que la projection horizontale du point O doit se trouver sur la perpendiculaire à SC menée par O_2. Donc la projection horizontale du point O doit se trouver à l'intersection o de ces deux perpendiculaires.

La projection horizontale du point O étant ainsi déterminée, il nous reste à trouver sa cote. Pour cela, construisons le triangle rectangle $\beta o O_1$ dont un côté de l'angle droit est $o\beta$ et dont l'hypoténuse est égale à βO_1 : le deuxième côté oO'_1 de l'angle droit de ce triangle rectangle est la cote demandée. Comme vérification, le côté oO'_1 doit être égal au côté oO'_2 du triangle rectangle $o\gamma O'_2$ analogue au triangle rectangle $o\beta O'_1$.

Discussion. — Le problème est ainsi résolu, et il ne reste plus qu'à en chercher les conditions de possibilité. A cet effet, remarquons que So, projection horizontale de $SO = l$, doit être inférieure à SO,

inférieure par suite à SO_1 et à SO_2 ; donc, pour que le problème soit possible, *il faut et il suffit* que le point o soit intérieur à la circonférence de centre S et de rayon l, circonférence qui passe, bien entendu, par O_1 et par O_2. Appelons B, ω_1, C, ω_2 les points de rencontre respectifs de cette circonférence avec les lignes SB, $O_1\beta$, SC, $O_2\gamma$. Dire que le point o est intérieur à cette circonférence revient évidemment à dire que les deux cordes $O_1\omega_1$ et $O_2\omega_2$ doivent se couper à l'in-



térieur de cette ligne. Mais pour que deux cordes d'un cercle se coupent à l'intérieur de ce cercle, il est nécessaire et suffisant que les extrémités de l'une de ces cordes, $O_2\omega_2$ par exemple, soient de part et d'autre de la corde $O_1\omega_1$.

Ainsi, pour que le problème soit possible, il est *nécessaire et suffisant* que les points O_2 et ω_2 soient de part et d'autre de $O_1\omega_1$: l'un de ces points doit être sur l'arc $O_1B\omega_1$, l'autre sur l'arc $O_1B'\omega_1$, B' désignant le point diamétralement opposé à B. Je dis que c'est le point ω_2 qui doit être situé sur le premier de ces arcs. En effet, les deux points ω_1 et ω_2 sont sur l'arc BC qui mesure la face a : ceci résulte de ce que, par hypothèse, a est la plus grande face du trièdre. Il en résulte que ω_2 est situé sur cet arc, soit entre B et ω_1, soit entre ω_1 et C. Mais s'il était situé entre ω_1 et C, il est manifeste que la perpendicu-

laire à SC menée par ω_2 rencontrerait $O_1\omega_1$ à l'extérieur de la circonférence; donc le point ω_2 doit être situé entre B et ω_1, c'est-à-dire, par suite, sur l'arc $O_1B\omega_1$. Le point ω_2 devant être situé entre B et ω_1, cela veut dire que la somme

$$\text{arc } B\omega_1 + \text{arc } \omega_2 C$$

doit être plus grande que l'arc BC et, en remplaçant les arcs par les faces qu'ils mesurent, on voit que l'on doit avoir

$$c + b > a\ ;$$

ce qui signifie que la plus grande face du trièdre doit être plus petite que la somme des deux autres.

Nous obtenons ainsi une première condition de possibilité du problème. Nous en obtiendrons une autre en exprimant que le point O_2 doit être situé sur l'arc $O_1B'\omega_1$. Observons d'abord, pour cela, que le point O_2 est extérieur à l'arc BC qui mesure a; puis imaginons qu'un mobile se déplace sur la circonférence, à partir du point O_1 et dans le sens $O_1B\omega_1C$... Puisque le point O_2 est extérieur à l'arc BC, dire qu'il est situé sur l'arc $O_1B'C$ revient à dire que ce mobile doit rencontrer successivement les points B,C et O_2 avant de revenir au point de départ, O_1 ; ce qui s'exprime encore en disant que la somme des arcs successifs parcourus par ce mobile doit être inférieure à une circonférence tout entière; et comme les arcs parcourus successivement mesurent les faces respectives c, a, b, on voit que la somme de ces faces doit être inférieure à 4 droits. Ainsi, en résumé, pour que le problème soit possible, *il faut et il suffit :*

1° *Que la plus grande face soit inférieure à la somme des deux autres*;

2° *Que la somme des faces soit inférieure à 4 droits.*

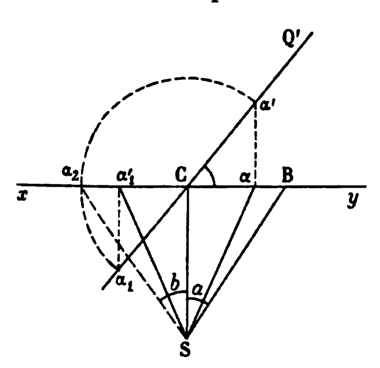
Si, d'ailleurs, ces conditions sont remplies, le problème admet deux solutions symétriques par rapport au plan de la face a. Il n'y a plus qu'une solution pour laquelle le trièdre se réduit à un plan quand le point ω_2 coïncide avec le point ω_1, ou que le point O_2 coïncide avec le point O_1.

Détermination des éléments inconnus du trièdre. — Pour avoir complètement terminé le problème, il nous reste à montrer comment on peut déterminer les dièdres. On connaît les dièdres B et C, qui sont mesurés respectivement par les angles $o\beta O'_1$ et $o\gamma O'_2$, comme cela résulte de la théorie des rabattements. Cherchons donc à

déterminer le dièdre A. Pour cela, coupons le trièdre par le plan perpendiculaire à l'arête SA mené par le point O. Ce plan coupe les faces BSA et ASC suivant deux droites perpendiculaires à SA et rabattues : la première, suivant la perpendiculaire O_1B_1 à SO_1 ; la deuxième, suivant la perpendiculaire O_2C_1 à SO_2. Le même plan coupe le trièdre suivant un triangle dont les côtés ont respectivement pour longueurs O_1B_1, B_1C_1 et C_1O_2. L'angle qui, dans ce triangle, est opposé au côté B_1C_1 mesure le dièdre A. Ce triangle est construit en $B_1C_1A_1$, au moyen de deux arcs de cercle qui doivent se couper sur S*o*, puisqu'on peut considérer le triangle $A_1B_1C_1$ comme le rabattement du triangle section. L'angle A_1 est le rectiligne du dièdre A.

197. **Deuxième cas.** — *Construire un trièdre connaissant deux faces et le dièdre compris entre ces deux faces.*

Appelons *a*, *b*, C les éléments connus. Prenons le plan de la face *a* comme plan horizontal, et un plan quelconque perpendiculaire à l'arête SC comme plan vertical. Tout revient évidemment à déterminer un point de la troisième arête, SA. Nous allons donc nous proposer de déterminer la trace verticale (α, α') de cette troisième arête. Observons, pour cela, que l'angle dièdre C étant connu, nous obtiendrons la trace verticale du plan de la face *b* en menant la droite CQ' telle que l'angle *y*CQ' soit égal à l'angle C. La droite CQ' est un lieu géométrique de la projection verticale du point (α, α') cherché.



Pour avoir un autre lieu géométrique de cette projection verticale, rabattons la face *b* sur le plan horizontal autour de SC ; soit $CS\alpha_2$ ce rabattement, facile à construire puisqu'on connait *b*. Comme SC est de bout, le point α' s'est déplacé sur la circonférence de centre C et de rayon $C\alpha' = C\alpha_2$. Si donc nous décrivons la circonférence de centre C et de rayon $C\alpha_2$, cette circonférence passera par le point α'. Le point α, situé sur la ligne de terre, se déduit du point α' par une ligne de rappel, et le problème est ainsi résolu.

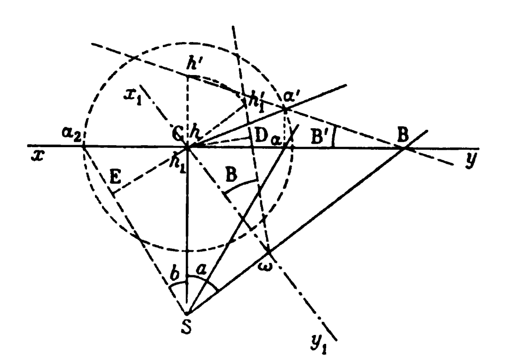
Le problème n'admet qu'une solution, si l'on fait abstraction du trièdre symétrique.

Ajoutons que le point (α, α') ayant été déterminé, on connaît la projection d'une arête sur le plan de la face opposée, connue elle-même ; on connaît de plus la cote d'un point de cette arête et, par suite, on pourra construire les éléments inconnus du trièdre, en opérant comme dans le premier cas.

198. **Troisième cas.** — *Construire un trièdre connaissant deux faces et le dièdre opposé à l'une d'elles.*

Appelons a, b, B les éléments connus, et prenons comme plan horizontal le plan de la face connue adjacente au dièdre connu, c'est-à-dire le plan de la face a. Comme dans les deux cas précédents, nous allons chercher la projection horizontale et la cote d'un point quelconque de l'arête SA, opposée à la face a.

Pour cela, prenons d'abord comme plan vertical un plan quelconque perpendiculaire à l'arête SC, intersection des plans des deux faces connues a et b, et cherchons la trace (α, α') de l'arête SA sur ce plan. A cet effet, rabattons la face b, autour de SC, en $CS\alpha_2$. En décrivant la circonférence de centre C et de rayon $C\alpha_2$, on aura un premier lieu géométrique du point α'. Nous obtiendrons un second lieu géométrique du même point en tenant compte de ce que le dièdre B est connu. Pour cela, prenons maintenant comme plan vertical un plan quelconque perpendiculaire à l'arête SB. Rien n'empêche de mener ce plan par le point C, de sorte que la nouvelle ligne de terre x_1y_1 sera la perpendiculaire à SB menée par le point C.



Dans le système x_1y_1 la trace verticale du plan ASB est la droite $\omega h'_1$ telle que l'angle $x_1\omega h'_1$ soit égal à l'angle plan du dièdre B. Si donc on prend $Ch' = Ch'_1$, la trace verticale du même plan, dans le système xy, sera Bh'. L'arête SA étant située dans le plan ASB, il est clair que Bh' est un second lieu géométrique du point α', qui est alors déterminé par l'intersection de Bh' avec la circonférence de

centre C et de rayon $C\alpha_2$. Le point α' étant ainsi déterminé, on obtient le point α, situé sur xy, par une ligne de rappel, et le problème est résolu. On pourra, du reste, achever de déterminer les éléments inconnus du trièdre en opérant comme dans le premier cas.

Discussion. — Occupons-nous maintenant de la discussion du problème. Pour qu'il soit possible, il faut, non seulement que la droite Bh' rencontre la circonférence $C\alpha_2$, mais encore qu'elle la rencontre au-dessus de xy ; car il est manifeste qu'à un point de rencontre de ces deux lignes, situé au-dessous de xy, correspond un trièdre dans lequel le dièdre connu n'est pas B, mais $180^\circ - B$. Si ces conditions sont remplies, c'est-à-dire si Bh' rencontre la circonférence et la rencontre au-dessus de xy, il y aura deux, une ou zéro solutions suivant que le nombre des points de rencontre au-dessus de xy sera égal à 2, 1 ou 0.

Cherchons d'abord à exprimer que les deux lignes se coupent. Observons, pour cela, que la circonférence peut être considérée comme la base, située dans le plan vertical, d'un cône de révolution engendré par $S\alpha_2$ en tournant autour de SC, et que Bh' est la trace verticale d'un plan mené par le sommet de ce cône. Dire, alors, que Bh' coupe la circonférence, revient à dire que le plan SBh' coupe le cône, ce qui exige que la distance d'un point quelconque de l'axe du cône à une génératrice soit plus grande que la distance du même point au plan sécant. Comme point quelconque de l'axe du cône, prenons le point C. La distance de ce point au plan SBh' est projetée verticalement en vraie grandeur suivant CD, dans le système x_1y_1, puisque dans ce système le plan SBh' est de bout et a pour trace verticale $\omega h'_1$. D'autre part, une génératrice du cône étant la droite $S\alpha_2$ du plan horizontal, la distance du point C à cette génératrice est CE. Une condition de possibilité du problème est donc

$$CE \geqslant CD.$$

Mais on a

$$CE = CS \sin b, \qquad CD = C\omega \sin B = CS \sin a \sin B.$$

L'inégalité précédente peut donc s'écrire

$$\sin b \geqslant \sin a \sin B.$$

Pour exprimer, maintenant, que les deux lignes se coupent au-dessus de xy, il y aura lieu de tenir compte à la fois de la nature du dièdre B et de la position du point B par rapport à la circonfé-

rence $C\alpha_2$. Nous aurons donc plusieurs hypothèses à examiner. La remarque suivante facilitera l'examen de ces hypothèses :

Si l'on nomme B' l'angle xBh', les deux angles B et B' sont toujours de même nature. En d'autres termes, B' est aigu, droit ou obtus suivant que B est aigu, droit ou obtus. Cette remarque résulte immédiatement de la propriété de la ligne de plus grande pente d'un plan. En effet, les deux droites $\omega h'_1$ et Bh' sont les projections verticales dans le système xy et dans le système x_1y_1 des sections faites dans le plan SBh' par les deux plans verticaux x_1y_1 et xy; elles partent toutes deux du point représenté en (h, h') dans le système xy, en (h_1, h'_1) dans le système x_1y_1 ; de plus, la première est une ligne de plus grande pente du plan SBh'.

Cela posé, nous allons faire la discussion en supposant les deux angles a et b aigus.

Premier cas. — Supposons $B < 90^\circ$; alors on a aussi $B' < 90^\circ$, et si l'on a

$$\sin b > \sin a \sin B,$$

la droite Bh' rencontre la circonférence $C\alpha_2$ en deux points situés au-dessus de xy si le point B est extérieur à cette circonférence, c'est-à-dire si $CB > C\alpha_2$; en un seul si $CB \leqslant C\alpha_2$. Or, on a

$$CB = CS \operatorname{tg} a, \qquad C\alpha_2 = CS \operatorname{tg} b.$$

On aura donc deux solutions si

$$\operatorname{tg} a > \operatorname{tg} b,$$

et une seule si

$$\operatorname{tg} a \leqslant \operatorname{tg} b.$$

Et comme a et b sont deux angles aigus, on aura deux solutions si

$$a > b,$$

et une seule si

$$a \leqslant b.$$

Ajoutons que, si au lieu de $\sin b > \sin a \sin B$, on avait

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

le plan SBh' serait tangent au cône engendré par $S\alpha_2$ en tournant autour de SC, le point B serait nécessairement extérieur à la circonférence $C\alpha_2$, et l'on aurait deux solutions confondues.

Deuxième cas. — Supposons $B = 90^\circ$; alors on a aussi $B' = 90^\circ$ et le problème admettra :

0 solution si $a \geqslant b$;
2 solutions si $a < b$;

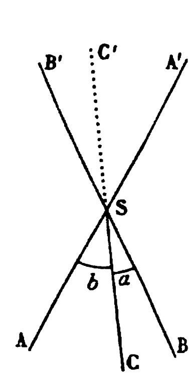
car, dans ce dernier cas il n'y a bien qu'un seul point de rencontre situé au-dessus de xy, mais le point situé au-dessous est symétrique du premier par rapport au plan horizontal et donne un trièdre admettant comme éléments des éléments respectivement égaux à ceux qui sont donnés.

Troisième cas. — Supposons $B > 90°$; alors B′ est aussi plus grand que 90°, et il y aura :

0 solution si $a \geqslant b$;
1 solution si $a < b$.

Il reste à examiner les autres hypothèses que l'on peut faire sur les angles a et b.

Supposons donc, d'abord, a obtus et b aigu. Au lieu de construire le trièdre SABC, on peut alors construire le trièdre SAB′C dans lequel les deux faces connues sont des angles aigus et dans lequel le dièdre SB′ est égal au dièdre SB. Le trièdre SAB′C étant ainsi construit, on en déduit le trièdre SABC, et le problème est ramené à un autre de même nature mais dans un cas discuté.



Supposons, maintenant, b obtus et a aigu. Dans ce cas, on commencera par construire SA′BC dont les faces connues sont des angles aigus, et on en déduira ensuite SABC.

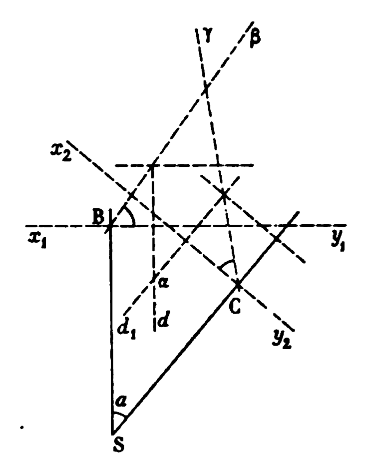
Supposons enfin que les deux faces connues soient obtuses toutes deux. On commencera alors par construire le trièdre SABC′ et on en déduira ensuite le trièdre SABC.

On voit donc que, dans tous les cas, la discussion se ramène à celle que nous avons donnée en détail.

199. Quatrième cas. — *Construire un trièdre connaissant une face et les deux dièdres adjacents à cette face.*

Supposons que l'on connaisse la face a et les dièdres adjacents B et C, et prenons comme plan horizontal le plan de la face a. Comme dans les cas précédemment examinés, nous allons déterminer la projec-

tion horizontale et la cote d'un point de l'arête SA. Pour cela, prenons d'abord un plan vertical x_1y_1 perpendiculaire à SB. La trace du plan ASB sur ce plan vertical sera une droite Bβ telle que l'angle yBβ soit égal au rectiligne du dièdre B.

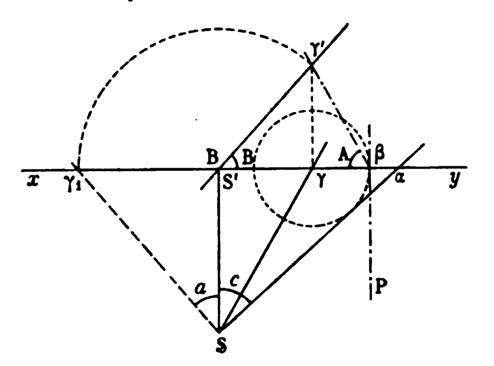


Prenons maintenant comme plan vertical un plan quelconque x_2y_2 perpendiculaire à SC. La trace du plan ASC sur ce plan vertical sera une droite Cγ telle que l'angle x_2Cγ soit égal au rectiligne du dièdre C, et il s'agit de trouver la projection horizontale et la cote d'un point quelconque de l'intersection des deux plans SBβ et SCγ. Pour cela, coupons par un plan horizontal de cote arbitraire h; nous obtenons ainsi deux droites projetées horizontalement l'une en d, l'autre en d_1. Ces deux droites d et d_1 se coupent en un point α, qui est la projection horizontale du point cherché, dont la cote est d'ailleurs h.

Le problème est toujours possible et n'admet que deux solutions, pour lesquelles les deux trièdres obtenus sont symétriques.

200. Cinquième cas. — *Construire un trièdre connaissant une face, un dièdre adjacent et le dièdre opposé à cette face.*

Ce cas peut être ramené au troisième par la considération des trièdres supplémentaires, mais nous allons le résoudre directement.



Pour cela, appelons a, B et A les éléments connus, et prenons : comme plan horizontal, le plan de la face c adjacente aux deux dièdres connus ; comme plan vertical, un plan quelconque perpendiculaire à l'arête SB. Le dièdre B étant connu, on a

immédiatement la trace verticale $B\gamma'$ du plan CSB. On en déduit facilement la trace verticale (γ, γ') de l'arête SC; car on peut construire le rabattement $BS\gamma_1$ de la face a, et en relevant on obtient facilement le point γ' et, par suite, le point γ; de sorte que l'arête SC est projetée en $(S\gamma, S'\gamma')$. Il ne reste plus alors qu'à mener par cette droite un plan faisant l'angle A avec le plan horizontal. Or, le plan de bout $P\beta\gamma'$ passe par le point (γ, γ') et fait l'angle A avec le plan horizontal, si l'on a mené $\beta\gamma'$ telle que l'angle $x\beta\gamma'$ soit égal au rectiligne du dièdre A. Faisons alors tourner ce plan autour de l'axe vertical du point (γ, γ') jusqu'à ce que sa trace horizontale passe par le point S. Dans cette nouvelle position il passera par $(S\gamma, S'\gamma')$, et comme son angle avec le plan horizontal n'a pas varié, on aura le plan cherché. D'ailleurs, la trace horizontale $P\beta$ restant tangente à la circonférence de centre γ et de rayon $\gamma\beta$, on aura la nouvelle trace horizontale du plan en menant du point S une tangente à cette circonférence.

Supposons que la tangente $S\alpha$ menée du point S à la circonférence soit l'une des arêtes de l'un des trièdres cherchés. Pour déterminer alors les éléments inconnus de ce trièdre, il suffit d'observer que l'on connaît la face c, la projection de la troisième arête sur le plan de cette face et la cote d'un point (γ, γ') de cette arête.

Pour que le problème soit possible, il faut non seulement que l'on puisse mener du point S des tangentes à la circonférence de rayon $\gamma\beta$, mais encore que le trièdre obtenu admette comme éléments les éléments donnés et non leurs suppléments. Nous allons exprimer ces diverses conditions en supposant que les dièdres A et B sont aigus, le cas d'un ou de deux dièdres obtus s'y ramenant par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le troisième cas. Nous observerons, d'ailleurs, qu'il est toujours permis de supposer que la demi-droite $(S\gamma, S'\gamma')$ est l'une des arêtes SC du trièdre, et que l'on peut prendre la demi-droite SS' comme deuxième arête SB si l'angle a est aigu, le prolongement de SS' au-delà du sommet si l'angle a est obtus; de sorte que, dans le cas où les dièdres A et B sont aigus, la demi-droite $S\gamma$, projection de l'arête SC sur le plan de la face ASB, doit être située dans l'angle formé par les demi-droites SB et SA, celle-ci étant inconnue et devant, d'après ce qui précède, être choisie parmi les tangentes menées du point S à la circonférence $\gamma\beta$.

Cela posé, la condition exprimant que le point S est extérieur à

cette circonférence est

(1) $$S\gamma > \gamma\beta.$$

Mais on a $S\gamma = \sqrt{\overline{SS'}^2 + \overline{S'\gamma}^2}$; d'autre part, si l'angle a est aigu, on a

$$S'\gamma = S'\gamma' \cos B = SS' \operatorname{tg} a \cos B.$$

Maintenant la considération des trois triangles rectangles $\gamma\beta\gamma'$, $\gamma S'\gamma'$, $SS'\gamma_1$ donne

$$\gamma\beta = \gamma\gamma' \operatorname{cotg} A = S'\gamma' \sin B \operatorname{cotg} A = SS' \operatorname{tg} a \sin B \operatorname{cotg} A,$$

de sorte que l'inégalité (1) s'écrit successivement

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a \cos^2 B} > \operatorname{tg} a \sin B \operatorname{cotg} A,$$

$$\cos^2 a + \sin^2 a\,(1 - \sin^2 B) > \sin^2 a \sin^2 B \operatorname{cotg}^2 A,$$

$$\sin^2 A > \sin^2 a \sin^2 B,$$

(2) $$\sin A > \sin a \sin B,$$

puisque tous les angles sont inférieurs à 180°. Si l'angle a était obtus, il faudrait, dans cette inégalité, remplacer a par $180° - a$, ce qui ne changerait rien.

Ainsi donc, quand les dièdres A et B sont aigus, la première condition de possibilité du problème est exprimée par l'inégalité (2), quelle que soit la nature de l'angle a.

Pour obtenir les autres, nous distinguerons trois cas, suivant que a est aigu, droit ou obtus.

1° Si a est aigu, l'arête SB est confondue avec SS'; comme la demi-droite $S\gamma$ doit être située dans l'angle des demi-droites SB et SA, on voit que si l'on a dièdre A $\geqslant$ dièdre B, il y a une solution pour laquelle SA coïncide avec la demi-tangente $S\alpha$, et que si l'on a dièdre A $<$ dièdre B, il y a deux solutions : pour la première solution SA coïncide avec la demi-tangente analogue à $S\alpha$, et elle coïncide avec le prolongement de l'autre tangente au-delà du point S pour la deuxième solution.

2° Si a est droit, le problème admet deux solutions symétriques si dièdre A $>$ dièdre B, et pas de solutions si dièdre A $\leqslant$ dièdre B.

3° Si a est obtus, l'arête SB coïncide avec le prolongement de SS' au-delà du sommet et il y a :

1 solution si dièdre A $>$ dièdre B;

0 solution si dièdre A $\leqslant$ dièdre B.

En résumé, quand le problème est possible, il admet une ou deux solutions.

201. Sixième cas. — *Construire un trièdre connaissant les trois dièdres.*

On construit le trièdre supplémentaire, et le problème est ainsi ramené à la construction d'un trièdre connaissant les trois faces. Nous en donnerons plus tard une solution directe (voir les plans tangents à la sphère).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VI

1. Trouver la distance des traces d'une droite.

2. On donne la projection horizontale d'une droite et les projections du point de rencontre de cette droite avec le premier plan bissecteur. Construire la projection verticale de la droite connaissant la longueur interceptée par les deux plans de projection sur cette droite.

3. On donne la projection horizontale d'une droite, l'angle que cette droite fait avec le plan horizontal et la cote d'un point appartenant à la droite ; trouver la trace horizontale de celle-ci.

4. Trouver la distance d'un point pris sur la ligne de terre à un plan quelconque.

5. Même question en remplaçant le plan quelconque par un plan parallèle à la ligne de terre.

6. Trouver la distance de deux plans parallèles.

7. Mener un plan parallèle à un plan P et situé à une distance donnée de celui-ci.

8. Trouver un point situé à des distances données de trois plans donnés.

9. Trouver la distance d'un point à un plan passant par la ligne de terre.

10. Trouver la distance d'un point à la ligne de terre.

11. Même question en remplaçant la ligne de terre par une parallèle à cette ligne.

12. Trouver la distance d'un point à une droite de profil.

13. On donne un plan et un point. Le plan est déterminé par sa trace horizontale et par l'angle qu'il fait avec le plan horizontal ; le point est déterminé par sa projection horizontale et par sa cote. Trouver la distance du point au plan.

14. On donne un point et une droite. La droite est déterminée par sa projection horizontale, par sa trace horizontale, et par l'angle qu'elle fait avec le plan horizontal ; le point est déterminé par sa projection horizontale et par sa cote ; trouver la distance du point à la droite.

15. Trouver la plus courte distance d'une droite quelconque et de la ligne de terre.

16. Même question en remplaçant la ligne de terre par une parallèle à cette ligne.

17. Trouver la plus courte distance d'une horizontale et d'une frontale.

18. Trouver la plus courte distance d'une droite située dans le plan horizontal et d'une droite située dans le plan vertical.

19. Trouver la plus courte distance d'une droite de profil et d'une droite quelconque. — Examiner les cas particuliers où la droite quelconque est horizontale, de front ou parallèle à la ligne de terre.

20. On connaît les projections d'une droite D, la projection horizontale d'une droite D_1 et la projection horizontale de la perpendiculaire commune Δ à D et D_1 ; trouver : 1° la projection verticale de D_1 ; 2° la projection verticale de Δ.

21. On donne les projections d'une droite D, la projection horizontale d'une droite D_1, la longueur de la plus courte distance des deux droites et le point de rencontre de D avec la perpendiculaire commune à D et à D_1 ; construire les projections de la perpendiculaire commune et la projection verticale de D_1.

22. Trouver la distance de deux droites parallèles.

23. Trouver l'angle de deux droites dont l'une est horizontale ou de front.

24. Trouver l'angle d'une droite quelconque et de la ligne de terre.

25. Mener par un point donné A une droite faisant un angle donné avec une droite D et située à une distance donnée de D.

26. Trouver l'angle d'un plan de profil et d'un plan quelconque.

27. Trouver l'angle de deux plans dont l'intersection est de profil.

28. Trouver l'angle des plans qui projettent une droite sur les deux plans de projection.

29. On donne les traces horizontales de deux plans qui se coupent sous un angle donné et la projection horizontale de l'intersection des deux plans; trouver la projection verticale de cette intersection.

30. Trouver l'angle de deux plans passant par la ligne de terre ou parallèles à cette ligne.

31. Trouver l'angle de deux plans ayant leurs traces en ligne droite.

32. Mener une droite rencontrant deux droites données et faisant avec elles des angles donnés. — Examiner les cas particuliers où les deux droites sont horizontales ou de front.

33. Construire un trièdre trirectangle connaissant sa trace sur le plan horizontal.

34. Même question en supposant connues les projections horizontales des trois arêtes et la trace horizontale de l'une d'elles.

35. Mener par un point donné une droite faisant des angles donnés avec deux plans donnés.

36. On donne un angle de l'espace et les angles que ses côtés font avec la verticale du sommet; trouver la projection horizontale de l'angle donné (réduction de l'angle à l'horizon).

37. Par un point donné, mener une droite faisant des angles donnés avec une droite et un plan donnés.

38. xy étant la ligne de terre, on donne sur le plan horizontal le triangle ABC, dont l'un des côtés AB est la ligne de terre. Les côtés de ce triangle ont respectivement pour valeurs $AB = 100^{mm}$, $BC = 68^{mm}$, $CA = 100^{mm}$.

x A B y C

1° Construire, au-dessus du plan horizontal, un tétraèdre ayant pour base le triangle ABC et tel que les dièdres $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ aient respectivement pour valeurs

dièdre $AB = 80°$, dièdre $BC = 60°$, dièdre $CA = 80°$.

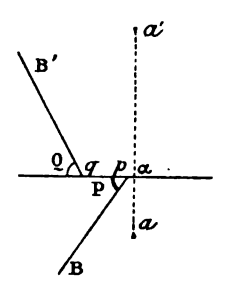
2° Construire les projections des sphères circonscrite et inscrite à ce tétraèdre.

(*École navale, concours de 1889.*)

39. Tracer les projections d'un tétraèdre SABC satisfaisant aux conditions suivantes. On donne les projections (a, a') de A ($a\alpha = 4^{cm}$, $a'\alpha = 6^{cm}$). Le plan prolongé de la base ABC fait un angle de 40° avec la partie postérieure du plan horizontal et passe par un point donné i de xy ($\alpha i = 11^{cm}$). Le sommet B est dans le plan horizontal, à l'intersection de la perpendiculaire abaissée de A sur la trace horizontale du plan prolongé de ABC. L'arête SC est perpendiculaire au plan de la base ABC et son prolongement coupe xy en un point donné γ ($\alpha\gamma = 4^{cm}$). La longueur de l'arête SC est égale à 7^{cm} et S est supposé au-dessus du plan de la base. Placer α au point ω, i sur ωx et γ sur αy.

(*École navale, concours de 1884.*)

40. Etant donnés un point (a, a') et une droite (B, B'), dont les positions sont déterminées comme il suit :



$a\alpha = 2^{cm}$, $\alpha p = 0^{cm},35$, $P = 56°30'$,
$\alpha a' = 5^{cm}$, $\alpha q = 1^{cm},55$, $Q = 60°$:

1° Mener par le point (a, a') une droite (X, X') perpendiculaire à la droite (B, B') et faisant avec xy un angle $\varphi = 49°$;

2° Construire la plus courte distance de la droite (B, B') et de la droite (X, X');

3° Construire sur cette plus courte distance et sur les deux droites (X, X'), (B, B') un parallélépipède rectangle dont les côtés pris respectivement le long de (B, B') et de (X, X') ont pour longueurs 3^{cm} et $3^{cm},5$.

Remarque. — Le problème admet plusieurs solutions. On choisira celle des droites (X, X') qui est la moins inclinée sur le plan horizontal, et pour parallélépipède celui qui est le plus en haut à gauche.

(*École navale, concours de 1880.*)

41. On donne un point H dans le plan horizontal, à 4^{cm} de la ligne de terre, et un point V dans le plan vertical, éloigné de xy de 6^{cm}. On donne la longueur de la droite HV de l'espace, longueur qui est de $10^{cm},7$. Mener par cette droite un plan faisant un angle de 50° avec le plan bissecteur du premier dièdre.

(*École navale, concours de 1882.*)

42. On a un point A situé dans le second dièdre, distant de 4^{cm} du plan horizontal et de 3^{cm} du plan vertical. Mener par ce point une droite faisant avec le plan horizontal un angle de 35° et avec le plan vertical un angle de 41°. Parmi les droites qui satisfont au problème, considérer seulement celle qui a sa trace verticale la plus éloignée du plan horizontal et située sur la gauche du plan de profil contenant A. Déterminer la plus courte distance de cette droite et de xy.

(*École navale, concours de 1883.*)

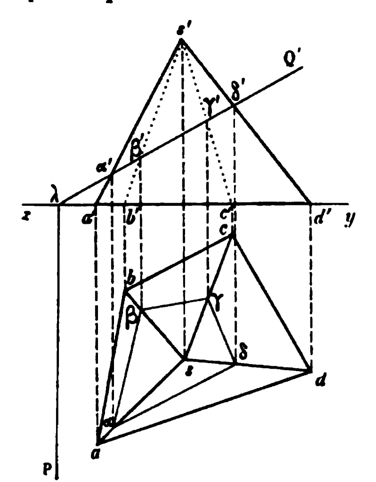
CHAPITRE VII

SECTIONS PLANES, INTERSECTIONS ET OMBRES DES POLYÈDRES

§ I. — *Sections planes des polyèdres.*

202. Représentation des polyèdres. — En Géométrie descriptive un corps, quel qu'il soit, est représenté par ses projections. On se borne, bien entendu, à ne construire que les projections des éléments indispensables à la détermination complète de tous les autres éléments, et qui permettent de se faire une idée de la forme et de la position du corps à la seule inspection de son épure. En particulier, pour représenter un polyèdre, on construit les projections de toutes les arêtes limitées aux sommets.

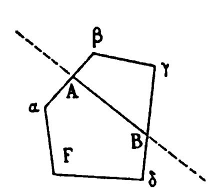
203. Méthodes pour déterminer les sections planes des polyèdres quelconques. — 1° La méthode la plus commode pour déterminer une section plane d'un polyèdre quelconque consiste à amener le plan sécant à être perpendiculaire à l'un des plans de projection, à l'aide d'un changement de plan. En effet, si le plan sécant est, par exemple, perpendiculaire au plan vertical, le polygone d'intersection est projeté verticalement sur la trace verticale du plan sécant, et l'on en déduit la projection horizontale par des lignes de rappel. L'épure ci-contre représente précisément la section faite dans une pyramide (*sabcd*, *s'a'b'c'd'*) par le plan de bout PλQ'. Les sommets de



la projection verticale du polygone d'intersection sont α', β', γ', δ'. On en déduit les projections horizontales α, β, γ, δ des sommets du polygone d'intersection, en menant les lignes de rappel des points α', β', γ', δ' jusqu'aux points de rencontre avec les projections horizontales des arêtes correspondantes.

L'emploi de cette méthode pour la construction d'une section plane d'un polyèdre quelconque exige la construction d'une nouvelle projection du polyèdre : c'est d'ailleurs le seul inconvénient de la méthode, et, cette nouvelle projection étant construite, on n'a plus que des constructions indispensables pour achever la détermination de la section. La méthode suivante, moins simple, permet d'éviter le changement de plan :

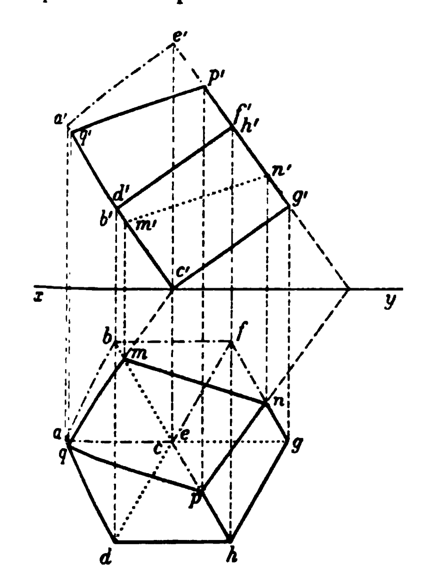
2° Cette méthode consiste à déterminer directement les droites d'intersection du plan sécant avec les faces successives du polyèdre, et à limiter chacune de ces droites à sa partie utile, comprise, bien entendu, à l'intérieur de la face dans le plan de laquelle elle se trouve. Il suit évidemment de là que certaines des droites ainsi obtenues pourront être complètement inutiles. C'est même une difficulté de la méthode de trouver une face dont la section par le plan sécant présente une partie utile, c'est-à-dire soit un côté du polygone d'intersection. Seulement, dès qu'on a trouvé une face remplissant ces conditions, c'est-à-dire dès qu'on a trouvé un premier côté du polygone d'intersection, on n'a plus aucun tâtonnement à faire pour obtenir les côtés suivants. Supposons en effet que l'intersection du plan sécant avec le plan d'une face F présente une partie utile, AB. La droite AB sera un premier côté du polygone d'intersection, et on en aura un second en déterminant l'intersection du plan sécant, soit avec la face du polyèdre adjacente à F suivant l'arête $\gamma\delta$, soit avec la face du polyèdre adjacente à F suivant l'arête $\alpha\beta$. On obtient ainsi un second côté du polygone à l'aide duquel on en détermine un troisième, et ainsi de suite. Pour procéder méthodiquement, il est bon de supposer le polygone parcouru dans un sens déterminé AB..., et de déterminer les côtés successifs ainsi parcourus jusqu'à ce que l'on revienne au point de départ.



Enfin, quand on a construit un polygone d'intersection, il est bon de recommencer les essais pour s'assurer qu'il n'en existe pas d'autres, ou

pour construire d'autres polygones d'intersection, s'ils existent.

L'épure ci-dessous a été exécutée d'après la méthode qui vient d'être exposée. Elle représente la section faite par le premier plan bissecteur dans un cube ayant une diagonale verticale et une arête aboutissant à l'une des extrémités de cette diagonale de front. Le premier côté du polygone d'intersection qui ait été déterminé est le côté (qm, $q'm'$), situé dans le plan de la face projetée horizontalement en $abcd$. Pour déterminer ce côté, on a profité de ce que le plan de cette face est de bout ; on a donc déterminé l'intersection du plan de cette face avec le premier plan bissecteur. La projection verticale de cette intersection étant $a'b'c'$, la projection horizontale est la droite $c'mq$, symétrique de $a'b'c'$ par rapport à xy. La partie utile de l'intersection est d'ailleurs (qm, $q'm'$) ; de sorte que si l'on suppose la section parcourue dans le sens de q vers m, le côté suivant sera dans la face du cube adjacente à la face projetée en $abcd$ et passant par l'arête (bc, $b'c'$). Cette face est projetée horizontalement en $cbfg$; on a donc cherché l'intersection de l'arête (fg, $f'g'$) et l'on a profité pour cela de ce que cette arête est dans le plan de bout mené par $f'g'$. On a ainsi obtenu, du même coup, le côté (np, $n'p'$) du polygone d'intersection, polygone qui est, comme l'on sait, un parallélogramme.



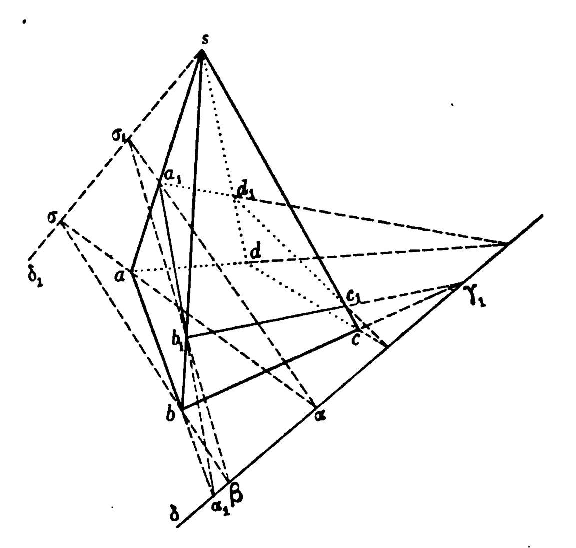
Pour la ponctuation, on a enlevé toute la partie du cube située au-dessus du plan sécant, et on a supposé le cube solide et opaque. Les projections des lignes enlevées ont été tracées en traits mixtes (-·-·-·-·-).

204. Sections planes des prismes et des pyramides. — Nous avons exposé plus haut deux méthodes pour déterminer une section plane d'un polyèdre quelconque. Ces méthodes sont applicables aux prismes et aux pyramides. Toutefois, quand le polyèdre est un prisme ou une

pyramide, il convient de procéder autrement. On détermine les points de rencontre des arêtes du prisme ou de la pyramide avec le plan sécant ; on obtient ainsi les sommets du polygone d'intersection et on en déduit facilement les côtés.

Pour traiter le problème avec plus de détails, il faut distinguer le cas de la pyramide de celui du prisme.

Proposons-nous donc d'abord de déterminer la section faite dans une pyramide SABCD par un plan P coupant le plan de base de la pyramide suivant la droite Δ. Figurons simplement la projection horizontale *sabcd* de la pyramide et la projection horizontale δ de Δ. Pour obtenir les points de rencontre des arêtes de la pyramide avec le plan P, on doit couper par des plans auxiliaires passant par les arêtes de la pyramide. Tous ces plans auxiliaires ont en commun le point S et il y a avantage à les faire passer par une droite $S\Sigma_1$ issue de ce point.

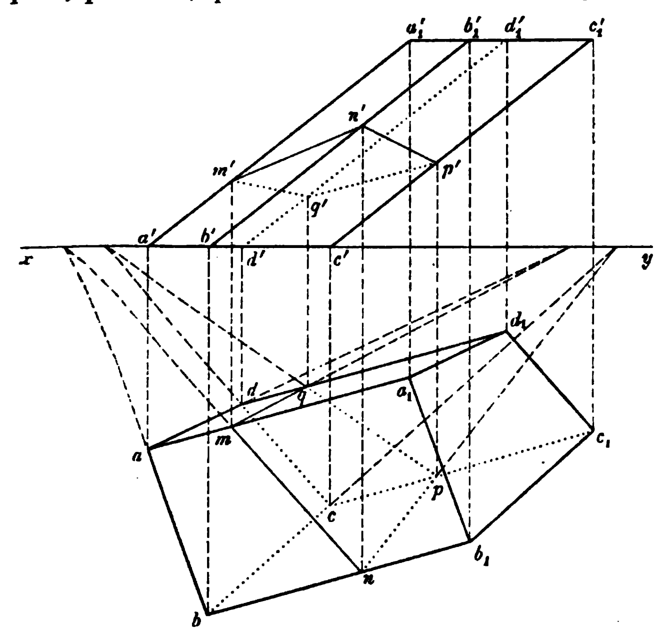


Soient σ et σ_1 les projections horizontales des points de rencontre respectifs de cette droite avec le plan de base de la pyramide et avec le plan P. Si l'on coupe par le plan auxiliaire Δ_1SA de l'angle projeté en σsa, ce plan coupe le plan de base de la pyramide suivant la droite projetée en σa et, par suite, il coupe Δ en un point projeté en α. Il en résulte qu'il coupe le plan P suivant la droite projetée en $\sigma_1\alpha$, et que le point de rencontre, A_1, de cette droite avec l'arête est le point de rencontre de SA avec le plan P : ce point est projeté en a_1.

Pour obtenir le point de rencontre de SB avec le plan P, on coupe de même par le plan auxiliaire Δ_1SB, ce qui donne le point B_1 projeté horizontalement en b_1, et ainsi de suite. On obtient ainsi la projection horizontale $a_1b_1c_1d_1$ du polygone d'intersection, et l'on en déduit la projection verticale par des lignes de rappel. On voit de plus quel est l'avantage de l'introduction des points σ et σ_1.

Si nous nous proposons maintenant de déterminer une section plane d'un prisme, le principe de la méthode reste le même. La seule différence consiste en ce que la droite Δ_1S est une droite quelconque parallèle aux arêtes du prisme, ce qui résulte, du reste, de ce que le prisme peut être considéré comme une pyramide dont le sommet est à l'infini dans la direction des arêtes.

205. Remarque. — Lorsque le premier sommet, A_1, du polygone d'intersection a été déterminé, on peut s'en servir pour déterminer les suivants *sans faire usage de nouveaux plans auxiliaires*. Il suffit de remarquer, pour cela, que les deux droites AB et A_1B_1 doivent ren-



contrer Δ au même point, sommet du trièdre formé par le plan de base de la pyramide ou du prisme, le plan P et le plan ASB. Dans la figure de la page précédente, ce point est projeté horizontalement au point

d'intersection, α_1, de ab et de δ. On joindra donc α_1 à a_1, ce qui donnera b_1, on joindra ensuite γ_1 à b_1, ce qui donnera c_1, et ainsi de suite.

L'épure ci-dessus a été exécutée comme application de la remarque que l'on vient de donner. Elle représente l'intersection d'un prisme quadrangulaire, reposant sur le plan horizontal, et d'un plan passant par la ligne de terre et par le point (m, m') de l'arète $(aa_1\ a'a'_1)$. Comme l'on connait le sommet (m, m') du polygone d'intersection, en appliquant la remarque on en déduit immédiatement les autres sommets (n, n'), (p, p'), (q, q').

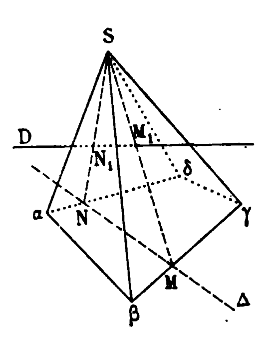
Pour faire la ponctuation, on a supposé opaques les surfaces des bases du prisme et la surface latérale.

206. Grandeur d'une section plane d'un polyèdre. — On détermine la grandeur d'une section plane d'un polyèdre en rabattant le plan sécant sur un plan horizontal ou sur un plan de front.

207. Points de rencontre d'une droite et de la surface d'un polyèdre. — Pour déterminer les points de rencontre d'une droite et de la surface d'un polyèdre, on coupe le polyèdre par un plan passant par la droite. Les points cherchés sont les points de rencontre de la droite avec les côtés du polygone d'intersection ainsi obtenu.

Comme plan passant par la droite, on prend généralement l'un des plans projetants, excepté quand le polyèdre est une pyramide ou un prisme.

Si le polyèdre est une pyramide, pour avoir ses points de rencontre avec une droite on peut couper la pyramide par un plan passant par son sommet et par la droite. Soit Δ la trace de ce plan sur le plan de base de la pyramide, et soit M l'un des points de rencontre de Δ avec le polygone de base. Si l'on joint le point M au sommet S de la pyramide, on obtient une droite tracée sur la surface de la pyramide, située dans le même plan que la droite donnée, et rencontrant celle-ci en un point qui est évidemment l'un des points cherchés. De sorte qu'il y a autant de points de rencontre de la droite donnée avec la surface de la pyramide que de points de rencontre de Δ avec le polygone de base.

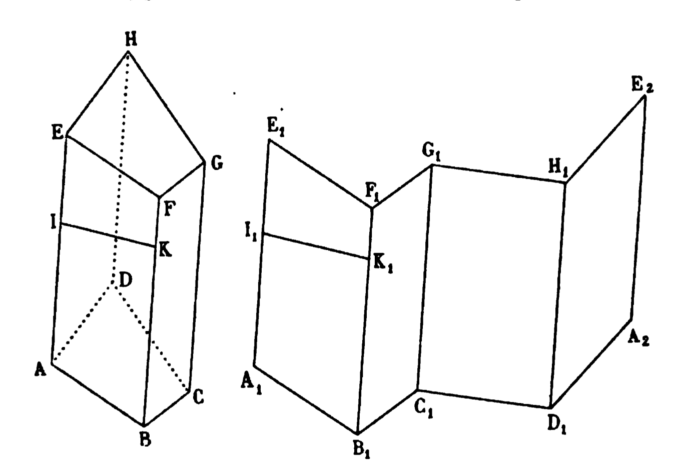


Si le polyèdre, au lieu d'être une pyramide, est un prisme, le plan

mené par la droite et par le sommet de la pyramide devient le plan mené par la droite parallèlement aux arêtes du prisme. On achève ensuite le problème comme pour la pyramide.

§ II. — *Développement de la surface latérale d'un prisme ou d'une pyramide.*

208. Développement de la surface latérale d'un prisme. — Considérons une surface prismatique quelconque ABCDEFGH, terminée, par exemple, par deux plans parallèles. Construisons à part, et dans un même plan, les parallélogrammes $A_1B_1E_1F_1$, $B_1C_1F_1G_1$, $C_1D_1G_1H_1$, $D_1A_2H_1E_2$, respectivement égaux aux faces latérales successives ABEF, BCFG, CDGH, DAHE du prisme, et placés extérieurement l'un à l'autre et à la suite les uns des autres. Nous obtenons ainsi une surface polygonale formée d'une suite de parallélogrammes, et qu'on appelle le *développement* de la surface latérale du prisme considéré.



Si le prisme est droit, les lignes $A_1B_1C_1D_1A_2$, $E_1F_1G_1H_1E_2$ se réduisent à deux droites perpendiculaires aux arêtes A_1E_1, B_1F_1, ..., et la surface polygonale est un rectangle.

Si, au lieu d'un prisme, on a un tronc de prisme, au lieu d'une suite de parallélogrammes, dans le développement, on a une suite de trapèzes.

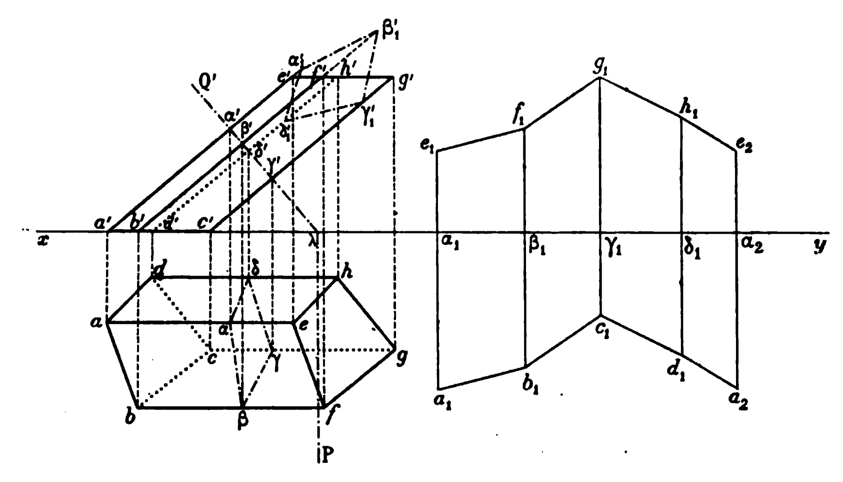
A une ligne polygonale tracée sur la surface latérale du prisme,

correspond une autre ligne polygonale, tracée dans le développement et qu'on appelle la *transformée* de la première. Si, par exemple, IK est un côté quelconque de la ligne tracée sur la surface latérale du prisme, pour avoir le côté correspondant I_1K_1 de la transformée, il suffit de prendre $A_1I_1 = AI$, $B_1K_1 = BK$, et de joindre les deux points I_1 et K_1 ainsi obtenus. Il suit évidemment de là que les côtés d'une ligne tracée sur la surface latérale du prisme coupent les arêtes de cette surface sous des angles respectivement égaux à ceux sous lesquels les côtés correspondants de la transformée coupent les arêtes latérales dans le développement. En particulier, la transformée d'une section droite est une ligne droite, mais la réciproque n'est pas vraie.

Il est évident, d'ailleurs, qu'une ligne et sa transformée ont le même périmètre; car les deux trapèzes ABIK, $A_1B_1I_1K_1$ sont évidemment égaux et donnent $I_1K_1 = IK$, de sorte que les deux lignes ont leurs côtés correspondants égaux et, par suite, le même périmètre.

Ces divers résultats s'énoncent brièvement en disant que *le développement conserve les longueurs et les angles des lignes tracées sur la surface latérale du prisme.*

Cela posé, supposons que l'on connaisse les projections du prisme, et proposons-nous de construire le développement de sa surface latérale. Comme il est nécessaire, pour cela, d'avoir les longueurs des



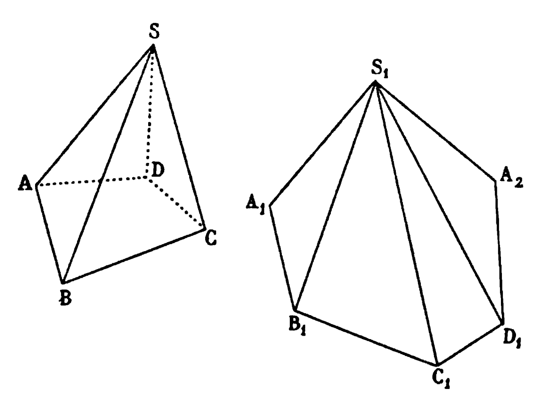
arêtes, nous supposerons celles-ci parallèles à l'un des plans de projection. S'il en était autrement, on ferait d'abord un changement de plan pour les amener dans cette position. Soit donc *abcd* la base d'un

prisme situé dans le plan horizontal et dont nous supposerons les arêtes de front. Pour éviter les longueurs, nous nommerons simplement le prisme par sa base. Pour construire le développement de la surface latérale de ce prisme, il y a avantage à en avoir une section droite; car une section droite a pour transformée une ligne droite. Soit donc $P\lambda Q'$ un plan perpendiculaire aux arêtes et soient $\alpha\beta\gamma\delta$ la projection horizontale, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ la projection verticale de la section du prisme par ce plan.

On obtient la grandeur de cette section par un rabattement du plan sécant. Dans l'épure ci-dessus, on a rabattu sur le plan vertical, et l'on a obtenu en $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1$ la section en vraie grandeur. Portons donc sur une droite quelconque, par exemple sur xy, les longueurs successives $\alpha_1\beta_1$, $\beta_1\gamma_1$, $\gamma_1\delta_1$, $\delta_1\alpha_2$, respectivement égales à $\alpha'_1\beta'_1$, $\beta'_1\gamma'_1$, $\gamma'_1\delta'_1$, $\delta'_1\alpha'_1$, et menons par ces points les perpendiculaires à xy. La ligne $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\alpha_2$ est le développement de la section droite, et les perpendiculaires à cette ligne, menées par les points α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, sont les positions, dans le développement, des arêtes du prisme qui passent par les sommets correspondants de la section droite.

Comme les arêtes du prisme sont projetées verticalement en vraie grandeur, en portant $a_1\alpha_1 = a'\alpha'$, $\alpha_1 e_1 = \alpha' e'$; $b_1\beta_1 = b'\beta'$, $\beta_1 f_1 = \beta' f'$, etc., on obtiendra en $a_1b_1c_1d_1a_2$, $e_1f_1g_1h_1e_2$ le développement cherché.

209. Développement de la surface latérale d'une pyramide. — Considérons une pyramide SABCD et construisons à part, et dans un même

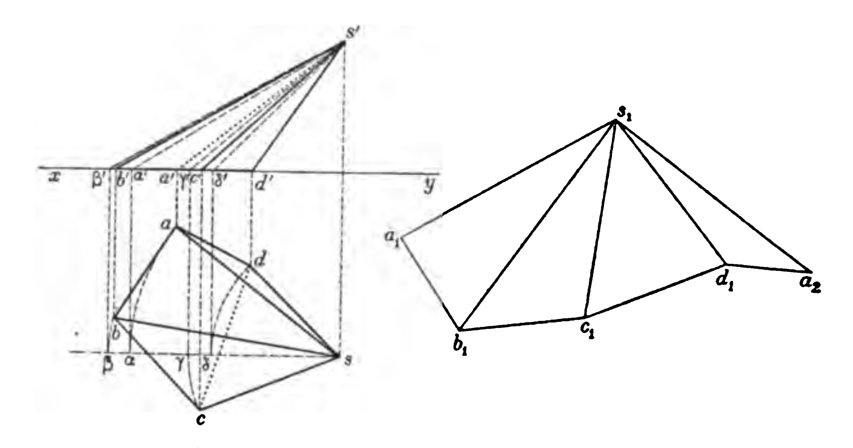


plan, les triangles $S_1A_1B_1$, $S_1B_1C_1$, $S_1C_1D_1$, $S_1D_1A_2$, respectivement égaux aux triangles SAB, SBC, SCD, SDA et placés les uns à la suite

des autres, comme l'indique la figure ci-dessus. Nous obtenons ainsi une surface polygonale formée d'une suite de triangles ayant un sommet commun, et qu'on appelle le développement de la surface latérale de la pyramide.

La ligne $A_1B_1C_1D_1A_2$ est la *transformée* de la ligne ABCDA, et, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans le cas du développement de la surface latérale d'un prisme, on voit comment on peut obtenir la transformée d'une ligne quelconque tracée sur la surface latérale de la pyramide. On voit de la même manière que le développement conserve les angles et les longueurs des lignes tracées sur cette surface.

Cela posé, considérons par exemple une pyramide (*sabcd*, *s'a'b'c'd'*), reposant par sa base sur le plan horizontal, et proposons-nous d'effectuer le développement de la surface latérale de cette pyramide. Pour

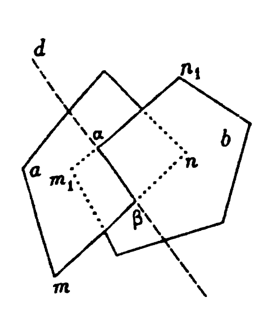


cela, cherchons d'abord les longueurs des arêtes en les rendant parallèles au plan vertical par des rotations autour de la verticale du point (s, s'). On a ainsi en $s'\alpha'$, $s'\beta'$, $s'\gamma'$, $s'\delta'$ les longueurs cherchées. Construisons maintenant en $s_1a_1b_1$, $s_1b_1c_1$, $s_1c_1d_1$, $s_1d_1a_2$ des triangles respectivement égaux à ceux qui sont projetés en *sab*, *sbc*, *scd*, *sda* sur le plan horizontal. Ces triangles sont faciles à construire, puisqu'on connaît les trois côtés de chacun d'eux, et l'on obtient ainsi une surface polygonale, $s_1a_1b_1c_1d_1a_2$, qui est le développement cherché. La ligne brisée $a_1b_1c_1d_1a_2$ est la transformée du polygone de base.

§ III. — *Intersection de deux polyèdres quelconques.*

210. Méthode générale. — Pour trouver l'intersection de deux polyèdrres quelconques, on pourrait construire les polygones d'intersection de l'un des polyèdres avec les plans des faces de l'autre, en ayant soin de ne conserver, dans chacun de ces polygones, que la partie utile, c'est-à-dire la partie située à l'intérieur de la face contenue dans le plan qui a fourni ce polygone. L'intersection se trouve ainsi rigoureusement déterminée. Cette méthode, simple en théorie, est compliquée dans la pratique, à cause des constructions inutiles auxquelles elle conduit. Voici alors comment il convient de procéder :

Appelons P le premier polyèdre, Q le second, et soient A et B deux faces appartenant respectivement à ces deux polyèdres. Soient *a* et *b* deux projections de même nom de ces deux faces, par exemple leurs projections horizontales. Supposons que les plans des deux faces A et B se coupent suivant une droite D, projetée horizontalement en *d*. Il est clair que la seule portion utile de cette droite est celle qui est projetée à l'intérieur de *a* et de *b à la fois* ; si $\alpha\beta$ est cette portion utile, en projection horizontale, $\alpha\beta$ sera un côté de la projection horizontale du polygone d'intersection.



Imaginons alors ce polygone parcouru par un mobile, dans le sens $\alpha\beta$ par exemple, et cherchons le côté suivant. Observons, pour cela, que ce mobile ne peut quitter une face qu'en traversant une arête ; il en résulte que si le mobile part du point β pour parcourir le côté suivant, il se déplace nécessairement sur la face B, d'une part, et sur la face A_1 du polyèdre P adjacente à A suivant l'arête MN, projetée en *mn*, de l'autre. En convenant de dire que $\alpha\beta$ est le *premier* côté du polygone d'intersection en projection horizontale, on voit que le *deuxième* côté s'obtient en prenant la projection horizontale de l'intersection des plans des deux faces A_1 et B. On limite d'ailleurs ce côté, comme le premier, à sa partie utile, et l'on recommence ensuite le même raisonnement pour obtenir le côté suivant. On continue

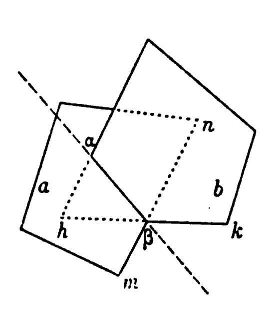
ainsi jusqu'à ce que l'on revienne au point de départ, ce qui est du reste facile à reconnaître ; car, si, pour fixer les idées, on suppose que l'on soit parti de deux faces présentant une disposition analogue à celle de la figure ci-dessus, le *dernier* côté de la projection horizontale du polygone d'intersection sera la projection horizontale de l'intersection du plan de la face A avec le plan de la face B_1, du polygone Q, adjacente à B, suivant l'arête M_1N_1, dont la projection horizontale est m_1n_1. On voit que la méthode n'exige aucun tâtonnement, si ce n'est pour la construction du premier côté du polygone d'intersection : c'est d'ailleurs là la seule difficulté sérieuse qu'elle présente.

Comme l'intersection peut se composer de plusieurs polygones, quand l'un de ces polygones a été déterminé, il est bon de s'assurer qu'il n'en existe pas d'autres, et de déterminer les autres, comme le premier, s'il en existe.

Ajoutons que nous ne nous sommes occupés que d'une projection de l'intersection, parce que, cette projection une fois déterminée, l'autre projection s'en déduit par des lignes de rappel.

211. Remarques. — Nous terminerons l'exposé de cette méthode par deux remarques.

1° Supposons qu'on ait déterminé un côté *quelconque* du polygone d'intersection, par exemple celui qui est projeté en $\alpha\beta$. Le polygone étant supposé parcouru dans le sens de α vers β, pour déterminer le côté suivant, nous avons admis que le point projeté en β se trouve sur l'arête MN du polygone P et à l'intérieur de la face B du polygone Q. Or, il peut arriver que ce point se trouve à la fois sur l'arête MN du polygone P et sur une arête HK du polygone Q ; ceci arrivera quand les deux arêtes MN et HK auront un point commun. Dans ce cas, appelons A_1 la face, autre que A, du polygone P qui passe par MN, et appelons de même B_1 la face du polygone Q, adjacente à B suivant HK. Le côté suivant du polygone d'intersection pourra être : ou l'intersection de A avec B_1, ou l'intersection de A_1 avec B, ou enfin l'intersection de A_1 avec B_1 ; au reste les deux polyèdres pourront se couper suivant deux polygones. On déterminera donc



le deuxième côté en prenant l'intersection soit de A avec B_1, soit de A_1 avec B_1, soit de B avec A_1, et on achèvera un premier polygone, puis on reviendra au point d'intersection des deux arêtes et on recommencera les opérations avec deux faces non employées.

2° Lorsque les deux polyèdres ont une face commune ou s'étendent à l'infini, un polygone d'intersection peut ne pas être fermé. Dans ce cas, on construit une partie de l'intersection en marchant dans le sens $\alpha\beta$ jusqu'à la face commune ou jusqu'à l'infini. On détermine ensuite l'autre partie de la même manière en marchant en sens contraire, après être revenu au point de départ.

212. Application à un exemple. — *Intersection d'un parallélépidède et d'une surface prismatique triangulaire indéfinie.*

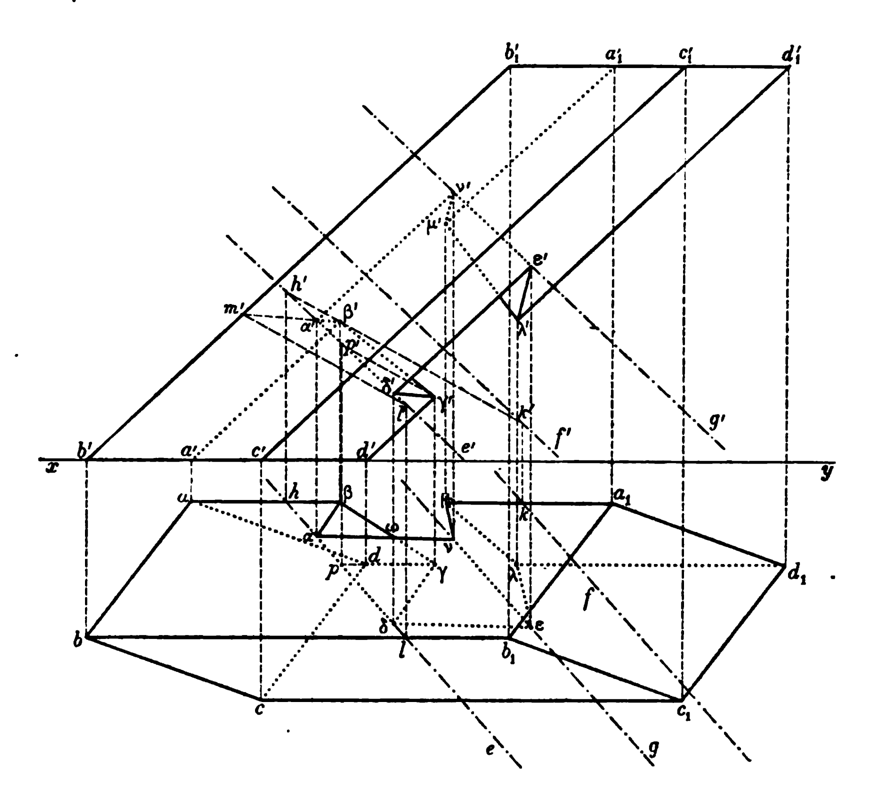
Supposons la base *abcd* du parallélépipède dans le plan horizontal et ses arêtes de front, et soient (e, e'), (f, f'), (g, g') les arêtes de la surface prismatique. Pour simplifier l'écriture, nous nommerons les faces du parallélépipède au moyen de leurs traces horizontales, et les faces du prisme au moyen des projections horizontales des arêtes qui les limitent. Par exemple, nous dirons : la face *ab* du parallélépipède et la face *ef* du prisme.

Nous nommerons de même une arête de l'un quelconque des polyèdres par sa projection horizontale.

Cela posé, nous déterminerons d'abord la projection verticale du polygone d'intersection, et nous en déduirons la projection horizontale par des lignes de rappel.

Commençons donc par déterminer l'intersection de deux faces, *ab* et *ef* par exemple. Ces deux faces se recouvrent en partie, soit en projection horizontale, soit en projection verticale et, en outre, les parties qui se recouvrent en projection horizontale et en projection verticale se correspondent par des lignes de rappel ; de sorte que rien n'indique, *a priori*, que ces deux faces ne se coupent pas, ou du moins que leur intersection est inutile. Pour obtenir cette intersection, on a cherché les points de rencontre des arêtes aa_1 et bb_1 avec la face *ef*, en coupant par les plans de front qui passent par ces arêtes. Le plan de front mené par aa_1 coupe la face *ef* suivant $(hk, h'k')$, ce qui donne un point de l'intersection projeté verticalement en β'. Le plan de front mené par bb_1 coupe *ef* suivant une parallèle à $(hk, h'k')$, de sorte qu'il suffit d'une seule ligne de rappel ll' pour

pouvoir construire la projection verticale $l'm'$ de cette parallèle : m' est la projection verticale du point de rencontre de bb_1 avec le plan de la face ef. Un côté de la projection verticale du polygone d'intersection est donc dirigé suivant $m'\beta'$, et sa partie utile est évidemment $\alpha'\beta'$.



Supposons alors le polygone parcouru dans le sens de α' vers β', et cherchons le côté suivant. Comme le point β' est à l'intérieur de $e'f'$ et sur le contour de $a'b'$, le côté suivant sera, en vertu de ce qui a été dit plus haut, l'intersection de la face ad avec la face ef. Nous disons *face* au lieu de plan de la face, pour simplifier le langage. Nous connaissons déjà un point de l'intersection de ces deux faces : c'est celui qui est projeté en β'. Pour en avoir un second, il suffit de construire le point de rencontre d'une arête quelconque autre que aa_1 de l'une des faces avec le plan de l'autre. Ici, on a construit le point de rencontre de dd_1 avec le plan ef, en coupant par le plan de front mené

par dd_1. On a profité aussi de ce que le plan de front mené par dd_1 coupe ef suivant une parallèle à $(hk, h'k')$, et l'on a obtenu la droite $p'\gamma'$ et le côté $\beta'\gamma'$ de la projection verticale du polygone d'intersection. On a déterminé ensuite le côté $\gamma'\delta'$ d'une manière analogue, et ainsi de suite, ce qui a donné finalement la projection verticale $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\mu'\nu'\alpha'$ du polygone d'intersection, puis sa projection horizontale $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\mu\nu\alpha$.

Il est bon d'ajouter, à cause de ce qui suit, et pour bien comprendre la ponctuation, que :

$(\alpha\beta, \alpha'\beta')$	est l'intersection de la face	*ab*	avec la face	*ef*;
$(\beta\gamma, \beta'\gamma')$	id.	*ad*	id.	*ef*;
$(\gamma\delta, \gamma'\delta')$	id.	*dc*	id.	*ef*;
$(\delta\varepsilon, \delta'\varepsilon')$	id.	*dc*	id.	*eg*;
$(\varepsilon\lambda, \varepsilon'\lambda')$	id.	*dc*	id.	*gf*;
$(\lambda\mu, \lambda'\mu')$	id.	*da*	id.	*gf*;
$(\mu\nu, \mu'\nu')$	id.	*ab*	id.	*gf*;
$(\nu\alpha, \nu'\alpha')$	id.	*ab*	id.	*ge*.

Il est bon d'ajouter enfin qu'il n'y a qu'un seul polygone d'intersection, et que l'on dit alors que les deux polyèdres sont *entaillés* l'un par l'autre.

Pour faire la ponctuation, on a supposé les deux polyèdres solides et opaques, et on a représenté le parallélépipède entaillé par le prisme. Cela veut dire qu'on a enlevé du prisme tout ce qui est extérieur au parallélépipède et du parallélépipède tout ce qui est intérieur au prisme. On a fait alors la distinction des parties vues et des parties cachées sur le corps ainsi obtenu. Les portions d'arêtes du parallélépipède intérieures au prisme ont été complètement enlevées, tandis qu'on a tracé en traits mixtes les portions d'arêtes du prisme extérieures au parallélépipède.

Sans entrer dans des détails qui seraient superflus après ce que l'on vient de dire, bornons-nous à observer que les seuls côtés du polygone d'intersection qui soient vus en projection horizontale sont : $\beta\alpha$, $\alpha\nu$, $\nu\mu$, parce qu'ils sont tracés sur la face vue, *ab*, du parallélépipède. Tous les autres côtés sont tracés sur des faces cachées et sont cachés ; toutefois, la portion $\beta\omega$ du côté $\beta\gamma$ tracé sur la face *ad* était cachée par la portion de la face *ab* qui a été enlevée ; $\beta\omega$ est donc vu. On ponctue de la même façon la projection verticale du polygone d'intersection.

§ IV. — *Intersection des prismes et des pyramides.*

213. La méthode générale, exposée dans le § III, pour trouver l'intersection de deux polyèdres s'applique à tous les polyèdres sans exception. Toutefois, quand les polyèdres sont des prismes ou des pyramides, on peut obtenir leur intersection par une méthode ne différant de la précédente que par les détails, et que nous allons faire connaître. Nous distinguerons, pour cela, trois cas, suivant que l'on a à trouver l'intersection de deux pyramides, d'une pyramide et d'un prisme, ou de deux prismes.

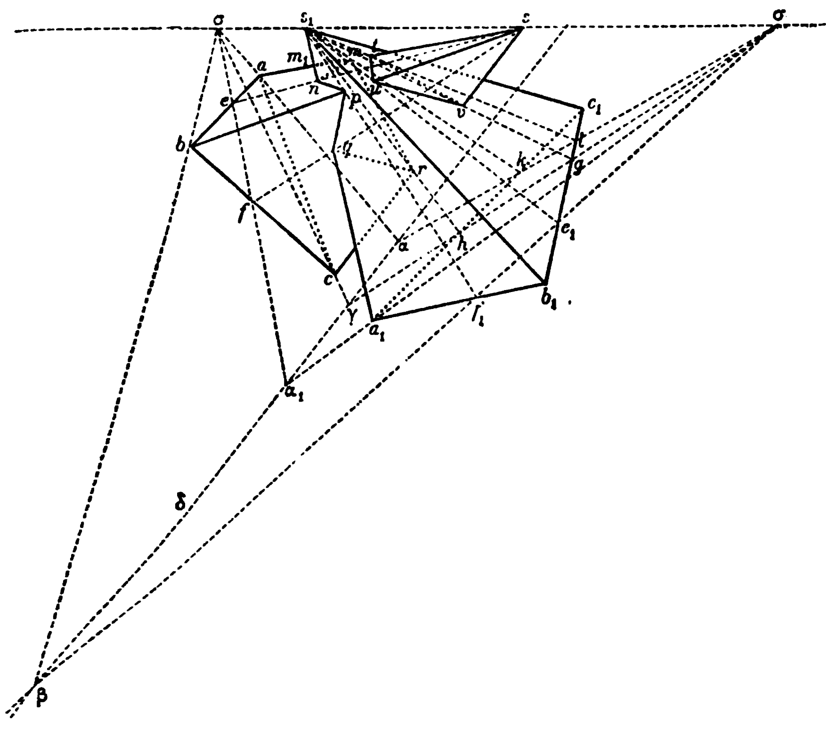
214. Intersection de deux pyramides. — Pour construire l'intersection de deux pyramides, on détermine les points de rencontre des arêtes de chacune d'elles avec les faces de l'autre. On a ainsi les sommets du polygone d'intersection et il ne reste plus qu'à joindre les points dans un ordre convenable, que nous indiquerons dans un instant.

Appelons S et S_1 les sommets des deux pyramides et désignons chacune de ces pyramides par la lettre du sommet. Pour avoir les points de rencontre d'une arête de la pyramide S avec les faces de la pyramide S_1, nous ferons usage de la méthode exposée au n° **207**, c'est-à-dire que nous couperons la pyramide S_1 par le plan qui passe par l'arête considérée et par le point S_1. Ce plan auxiliaire passant aussi par le point S, on voit que tous les plans auxiliaires dont nous aurons à faire usage passeront par une droite fixe, la ligne SS_1. Soient Σ et Σ_1 les points de rencontre respectifs de la ligne SS_1 avec les plans de base des pyramides S et S_1. Les traces des plans auxiliaires sur le plan de base de la pyramide S passent par le point Σ ; pareillement, les traces des plans auxiliaires sur le plan de base de la pyramide S_1 passent par Σ_1 ; de sorte que si l'on commence par déterminer ces points, on connaîtra à l'avance un point de la trace d'un plan auxiliaire quelconque sur le plan de base de la pyramide S, et aussi de la pyramide S_1. Pour obtenir l'une quelconque de ces traces, il suffira donc d'en avoir un second point.

Cela posé, nous allons entrer dans le détail des constructions. Il suffira, d'ailleurs, de déterminer une projection du polygone d'inter-

section, puisque l'autre s'en déduit par des lignes de rappel. Cherchons donc la projection horizontale, par exemple, de l'intersection de deux pyramides triangulaires projetées horizontalement en $sabc$, $s_1a_1b_1c_1$ et que nous nommerons toujours les pyramides S et S_1. Soient σ et σ_1 les projections horizontales respectives de Σ et de Σ_1.

Si les triangles de base ABC et $A_1B_1C_1$ sont dans des plans différents, on verra dans un instant qu'il y a avantage à construire l'intersection Δ de ces plans : soit δ la projection horizontale de Δ. Indiquons toute la suite des constructions à effectuer pour obtenir les points de rencontre de l'arête SA, par exemple, avec la pyramide S_1.



Pour les autres arêtes soit de S, soit de S_1, on aura des constructions analogues. Considérons donc le plan auxiliaire SAS_1. Il coupe le plan de base de la pyramide S suivant une droite projetée horizontalement en σa. Cherchons sa trace sur le plan de base de la pyramide S_1. Pour cela, observons que ce plan auxiliaire, le plan ABC et le plan $A_1B_1C_1$ forment un trièdre dont le sommet est le point de rencontre de ΣA

avec Δ, car ΣA et Δ sont deux arêtes de ce trièdre. La troisième arête du trièdre est justement la droite cherchée ; et comme cette droite passe par Σ_1, elle est déterminée par le point Σ_1 et par le sommet du trièdre. Or, il est clair que le sommet du trièdre est projeté horizontalement au point α, intersection de σa et de δ ; donc la trace du plan auxiliaire SAS_1 est projetée horizontalement suivant $\alpha\sigma_1$. Mais $\alpha\sigma_1$ coupe $a_1b_1c_1$ aux points k et l ; donc le plan auxiliaire coupe la pyramide S_1 suivant deux droites projetées horizontalement en s_1k et en s_1l. Les deux points m et t où les deux droites s_1k et s_1l rencontrent sa sont les projections horizontales des points de rencontre de SA avec la pyramide S_1.

Par des raisonnements et des constructions analogues, on obtient ainsi successivement les autres sommets, p, u ; r, v ; q, n de la projection horizontale de l'intersection. Nous avons déjà dit que la projection verticale s'en déduit par des lignes de rappel, et il ne reste plus qu'à indiquer l'ordre de jonction des sommets.

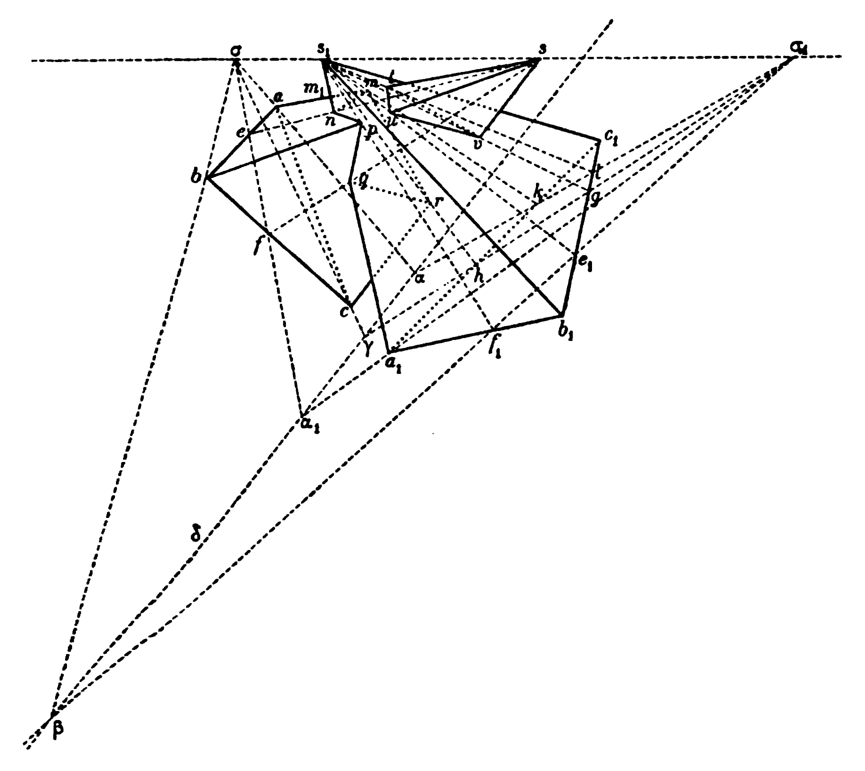
Pour cela, commençons par déterminer un côté du polygone d'intersection. Le simple examen des constructions montre que les deux faces SAB et $S_1A_1B_1$ se coupent suivant une droite projetée en np, de sorte que np est le premier côté du polygone en projection horizontale. Supposant alors ce polygone parcouru dans le sens de n vers p, et observant que le point p est sur l'arête sb et à l'intérieur de $s_1a_1b_1$, on voit que le côté suivant sera la projection horizontale, pq, de l'intersection du plan SBC et du plan $S_1A_1B_1$, et ainsi de suite. On trouve ainsi deux polygones d'intersection $mnpqrm$ et $tuvt$. On dit, dans ce cas, qu'il y a *pénétration* de l'un des polyèdres par l'autre : la pyramide S_1 est trouée par la pyramide S.

Pour faire la ponctuation, on a représenté *l'ensemble des deux corps*, supposés opaques. On trace à l'encre noire (traits pleins et points ronds) les arêtes de chaque polyèdre extérieures à l'autre. On ne trace pas les portions d'arêtes d'un polyèdre intérieures à l'autre. On trace enfin à l'encre noire le ou les polygones d'intersection. Par exemple, en projection horizontale, si l'on considère une arête sa, st a été tracée en trait plein parce qu'elle est au-dessus de la face $S_1B_1C_1$, projetée en $s_1b_1c_1$; tm n'a pas été tracée parce qu'elle est intérieure à la pyramide S_1 ; mm_1 est cachée par S_1, et enfin m_1a est vue et tracée en trait plein. On opère de même pour toutes les autres arêtes.

Pour le polygone d'intersection, mn est caché, parce qu'il se trouve

dans la face cachée $S_1A_1C_1$; *np* est vu, parce qu'il est l'intersection de deux faces vues, etc.

215. Plans limites ; autre mode de jonction des points. — Si l'on voulait obtenir un point quelconque du polygone d'intersection, autre qu'un sommet, on pourrait couper les deux pyramides par un plan quelconque passant par SS_1 et prendre les points communs aux deux polygones sections. Si l'on opère ainsi, on reconnaît immédiatement, dans l'exemple actuel, que la projection horizontale de la trace du plan auxiliaire sur le plan ABC doit être comprise dans l'angle $\alpha\sigma\beta$. Pour cette raison, les deux plans auxiliaires $S\Sigma A$ et $S\Sigma B$ sont applelés des *plans limites*. Ils sont limites pour la pyramide S en ce sens que si la trace sur le plan ABC sort légèrement de l'angle qui est projeté en $\alpha\sigma\beta$, le plan auxiliaire ne coupe plus la pyramide S.



Quand les deux plans sont limites pour la même pyramide, il y a toujours *pénétration*. Il y a *arrachement* ou *entaille* dans le cas con-

traire. Ceci résulte d'un mode de jonction des sommets, fourni par la considération des plans limites, et que nous allons indiquer sommairement en nous servant de la même figure.

Partons d'un sommet quelconque m du polygone à construire : il est le quatrième sommet d'un quadrilatère $m\alpha\alpha k$, dont les côtés passent par les quatre points fixes s, σ, σ_1, s_1. Imaginons alors que l'on fasse parcourir le triangle abc, dans un sens déterminé, au sommet qui est actuellement en a, en nous arrêtant successivement à tous les plans auxiliaires, et suivons les déplacements simultanés des autres sommets. Nous voyons ainsi que si nous passons de a en e, α passe en α_1, k passe en a_1 et, par suite, m passe en n, de sorte que mn est le premier côté. En nous déplaçant ensuite de e en b, α_1 passe en β, a_1 passe en f_1 et, par suite, n passe en p. Le point β correspondant à un plan limite, si nous nous déplaçons de b en f, β revient en α_1, f_1 revient en a_1 et, par suite, p passe en q, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous ayons obtenu un premier polygone $mnpqrm$. Pour obtenir ce polygone, le point h ne s'est déplacé qu'entre k et a_1 ou entre a_1 et f_1 : il n'a donc pu passer sur le côté b_1c_1. Pour achever de construire l'intersection, il faut donc recommencer les mêmes opérations en partant, par exemple, du sommet t, non employé.

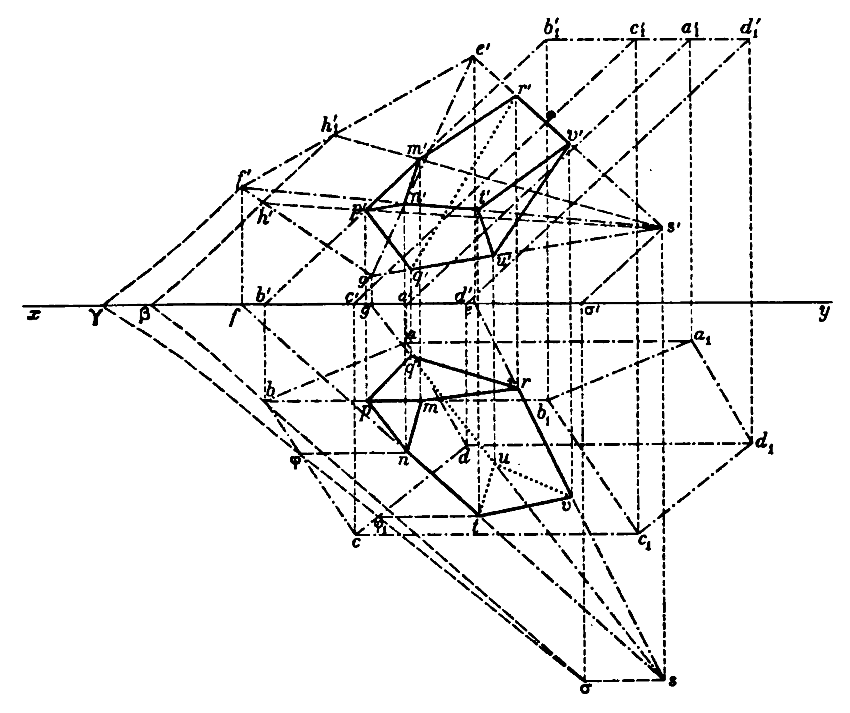
216. Remarque. — Si les deux triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont dans le même plan, la ligne Δ peut être remplacée par une droite quelconque de ce plan, et l'on peut même s'en passer sans inconvénient, comme nous le verrons bientôt. D'ailleurs, dans ce cas, les deux points σ et σ_1 coïncident.

217. **Intersection d'une pyramide et d'un prisme.** — On opère comme dans le cas de deux pyramides. La seule différence consiste en ce que les plans auxiliaires passent par la parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide. Nous nous bornerons donc à traiter l'exemple suivant :

Construire l'intersection d'un prisme quadrangulaire et d'une pyramide triangulaire. La base du prisme est dans le plan horizontal et ses arêtes sont de front ; la base de la pyramide est dans le plan vertical.

Soient $abcd$ la base du prisme dans le plan horizontal et $e'f'g'$ la base de la pyramide dans le plan vertical. Soient d'ailleurs $(aa_1, a'a'_1)$ une arête quelconque du prisme et (s, s') le sommet de la pyramide.

La parallèle aux arêtes du prisme menée par le sommet de la pyramide rencontre le plan horizontal au point (σ, σ') et le plan vertical au point à l'infini dans la direction $a'a'_1$. Un plan auxiliaire quelconque mené par cette droite coupe donc le plan horizontal suivant une droite passant par σ, et le plan vertical suivant une parallèle à $a'a'_1$.



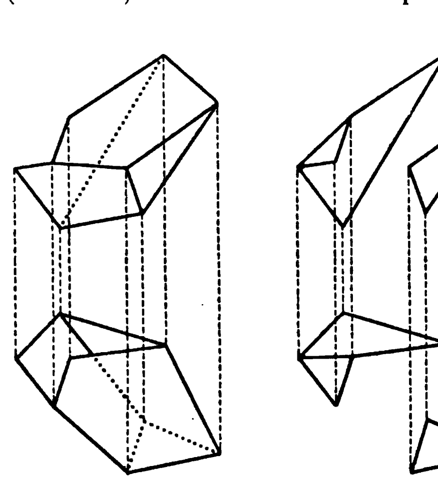
D'après cela, si l'on veut avoir les points de rencontre d'une arête du prisme, de l'arête issue de (b, b') par exemple, avec la pyramide, on observera que la trace horizontale du plan auxiliaire mené par cette arête est la droite $\sigma b \beta$; il en résulte que sa trace verticale est la parallèle $\beta h'$ menée par le point β aux projections verticales des arêtes du prisme. La droite $\beta h'$ coupe la base de la pyramide aux points h' et h'_1, et les points m' et p', où la droite $b'b'_1$ rencontre les droites $s'h'$ et $s'h'_1$, sont les projections verticales des points de rencontre de l'arête $(bb_1, b'b'_1)$ avec la surface de la pyramide. On en déduit les projections horizontales m et p par des lignes de rappel, et l'on opère d'une manière analogue pour les autres arêtes du prisme.

Montrons alors comment on détermine les points de rencontre

d'une arête de la pyramide avec la surface du prisme. Soit, par exemple, l'arête $(sf, s'f')$. Le plan auxiliaire mené par cette arête coupe le plan vertical suivant la parallèle $f'\gamma$ aux arêtes du prisme menée par f'; il en résulte que ce plan auxiliaire coupe le plan horizontal suivant la droite $\gamma\sigma$. Celle-ci rencontre la base du prisme aux points φ et φ_1; donc, les points n et t où la droite sf rencontre les parallèles menées par φ et par φ_1 aux projections horizontales des arêtes du prisme, sont les projections horizontales des points cherchés. On en déduit les projections verticales, et l'on opère d'une manière analogue pour les autres arêtes de la pyramide.

En joignant maintenant les points, comme cela a été expliqué dans le cas de l'intersection de deux pyramides, on obtient deux polygones d'intersection, projetés horizontalement en *mnpqrm*, *tuvt*, et dont les projections verticales respectives sont $m'n'p'q'r'm'$, $t'u'v't'$. Il y a donc pénétration, et comme les deux plans limites sont tous deux limites pour la pyramide, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, il y a pénétration du prisme par la pyramide.

Pour faire la ponctuation, on a représenté le *solide commun* aux deux corps. On a donc enlevé et tracé à l'encre noire et en traits mixtes (–·–·–·–·–) toutes les arêtes ou portions d'arêtes de chacun des corps extérieures à l'autre. Pour la distinction des parties vues et des parties cachées, il n'y a à se préoccuper que d'un seul des deux corps et de la partie de ce corps qui n'est pas enlevée.



Au lieu de représenter le solide commun, on peut se proposer de représenter les faces extérieures de ce solide qui appartiennent, soit à la pyramide, soit au prisme. Les deux figures ci-dessus représentent, l'une, celle de gauche, les faces extérieures du solide commun qui appartiennent à la pyramide,

l'autre, celle de droite, les faces extérieures du solide commun qui appartiennent au prisme. En emboîtant les deux figures, on obtient le solide commun.

218. **Intersection de deux prismes.** — Comme dans le cas de deux pyramides ou d'une pyramide et d'un prisme, on détermine les points de rencontre de chacune des surfaces avec les arêtes de l'autre. Pour cela, on coupe par des plans auxiliaires parallèles aux arêtes des deux prismes et passant successivement par les arêtes de chacun d'eux. Ces plans auxiliaires sont parallèles à un plan fixe P, déterminé par les parallèles aux arêtes des deux prismes menées par un point quelconque de l'espace. Le plan P coupe la base du premier prisme suivant une droite Δ, à laquelle sont parallèles les traces de tous les plans auxiliaires sur le plan de base du même prisme ; il coupe le plan de base du second prisme suivant une droite Δ_1, à laquelle sont parallèles les traces de tous les plans auxiliaires sur le plan de base du même prisme. Quand les bases des deux prismes sont dans le même plan, Δ et Δ_1 coïncident.

Si l'on rapproche ceci de ce qui a été dit dans le cas de l'intersection de deux pyramides, on voit que les points Σ et Σ_1 sont remplacés, le premier par le point à l'infini dans la direction Δ, le second par le point à l'infini dans la direction Δ_1. On achève alors la détermination de l'intersection comme dans les deux cas précédents. Nous avons donné un exemple de chacun de ces deux cas en supposant les bases situées dans des plans distincts ; nous allons donc traiter un exemple d'intersection de deux prismes en supposant que les bases sont dans le même plan.

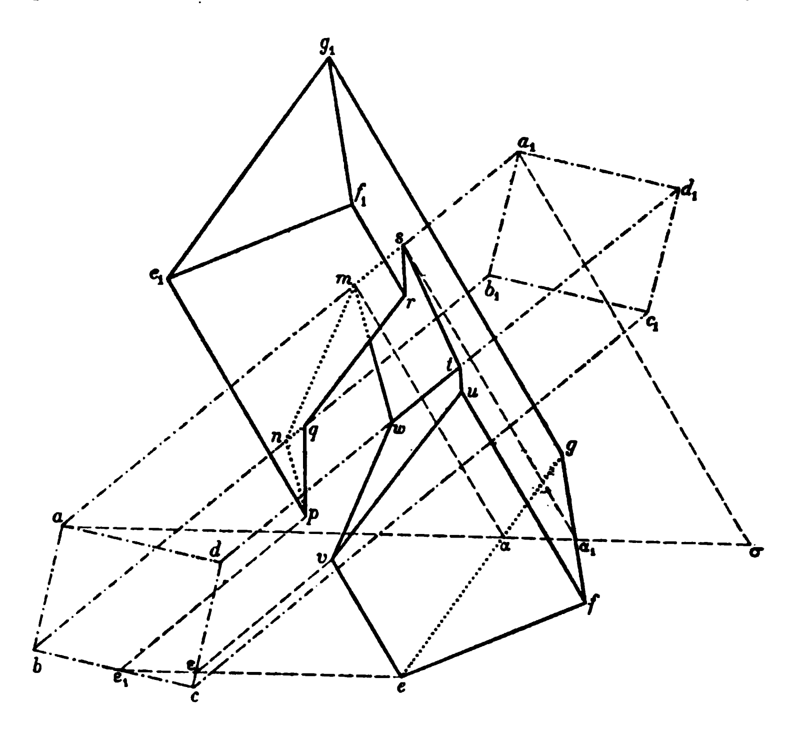
219. **Exemple d'intersection de deux prismes.** — *Intersection de deux prismes placés au-dessus du plan horizontal, et dont les bases reposent sur ce plan.*

Proposons-nous seulement de construire la projection horizontale de l'intersection de ces deux prismes, la projection verticale s'en déduisant, comme toujours, par des lignes de rappel.

Soient *abcd* la base du premier prisme, *efg* la base du second. Par le point projeté horizontalement en a_1 et situé sur une arête du premier prisme, menons la parallèle aux arêtes du second ; soit σ la trace horizontale de cette droite. Comme le point *a* est dans le plan horizon-

tal, les traces horizontales de tous les plans auxiliaires sont parallèles à $a\sigma$.

Cela posé, pour avoir les points de rencontre d'une arête du premier prisme, de l'arête projetée en aa_1, par exemple, avec la surface du second, on observe que le plan auxiliaire mené par cette arête coupe le plan horizontal suivant $a\sigma$ (pour une autre arête, ce serait une



parallèle à $a\sigma$). La droite $a\sigma$ coupe la base du second prisme aux deux points α et α_1, ce qui donne en m et en s les projections horizontales des deux points cherchés.

Pour avoir de même les points de rencontre d'une arête du second prisme, de l'arête projetée en ee_1 par exemple, avec la surface du premier, on observe que la trace horizontale du plan auxiliaire mené par cette arête est la parallèle à $a\sigma$ menée par le point e. Cette parallèle rencontre la base du premier prisme aux points ε et ε_1, et l'on en déduit les projections horizontales v et p des points cherchés.

On détermine d'une manière analogue tous les autres sommets du polygone d'intersection. On constate d'ailleurs sans aucune difficulté

qu'il y a arrachement, car les deux plans auxiliaires dont nous nous sommes servis sont précisément les deux plans limites. Enfin on fait la jonction des sommets du polygone d'intersection comme dans les deux cas précédemment examinés.

Pour faire la ponctuation, on a représenté le prisme triangulaire entaillé par le prisme quadrangulaire. La manière d'effectuer ce mode de ponctuation ayant déjà été donnée (**212**), nous n'y reviendrons pas.

§ V. — *Ombres des polyèdres.*

220. Détermination de la séparatrice. — Lorsqu'un polyèdre est éclairé par une source lumineuse placée à distance finie ou infinie, la partie éclairée de la surface du polyèdre est séparée de la partie non éclairée de cette surface par une ligne polygonale qu'on appelle la *séparatrice*. Les côtés et les sommets de cette ligne, si l'on suppose le polyèdre convexe, sont des arêtes et des sommets du polyèdre, et il est aisé de s'assurer si un sommet du polyèdre est en même temps un sommet de la séparatrice. Appelons en effet A le sommet considéré du polyèdre; pour qu'il soit un sommet de la séparatrice, il faut évidemment et il suffit que le rayon lumineux qui passe par le point A ne rencontre la surface du polyèdre ni avant ni après son passage au point A. Un simple coup d'œil suffit généralement pour s'assurer si cette condition est remplie; mais dans le cas où il y aurait doute, il n'y aurait qu'à chercher les points de rencontre de ce rayon lumineux avec la surface du polyèdre, en coupant celle-ci par un plan vertical ou de bout passant par le même rayon. On aurait ainsi, par la même occasion, des points de la séparatrice, en menant par les sommets du polygone d'intersection les parallèles aux rayons lumineux ne rencontrant qu'en un point le périmètre de ce polygone.

On pourra donc obtenir, de cette manière, la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la surface du polyèdre.

Cela fait, nous allons montrer rapidement que la détermination des ombres des polyèdres se ramène à des problèmes déjà traités.

221. Ombre portée par un polyèdre sur un plan. — Chaque côté de la séparatrice et le point lumineux déterminent un plan que nous supposerons limité aux deux rayons lumineux passant par les extré-

mités du côté. Tous les plans analogues, limités de la même façon, forment une surface pyramidale ou prismatique, appelée *pyramide* ou *prisme d'ombre*, et dont la section par le plan considéré est l'ombre portée par le polyèdre sur ce plan. La détermination de cette ombre se ramène donc à la détermination d'une section plane d'un prisme ou d'une pyramide, problèmes déjà résolus (204).

Lorsque le polyèdre est représenté par ses projections sur deux plans rectangulaires opaques, l'ombre du polyèdre se compose de l'ombre portée sur le plan horizontal limité à la ligne de terre et de l'ombre portée sur le plan vertical limité également à la ligne de terre.

222. Ombre portée par un polyèdre sur un autre polyèdre. — Appelons P et P_1 les deux polyèdres, et supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer l'ombre portée par le polyèdre P sur le polyèdre P_1. Pour cela, on détermine la pyramide ou le prisme d'ombre relatif au polyèdre P, suivant que la source lumineuse est à distance finie ou infinie; puis on cherche l'intersection de cette pyramide ou de ce prisme avec le polyèdre P_1, en limitant cette intersection à la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur le polyèdre P_1.

On simplifie, d'habitude, les constructions en déterminant préalablement les ombres portées par les polyèdres P et P_1 sur les plans de projection ; car on a ainsi les ombres portées par les séparatrices.

223. Ombre portée par une droite sur un polyèdre. — La droite et la source lumineuse déterminent un plan. On cherche la section du polyèdre par ce plan et on la limite à la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur ce polyèdre; on a ainsi l'ombre cherchée.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE VII

1. On donne un hexagone régulier de 3^{cm} de côté ; le centre et le milieu de l'un des côtés sont dans la partie antérieure du plan horizontal, le centre est à 5^{cm} de xy. Le plan de l'hexagone fait un angle de 39° avec le plan horizontal et la trace horizontale fait un angle de 53° avec xy. Cet hexagone est la base d'une pyramide régulière dont la hauteur a 15^{cm} et dont le sommet est dans le second dièdre.

Trouver les projections de la pyramide et celles de la section faite dans cette pyramide par le plan bissecteur du premier dièdre.

(École navale, concours de 1881.)

2. La base ABC d'une pyramide SABC est parallèle au plan horizontal, au-dessus de ce plan et à une distance de $2^{cm},4$. Le côté BC, parallèle à xy, vaut $11^{cm},3$ et est éloigné du plan vertical, en avant, de $1^{cm},5$. Les côtés AC et AB valent respectivement $10^{cm},1$ et $7^{cm},6$. Le triangle SAC est isocèle, les angles égaux SAC, SCA valent chacun 62°; enfin l'arête SB vaut $11^{cm},2$. On demande :

1° De construire les projections de la pyramide ;

2° De déterminer les projections du centre O de la sphère circonscrite à la pyramide ;

3° De déterminer les projections et la vraie grandeur de la section que fait dans la pyramide le plan mené par le point O parallèlement aux deux arêtes opposées AC et SB.

(*École de Saint-Cyr, concours de 1882.*)

3. On donne : 1° un plan $P\alpha P'$ dont les traces font avec xy des angles $P\alpha y = 45°$, $P'\alpha y = 36°$ et 2° un point S situé dans ce plan à $4^{cm},2$ en avant du plan vertical de projection et à $5^{cm},4$ au-dessus du plan horizontal. Ceci posé, on demande :

1° De construire les projections d'une pyramide triangulaire SABC ayant pour sommet le point S et s'appuyant sur le plan horizontal par sa base ABC (le point A étant le plus éloigné de xy), au moyen des données suivantes : le plan de la face ASC est perpendiculaire au plan $P\alpha P'$ et fait un angle de 72° avec le plan horizontal ; la face ASB est située dans le plan $P\alpha P'$; l'angle plan ASC = 75° ; l'angle plan ASB = 66° ;

2° De mener par le centre de gravité G de la pyramide un plan perpendiculaire à la droite SG qui joint ce centre de gravité au sommet S, et de construire les projections de la section faite par ce plan dans le solide.

(*École de Saint-Cyr, 1er concours, 1880.*)

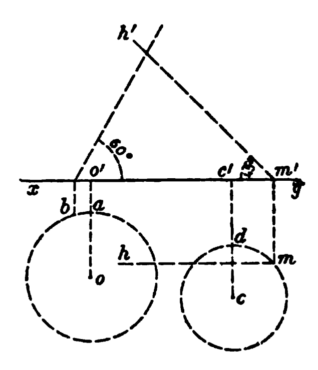
4. On donne une pyramide régulière de 140^{mm} de hauteur dont la base est un octogone de 44^{mm} de côté ; un diamètre de cet octogone est incliné à 60° sur xy et descend vers la droite de l'épure. Un point M, de cote 50^{mm}, est projeté en m sur le plan de front du centre de l'octogone, et à 10^{mm} à droite de ce centre. Par M on fait passer deux plans inclinés à 41° sur le plan horizontal et dont les traces horizontales sont à 45° sur xy. Ces traces descendent aussi vers la droite de l'épure. On demande de représenter les projections de la partie solide de la pyramide comprise entre les deux dièdres aigus des deux plans.

5. Un prisme a ses arêtes de front et inclinées à 45° sur le plan horizontal et montant vers la droite de l'épure. Les bases de ce prisme sont dans deux plans horizontaux, de cotes 50^{mm} et 120^{mm}. Ces bases sont des hexagones réguliers de 35^{mm} de côté dont un diamètre est incliné à 45° sur xy et descend vers la droite. Sur chacune des bases de ce prisme on construit une pyramide régulière, de 40^{mm} de hauteur, qui ne rencontre

pas le prisme, et l'on considère le solide formé par le prisme et l'ensemble des deux pyramides. On coupe ce solide par un plan P qui passe par les milieux des hauteurs des deux pyramides et dont les horizontales sont parallèles au diamètre donné des hexagones.

Représenter la partie du solide située en arrière du plan P.

6. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — **Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.**

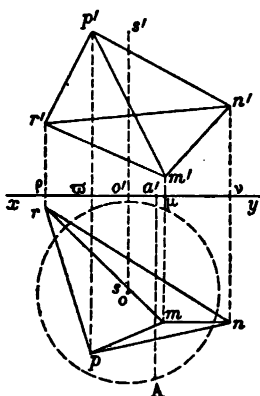


$xo' = 9^{cm}$, $o'o = 9^{cm}$, $oa = 6^{cm}$.

o est le centre d'une circonférence de rayon 6^{cm}. On inscrit un octogone régulier dont un sommet b est tel que arc $ab = \frac{1}{32}$ de circonférence. Cet octogone est la base d'un prisme dont les arêtes sont de front, et font un angle de 60° avec le plan horizontal. On prend $o'c' = 13^{cm}$, $cc' = 11^{cm}$. On décrit une circonférence de rayon $cd = 5^{cm}$. On inscrit un pentagone régulier dont un des sommets est en m et tel que $mm' = 74^{mm}$. Ce pentagone est la base d'un prisme dont les arêtes (mh, $m'h'$) sont de front et font un angle de 45° avec le plan horizontal.

Représenter l'intersection et le solide commun. (R. Malloizel.)

7. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — **Ligne de terre parallèle au petit côté de la feuille et au milieu.**



Une pyramide régulière a pour base dans le plan horizontal un hexagone régulier inscrit dans une circonférence de rayon 10^{cm} ; son centre (o, o') est tel que $xo' = o'y$, $o'o = 10^{cm},5$. La hauteur de la pyramide est égale à 18^{cm}. Un des sommets de l'hexagone est le point (A, a'), $o'a' = 3^{cm}$.

Un tétraèdre a pour sommets les quatre points M, N, P, R, ainsi définis :

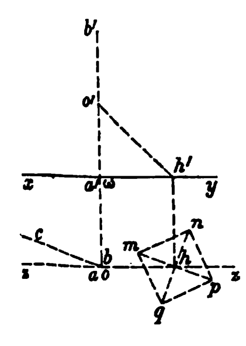
$$M \begin{cases} o'\mu = 4^{cm}, \\ \mu m' = 2^{cm}, \\ \mu m = 14^{cm}; \end{cases} \qquad N \begin{cases} \mu r = 7^{cm}, \\ \nu n' = 10^{cm}, \\ \nu n = 14^{cm}; \end{cases}$$

$$P \begin{cases} o'\varpi = 4^{cm}, \\ \varpi p' = 18^{cm}, \\ \varpi p = 17^{cm},5; \end{cases} \qquad R \begin{cases} \varpi\rho = 5^{cm}, \\ \rho r' = 8^{cm}, \\ \rho r = 1^{cm}. \end{cases}$$

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection de la pyra-

mide et du tétraèdre; 2° de représenter la pyramide entaillée par le tétraèdre. (R. MALLOIZEL.)

8. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



$\omega x = \omega y, \qquad \omega a = 10^{cm}, \qquad \omega b' = 16^{cm}.$

bz est parallèle à xy et l'angle cbz est de 15°.

Un cube a pour diagonale la verticale $(ab, a'b')$, et une des arêtes $(bc, b'c')$ aboutissant au point (b, b') a pour projection horizontale la droite bc. On demande les projections du cube.

Un prisme a pour base dans le plan horizontal le carré $mnpq$ et pour arêtes des parallèles à $(oh, o'h')$.

$a'o' = o'b', \qquad \omega h' = o'b', \qquad mn = 6^{cm},$

l'angle de mn avec xy est de 25°.

On demande les projections du prisme.

Représenter le cube entaillé par le prisme. (R. MALLOIZEL.)

9. Un tétraèdre régulier SABC, dont les arêtes ont pour valeur commune $5^{cm},8$, repose par sa base ABC sur le plan horizontal de manière que l'arête AB est parallèle à xy, et le sommet C en avant de AB. Sur chacune des faces latérales SAB, SAC, SBC comme bases, on construit un prisme droit dont la hauteur est égale à l'arête du tétraèdre. On obtient ainsi un polyèdre P composé de l'ensemble du tétraèdre et des trois prismes, et l'on demande de construire :

1° Les deux projections de ce polyèdre P ;

2° La section de ce polyèdre P par un plan horizontal mené par le centre de gravité du tétraèdre.

(Ecole de Saint-Cyr, concours de 1867.)

10. On donne la projection horizontale d'un cube dont une diagonale est verticale ; ce cube se projette suivant un hexagone régulier de 8^{cm} de côté, dont une diagonale est perpendiculaire à xy. L'extrémité de cette diagonale la plus rapprochée de xy en est distante de 3^{cm}. On demande de déterminer :

1° La projection verticale du cube ;

2° Les projections d'une pyramide régulière qui a pour base l'hexagone de projection du cube sur le plan horizontal et dont la hauteur est supérieure de 3^{cm} à la diagonale du cube ;

3° Le solide commun au cube et à la pyramide ;

4° L'ombre portée par ce solide sur les plans de projection, et son ombre propre, sachant que toute parallèle aux rayons lumineux se projette

horizontalement en faisant un angle de 60° avec xy et verticalement un angle de 40°.

(*Journal de* Vuibert, *5e année.*)

11. On donne sur le plan horizontal un carré ABCD inscrit dans un cercle dont le rayon a 5cm et dont le centre est à 7cm,5 de xy. La diagonale BC est perpendiculaire à xy. On construit un cube sur ce carré pris comme base, et on coupe ce cube par un plan passant par les milieux E et F des côtés AB, AD et par le centre du cube. On rabat la section ainsi obtenue sur le plan horizontal, et l'on construit une pyramide ayant pour base la section rabattue, et pour sommet un point se projetant horizontalement au centre du carré ABCD et situé au-dessus du plan horizontal à une distance égale à une fois et demie l'arête du cube. On propose de trouver en projections l'intersection du cube et de la pyramide.

(*Concours académique de Montpellier, 1874.*)

12. On donne une sphère de 5cm de rayon tangente aux deux plans de projection ; son centre est dans le premier dièdre. On inscrit dans cette sphère un prisme droit dont la base est un hexagone régulier, l'axe vertical, et dont la hauteur est égale au diamètre du polygone de base. Une des faces est parallèle au plan vertical de projection.

On mène le diamètre de la sphère parallèle à xy et on joint son extrémité de gauche à tous les sommets de la base inférieure du prisme.

On demande :

1° De représenter le prisme et la pyramide obtenus ;

2° De trouver l'intersection des deux corps ;

3° De construire le développement des faces latérales du prisme sur un plan parallèle au plan vertical et d'y représenter l'intersection développée.

(*Concours académique de Montpellier, 1870.*)

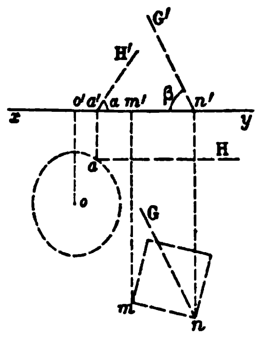
13. On donne un prisme droit et une pyramide de même hauteur égale à 5cm ; la base du prisme est un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de 3cm de rayon ; la base de la pyramide est un triangle équilatéral inscrit dans le même cercle, le point D étant diamétralement opposé au point A ; le sommet de la pyramide est sur l'arête latérale du prisme qui passe par le point A.

On prend pour plan horizontal le plan du cercle, pour ligne de terre une perpendiculaire au diamètre AD située à 5cm du centre et du même côté que le point D par rapport à ce centre.

Représenter les deux solides par leurs projections ; construire les projections de la ligne d'intersection des surfaces des deux solides ; puis, transportant la figure parallèlement à xy de 3cm vers la droite, représenter par ses projections le solide commun au prisme et à la pyramide.

(*Concours général de 1876, Enseignement spécial.*)

14. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



Un prisme a pour base dans le plan horizontal un pentagone régulier inscrit dans une circonférence (o, o') de rayon $oa = 5^{cm}$, $xo' = 8^{cm}$, $o'o = 9^{cm}$; un des sommets (a, a') du pentagone est tel que $aa' = 4^{cm},5$. Une arête (H, H') est de front, la projection verticale H' faisant avec xy un angle α tel que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{5}$.

Un second prisme a pour base dans le plan horizontal un carré construit sur mn et au-dessus.

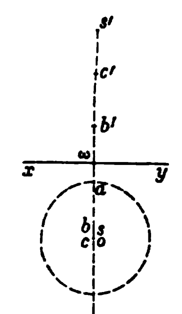
$o'm' = 6^{cm}$, $m'n' = 6^{cm}$, $mm' = 18^{cm},5$, $n'n = 20^{cm}$.

Une arête (G, G') a ses deux projections parallèles sur l'épure ; G' fait avec xy un angle β tel que $\operatorname{tg} \beta = 2$.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection des deux prismes ; 2° de représenter le premier prisme entaillé par le second et limité au plan horizontal et à un plan horizontal de cote 16^{cm}.

(R. Malloizel.)

15. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu. $\omega x = \omega y$.



Une pyramide régulière a pour base dans le plan horizontal un dodécagone régulier inscrit dans la circonférence oa ; $\omega o = 10^{cm}$, $oa = 8^{cm}$. Un des sommets du dodécagone est au point a. Le sommet de la pyramide, (s, s'), a une cote égale à 18^{cm}.

On coupe cette pyramide : 1° par un plan passant par la ligne de terre et le point (b, b') situé sur l'axe de la pyramide ($\omega b' = 5^{cm}$) ; 2° par un plan passant par le point (c, c') situé sur l'axe de la pyramide ($\omega c' = 12^{cm}$) et dont les traces font un angle de 45° avec la ligne de terre.

On demande de représenter la portion de la pyramide comprise dans les deux dièdres opposés par l'arête formés par les deux plans précédents, l'un de ces dièdres contenant le sommet de la pyramide.

(R. Malloizel.)

CHAPITRE VIII

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE COTÉE (*)

§ I. — *Le point et la ligne droite.*

224. Représentation du point. — On représente un point, en géométrie cotée, par sa projection horizontale et par sa *cote*. La cote est la distance du point au plan horizontal ; elle est positive ou négative suivant que le point est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal. Enfin, on l'inscrit à côté de la projection horizontale du point, parallèlement au bord inférieur de la feuille.

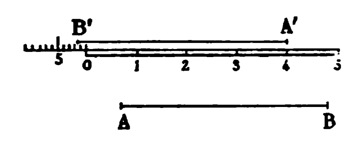
225. Représentation d'un corps ; échelle d'un dessin. — Un corps étant un ensemble de points, pour représenter un corps on représente autant de points de ce corps qu'il en faut pour déterminer sa forme et sa position dans l'espace. On obtient ainsi un dessin ou l'*épure* du corps. Ce dessin est toujours exécuté à une *échelle* déterminée, c'est-à-dire qu'il est semblable à la projection horizontale du corps, mais toutes les lignes sont réduites dans un rapport donné qu'on appelle l'échelle du dessin.

Si l'unité de longueur est le mètre, on dit que l'échelle est de $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, etc., suivant que la longueur de 1^{m} dans l'espace est représentée par 1^{cm}, par 1^{mm}, etc., dans le dessin.

Pour indiquer qu'un dessin est à une échelle déterminée, pour indiquer par exemple que l'échelle est de $\frac{1}{100}$ par mètre, on trace paral-

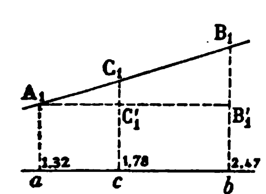
(*) La connaissance de ces notions de géométrie cotée est exigée des candidats à l'École centrale, mais pas des candidats à l'École polytechnique.

lèlement à l'un des bords de la feuille une longueur quelconque que l'on divise en centimètres, et l'on ajoute à gauche de cette longueur une autre longueur de 1^{cm} que l'on divise en dix parties égales. Cette longueur partagée en parties égales porte aussi le nom d'échelle.

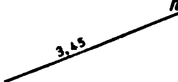


Dans la figure ci-contre cette longueur est de 5^{cm}, et pour montrer la manière de s'en servir supposons que l'on demande la longueur véritable d'une ligne AB du dessin. Pour l'obtenir, on prend une ouverture de compas égale à AB et on la porte sur l'échelle en A'B', à partir d'une division, comme l'indique la figure. On voit ainsi que la longueur AB du dessin est égale à $0^m,04 + 0^m,001 + \frac{0^m,001}{2}$, ou à $0^m,0415$. En multipliant alors par 100, c'est-à-dire par l'inverse de l'échelle, on a la longueur véritable, qui est ici $4^m,15$.

226. Représentation d'une droite ; droites horizontales. — Une droite étant déterminée par deux points, pour représenter une droite on se donne les projections cotées de deux de ses points. Ainsi les deux points *a* et *b* cotés respectivement 1,32 et 2,47 déterminent une droite de l'espace dont tous les points sont projetés sur la droite *ab* du plan horizontal.



Tous les points d'une droite horizontale ont la même cote ; on représente alors une droite horizontale par sa projection horizontale *h*, et l'on inscrit la cote parallèlement à *h*. Dans la deuxième figure, *h* est une horizontale de cote 3,45.



227. Problème. — *Connaissant la projection d'un point d'une droite ab, trouver sa cote.*

Soit *c* (1re fig. du n° précédent) la projection du point. Rabattons le plan projetant la droite sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de *ab*. Les points A et B se rabattent sur les perpendiculaires à *ab*, menées respectivement par les points *a* et *b*, en des points A_1 et B_1, tels que les longueurs aA_1 et bB_1 mesurées à l'échelle du dessin soient respectivement égales à 1,32 et à 2,47. Le point C se

rabat donc en C_1, à l'intersection de A_1B_1 et de la perpendiculaire à ab menée par le point c ; de sorte que la cote du point C s'obtient en mesurant cC_1 à l'échelle du dessin, comme cela a été expliqué plus haut (**225**.)

Dans la pratique, les cotes des objets que l'on représente en géométrie cotée sont très petites par rapport aux dimensions horizontales du corps, et une échelle de $\frac{1}{1000}$ par mètre est généralement plus grande que les échelles employées ; de sorte que si l'on mesurait cC_1, comme on vient de l'expliquer, une erreur de 1^{mm} dans cette mesure serait multipliée au moins par 1000 et correspondrait à une erreur véritable d'au moins 1^{m}. Pour cette raison, au lieu de mesurer les cotes on les calcule, et voici comment on procède :

Imaginons que l'on ait mené la parallèle $A_1B'_1$ à ab, et considérons les deux triangles semblables $A_1C_1C'_1$ et $A_1B_1B'_1$. Dans ces triangles on a

$$\frac{C_1C'_1}{B_1B'_1} = \frac{A_1C'_1}{A_1B'_1},$$

ou

$$\frac{C_1C'_1}{B_1B'_1} = \frac{ac}{ab}.$$

On en tire

(1) $$C_1C'_1 = \frac{ac \times B_1B'_1}{ab}.$$

Mais $B_1B'_1$ est la différence des cotes des deux points A et B, différence qui est égale, dans le cas actuel, à 1,15 ; ac et ab se mesurent à l'échelle du dessin, puisque ce sont des distances horizontales. Le calcul précédent fait donc connaitre $C_1C'_1$, et, en ajoutant cette longueur à la cote du point A, on obtient la cote du point C.

Par exemple, si ac et ab mesurées à l'échelle du dessin sont respectivement égales à 1,45 et à 3,64, on a

$$C_1C'_1 = \frac{1,45 \times 1,15}{3,64} = 0,46 ;$$

il en résulte qu'on a

$$cC_1 = 1,32 + 0,46 = 1,78.$$

228. Problème inverse. — *Placer sur une droite un point de cote donnée.*

Il s'agit de trouver le point c connaissant la cote du point C dont il est la projection horizontale ; il suffit, pour cela, de connaître la longueur ac mesurée, bien entendu, à l'échelle du dessin.

Or l'égalité (1) du numéro précédent donne

$$ac = \frac{ab \times C_1C'_1}{B_1B'_1};$$

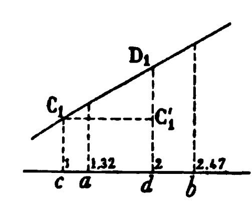
et en remplaçant ab, $C_1C'_1$ et $B_1B'_1$ par leurs valeurs respectives, 3,64, 0,46 et 1,15, on obtient

$$ac = \frac{3,64 \times 0,46}{1,15} = 1,45.$$

On prend donc sur l'échelle la longueur qui correspond à 1,45, et on la porte sur ab à partir du point a et dans le sens convenable, c'est-à-dire de gauche à droite ou de droite à gauche suivant que ac est positif ou négatif ; car les cotes ou les différences des cotes de deux points sont susceptibles de signes.

229. Points à cote ronde ; intervalle. — On appelle ainsi les points dont les cotes sont des nombres entiers ; tels sont, par exemple, les points de cotes -2, -1, 0, 1, 2, ... Le point de cote 0 s'appelle la trace de la droite.

La détermination des points à cote ronde est une application du problème précédent (228). On commence par en déterminer deux consécutifs, par exemple ceux dont les cotes sont respectivement 1 et 2 ; soient c et d ces deux points. On en déduit ensuite tous les autres en portant des longueurs égales à cd, dans un sens ou dans l'autre.



Cette longueur cd, c'est-à-dire la distance horizontale de deux points *consécutifs* à cote ronde, s'appelle l'*intervalle*. On peut appeler, plus généralement, intervalle d'une droite la distance horizontale de deux points dont la différence des cotes est 1.

Il est clair qu'une droite est déterminée quand on connait la projection cotée d'un point de la droite, la projection horizontale de cette droite et l'intervalle, puisqu'on connait ainsi autant de points que l'on veut de la droite.

Ajoutons que si l'on partage l'intervalle en parties égales, il est aisé de trouver les points de la droite dont les cotes sont fractionnaires

quand on connait un point à cote ronde. Par exemple, si l'on connait le point c de cote 1, pour avoir le point de cote 1,3, il suffit de partager l'intervalle en dix parties égales et de prendre le troisième point de division à partir du point c.

230. **Angle d'une droite avec le plan horizontal ; pente d'une droite.** — Soient c et d (fig. précédente) deux points consécutifs à cote ronde rabattus en C_1 et en D_1. Si l'on mène $C_1C'_1$ parallèle à cd, il est clair que l'angle de la droite avec le plan horizontal est égal à l'angle C_1 du triangle rectangle $C_1D_1C'_1$. En appelant α l'angle cherché, on a donc

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C'_1D_1}{C_1C'_1}.$$

Mais $C'_1D_1 = 1$, et si l'on appelle I l'intervalle, on a $C_1C'_1 = I$; on a donc

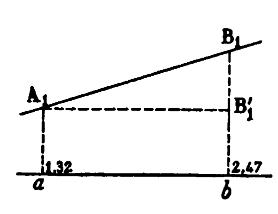
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{I}.$$

La quantité $\frac{1}{I}$ s'appelle la *pente* de la droite.

Une droite est évidemment déterminée quand on connait sa projection horizontale, sa pente et la projection cotée d'un point ; car si par exemple la pente est $\frac{1}{4}$, l'intervalle est 4 et l'on connait ainsi la projection horizontale de la droite, la cote de l'un de ses points et l'intervalle.

231. **Problème.** — *Trouver la distance de deux points cotés d'une droite.*

Soient a et b les deux points cotés respectivement 1,32 et 2,47.



Pour avoir la distance des deux points A et B de l'espace, on pourrait rabattre cette droite en A_1B_1 et mesurer A_1B_1 à l'échelle du dessin.

On préfère calculer A_1B_1 au moyen du triangle rectangle $A_1B_1B'_1$ qui donne

$$A_1B_1 = \sqrt{\overline{A_1B'_1}^2 + \overline{B'_1B_1}^2}.$$

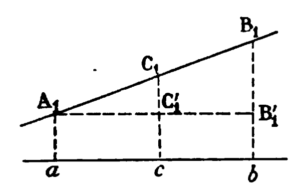
On mesure alors $A_1B'_1$ à l'échelle, on calcule B'_1B_1 et l'on remplace. Si, par exemple, on a $ab = 3,64$, on a aussi $A_1B'_1 = 3,64$; d'ail-

leurs $B'_1B_1 = 2,47 - 1,32 = 1,15$, de sorte que

$$A_1B_1 = \sqrt{3,64^2 + 1,15^2} = 3,83.$$

232. Problème inverse. — *Porter sur une droite et à partir d'un point de cette droite une longueur égale à une longueur donnée.*

Supposons qu'il s'agisse de porter sur la droite *ab*, à partir du point *a*, une longueur égale à 4. Pour cela, on commence par calculer la longueur dont la projection est égale à l'intervalle. Supposons, pour fixer les idées, que l'intervalle soit égal à 2 ; alors la longueur dont la projection est égale à l'intervalle est égale à



$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2,23.$$

Cela posé, supposons que *b* soit le point inconnu, portons *ac* égal à l'intervalle et construisons le point C_1 rabattement du point *c*. Tout revient évidemment à calculer $ab = x$. Or, les deux triangles semblables $A_1C_1C'_1$ et $A_1B_1B'_1$ donnent

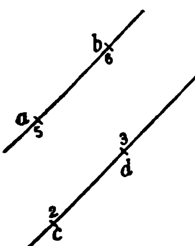
$$\frac{A_1B'_1}{A_1C'_1} = \frac{A_1B_1}{A_1C_1},$$

c'est-à-dire $$\frac{x}{2} = \frac{4}{2,23}.$$

Il en résulte $$x = \frac{2 \times 4}{2,23} = 3,58.$$

On portera donc $ab = 3,58$ au moyen de l'échelle et on aura le point *b*, dont il sera aisé d'avoir la cote, comme on l'a vu plus haut (227).

233. Problème. — *Mener par un point donné la parallèle à une droite donnée.*



Soit à mener par le point *c* coté 2 la parallèle à la droite *ab*. Les deux droites étant parallèles, leurs projections horizontales le sont aussi ; on obtiendra donc la projection horizontale de la droite cherchée en menant par le point *c* la parallèle à *ab*.

D'ailleurs les intervalles étant évidemment égaux, si *ab* est l'intervalle de la première droite, en prenant $cd = ab$ et de même sens que *ab* on aura l'intervalle de la deuxième.

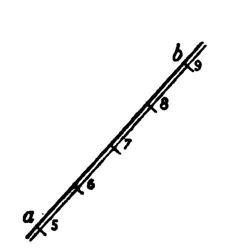
234. Problème — *Trouver la condition pour que deux droites se coupent.*

La condition nécessaire et suffisante cherchée est évidemment que les cotes du point de rencontre des projections horizontales, considéré comme appartenant tour à tour à la première et à la deuxième droite, soient égales.

§ II. — *Le Plan.*

235. Représentation du plan; échelle de pente. — On appelle *ligne de plus grande pente* d'un plan toute droite du plan perpendiculaire aux horizontales de ce plan. Il est clair qu'un plan est déterminé par une ligne de plus grande pente; pour cette raison *on représente un plan par une de ses lignes de plus grande pente.*

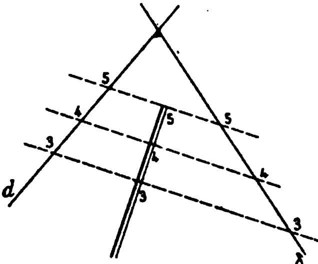
Afin de distinguer la ligne de plus grande pente d'un plan d'une autre droite quelconque, on la représente par deux traits, l'un très fin, l'autre plus épais. On marque enfin dans toute l'étendue utile de cette ligne des points à cote ronde, et l'on a ainsi ce qu'on appelle l'*échelle de pente* du plan.



Il suit de là qu'un plan est représenté par son échelle de pente et, par définition, les horizontales du plan sont perpendiculaires à l'échelle de pente. D'après cela, si *ab* est l'échelle de pente d'un plan, les horizontales du plan sont perpendiculaires à *ab*.

Ce mode de représentation du plan conduit immédiatement au problème suivant :

236. Problème. — *Un plan étant déterminé par deux droites qui se coupent, trouver son échelle de pente.*



Soient *d* et δ les projections cotées des deux droites qui déterminent le plan. Si l'on joint tous les couples de points de même cote, par exemple les points de cote 5, de cote 4, de cote 3, etc., on obtient des horizontales du plan. Dès lors une perpendiculaire à ces droites, graduée en marquant les mêmes

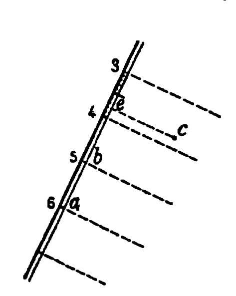
cotes que sur les horizontales correspondantes, aux points où elle est rencontrée par ces horizontales, donne l'échelle de pente du plan.

237. Remarque. — On appelle *pente* d'un plan la pente de son échelle de pente. En vertu du problème précédent, quelle que soit la manière de déterminer un plan, on peut toujours le supposer déterminé par un point, sa pente et la projection de son échelle de pente. A la projection de son échelle de pente on peut évidemment substituer la projection de la direction des horizontales du plan.

Nous allons maintenant résoudre quelques problèmes sur le plan.

238. **Problème**. — *Déterminer un point d'un plan connaissant : 1° sa projection horizontale ; 2° sa cote.*

Soit *ab* l'échelle de pente d'un plan sur laquelle on a marqué, comme d'habitude, des points à cote ronde. Si l'on considère deux de ces points consécutifs, *a* et *b* par exemple, *ab* est l'intervalle de l'échelle de pente; on peut supposer l'intervalle divisé en parties égales, dix par exemple. Cela posé :



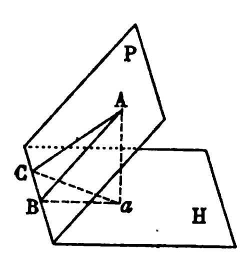
1° Si *c* est la projection horizontale du point cherché, il s'agit d'avoir la cote de ce point. Cette cote est la même que celle de l'horizontale du plan qui passe par le point C de l'espace ; or, la projection horizontale de cette droite passe par *c* et est perpendiculaire à l'échelle de pente. Cette perpendiculaire rencontre l'échelle de pente, c'est-à-dire la projection horizontale de l'échelle de pente, en un point *e* compris entre les divisions 3 et 4 de l'échelle et correspondant à la huitième division de l'intervalle (3.4) partagé en dix parties égales, à partir de la cote 3 ; il en résulte que la cote demandée est 3,8.

2° Inversement, les points dont la cote est 3,8 ont leurs projections horizontales sur *ec*, de sorte que la deuxième partie du problème est indéterminée.

239. **Problème**. — *Par un point d'un plan mener une droite de pente donnée située dans ce plan.*

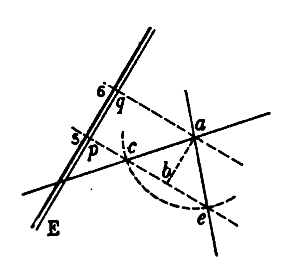
Résolvons d'abord le problème dans l'espace. Soient P le plan

donné et A le point donné dans ce plan. Menons le plan horizontal H par rapport auquel la cote du point A est égale à 1, et soient *a* la projection du point A sur le plan H et AB la ligne de plus grande pente du plan menée par le point A, de sorte que *a*B est l'intervalle de l'échelle de pente du plan P, en supposant, bien entendu, que BC est l'horizontale du plan P située dans le plan H. Il en résulte que si l'on suppose le problème résolu et si l'on appelle AC l'une des droites cherchées, *a*C est l'intervalle de cette droite, c'est-à-dire l'inverse de la pente (230).



D'après cela, le point C sera à l'intersection de BC et de la circonférence qui a pour centre le point *a* et pour rayon une longueur qui est égale, sur l'échelle, à l'inverse de la pente donnée.

Cela posé, si E est l'échelle de pente du plan et si l'on appelle *a* le point donné coté 6, en prenant un point de rencontre de l'horizontale de cote 5 avec la circonférence dont il vient d'être question, on a un deuxième point de la droite cherchée. Comme cette circonférence peut rencontrer l'horizontale de cote 5 en 0, en 1 ou en 2 points, le problème peut admettre 0, 1 ou 2 solutions. Dans le cas de la figure, il y a deux droites *ac* et *ae* répondant à la question.

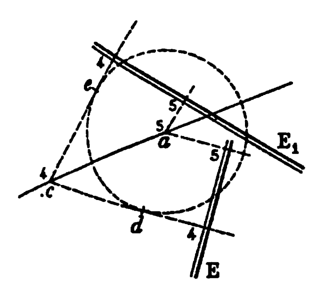


Il suit de là que le problème n'est possible que si la pente de la droite est inférieure ou au plus égale à la pente du plan. Si la pente de la droite est égale à la pente du plan, la droite cherchée est une ligne de plus grande pente du plan.

240. Problème. — *Par une droite donnée mener un plan de pente donnée.*

C'est le problème inverse du précédent. Si l'on se reporte en effet à la figure précédente, et si l'on mène la perpendiculaire *ab* à *ce*, on voit que l'on obtient une horizontale du plan cherché en prenant le côté *cb* du triangle rectangle *cba* dans lequel on connaît l'hypoténuse *ac* (intervalle de la droite) et le côté *ab* qui est l'intervalle du plan, c'est-à-dire l'inverse de la pente.

D'après cela, soient *ac* l'intervalle de la droite, *cd* et *ce* les tangentes menées du point *c* à la circonférence ayant pour centre le point *a* et pour rayon l'inverse de la pente du plan; *cd* est une horizontale de l'un des plans cherchés et *ce* une horizontale d'un autre. On peut alors construire facilement les échelles de pente E et E_1 de ces deux plans.



Comme on le voit, le problème peut admettre 0, 1 ou 2 solutions, suivant que l'on peut, du point *c*, mener 0, 1 ou 2 tangentes à la circonférence.

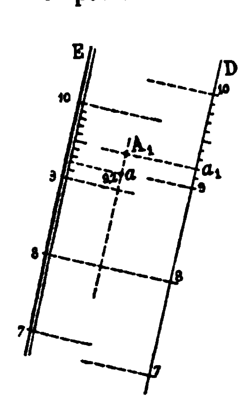
Quand le point *c* est sur la circonférence, la droite coïncide avec une ligne de plus grande pente du plan.

En tous cas le problème n'est possible que si la pente du plan est supérieure à la pente de la droite, c'est-à-dire si l'intervalle de la droite est supérieur à l'inverse de la pente du plan.

241. Rabattement d'un plan. — Le problème à résoudre est le suivant :

Un plan étant défini par son échelle de pente, on le rabat sur le plan horizontal qui passe par l'une de ses horizontales ; construire le rabattement d'un point de ce plan connaissant la projection cotée de ce point.

On pourrait résoudre ce problème au moyen de la règle du triangle rectangle (156); mais, comme on l'a vu dans tout ce qui précède, il y a avantage en géométrie cotée à remplacer les constructions graphiques par des calculs. Pour résoudre le problème des rabattements, il convient donc de procéder comme il suit :



Soient E l'échelle de pente du plan et *a* le point à rabattre, coté 9,2; supposons, d'ailleurs, que l'on fasse le rabattement autour de l'horizontale cotée 8. Commençons par calculer la distance de deux points de l'échelle de pente dont la différence des cotes est 1 ; si, pour fixer les idées, on suppose que l'intervalle de l'échelle de pente soit égal à 1,65, la distanche cherchée est égale à $\sqrt{1 + 1,65^2} = 1,92$.

Traçons donc une droite D parallèle à l'échelle de pente, et, à partir du point coté 8, portons sur cette droite des longueurs égales à 1,92, dans le même sens que l'intervalle sur l'échelle de pente; nous obtenons ainsi sur la droite D les points que nous numérotons 9, 10, etc. La droite D est le rabattement d'une ligne de plus grande pente du plan, et les points de division 7, 8, etc., sont les rabattements des points de cette ligne cotés respectivement 7, 8, etc. En menant par ces points les perpendiculaires à l'échelle de pente, on a les rabattements des horizontales successives du plan. Si donc on prend sur la droite D le point a_1 qui correspond à la division 9,2, cote du point a, et si on mène par ce point la perpendiculaire à D, on aura le rabattement de l'horizontale du plan qui passe par le point A de l'espace. Il est clair que le rabattement du point A doit se trouver sur cette droite; comme, d'autre part, il doit évidemment se trouver sur la perpendiculaire à la charnière menée par a, c'est-à-dire sur la parallèle à l'échelle de pente, il sera rabattu à l'intersection A_1 des deux lignes.

242. Relèvement d'un plan rabattu. — On commence toujours par construire la droite D, comme cela a été expliqué dans le numéro précédent. Cela fait, pour avoir le point a, projection horizontale du point rabattu en A_1, on mène par A_1 la perpendiculaire à D et l'on prend le point a_1 ainsi obtenu et qui correspond à la division 9,2 de la droite D : 9,2 est la cote du point a. Il en résulte que le point a se trouve sur l'horizontale du plan menée par le point de l'échelle de pente qui correspond à la division 9,2; comme, d'autre part, il est situé sur la parallèle menée par A_1 à l'échelle de pente, il est à l'intersection a de ces deux lignes.

243. Plans parallèles. — Lorsque deux plans sont parallèles, leurs lignes de plus grande pente sont parallèles et ont la même pente. La réciproque est évidente.

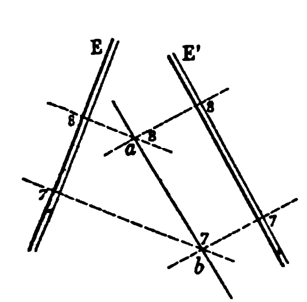
D'après cela, les échelles de pente de deux plans parallèles sont parallèles et satisfont en outre aux conditions suivantes : 1° les intervalles sont égaux ; 2° les graduations sont dans le même sens.

Dans la figure ci-contre, E et E′ sont les échelles de pente de deux plans parallèles.

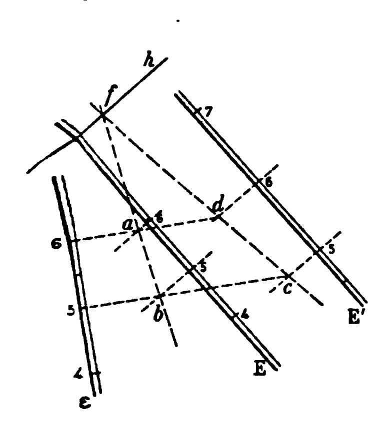
§ III. — *Droites et plans combinés.*

244. Intersection de deux plans. — Si on coupe les deux plans par le même plan horizontal, le point de rencontre des deux droites ainsi obtenues est un point de l'intersection. On en obtient un second au moyen d'un autre plan horizontal. D'après cela :

1° *Les échelles de pente ne sont pas parallèles.* — Soient E et E′ les échelles de pente des deux plans. Le plan horizontal de cote 8 coupe les deux plans suivant deux horizontales dont l'intersection est le point *a*, qui sera coté 8; de même le plan horizontal de cote 7 coupe les deux plans suivant deux horizontales dont l'intersection est le point *b*, qui sera coté 7. L'intersection des deux plans est donc définie par les points *a* et *b*, cotés respectivement 8 et 7; sa projection horizontale est *ab*.



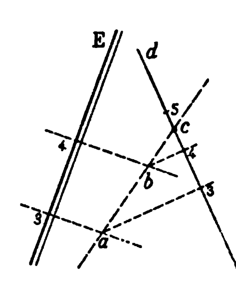
2° *Les échelles de pente sont parallèles.* — Supposons les échelles de pente parallèles mais telles que les deux plans ne soient pas parallèles (243). Dans ce cas la méthode indiquée plus haut n'est pas applicable, car les horizontales des deux plans sont parallèles; mais comme l'intersection des deux plans est horizontale, il suffit, pour la déterminer, d'en connaître un point. Pour obtenir ce point, on coupe alors les deux plans donnés par un troisième plan quelconque. Dans la figure ci-contre, E et E′ sont les échelles de pente des plans donnés et ε est l'échelle de pente du plan auxiliaire. Les droites d'intersection du plan ε avec les deux plans respectifs E et E′ sont *ab* et *cd*, qui se coupent au point *f*; en menant par ce point la perpendiculaire à E ou à E′, on a en *fh* la projection de l'intersection des deux plans.



D'ailleurs, pour coter cette droite, il suffit de voir quelle est la divi-

sion de E ou de E' qui correspond au point de rencontre de cette droite avec *fh*.

245. Intersection d'une droite et d'un plan. — La méthode à suivre pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan consiste à couper le plan par un plan quelconque passant par la droite. L'intersection des deux plans est une droite qui rencontre la première au point demandé. Le choix du plan auxiliaire n'est pas indifférent, et l'on prend toujours celui qui admet la droite pour ligne de plus grande pente, excepté quand la projection de la droite est parallèle à l'échelle de pente du plan.

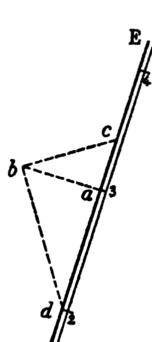


Dans la figure ci-contre, E est l'échelle de pente du plan donné et *d* est la projection de la droite donnée. Le plan auxiliaire et le plan donné se coupent suivant la droite *ab*, qui rencontre *d* au point *c*; enfin, le point *c* étant le milieu de la division (4.5) de *d*, la cote de ce point est 4,5.

Ainsi le point cherché est le point *c* coté 4,5.

246. Conditions d'orthogonalité d'une droite et d'un plan. — Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, la projection horizontale de la droite est, comme l'on sait, perpendiculaire à la projection horizontale des horizontales du plan; il en résulte que la projection horizontale d'une perpendiculaire à un plan est parallèle à l'échelle de pente du plan.

Il reste à graduer cette droite. Pour cela, il suffit d'en connaître un point coté et l'intervalle. On en détermine un point coté par une autre condition imposée à la perpendiculaire, et pour avoir l'intervalle on se base sur ce que l'intervalle est l'inverse de la pente. Or, la droite et le plan font des angles complémentaires avec le plan horizontal; il en résulte que la pente de la perpendiculaire est l'inverse de la pente du plan; mais alors l'intervalle de la perpendiculaire est l'inverse de l'intervalle de l'échelle de pente du plan.



D'après cela, soit E l'échelle de pente du plan et *da* l'intervalle de cette échelle de pente. Menons *ab* perpendiculaire à

E et égale à l'unité mesurée à l'échelle du dessin, et construisons le triangle *dbc* rectangle en *b*. Dans ce triangle, on a

$$da \times ac = \overline{ab}^2 = 1;$$

et comme *da* est l'intervalle de l'échelle de pente du plan, il résulte de ce qui précède que *ac* est l'intervalle des normales au plan.

En résumé, pour qu'une droite soit perpendiculaire au plan E, il faut et il suffit que sa projection horizontale soit parallèle à E et que son intervalle soit égal à *ac*.

Inversement, si *ac* est l'intervalle d'une droite, le triangle rectangle *dbc* fait connaître l'intervalle *da* de l'échelle de pente d'un plan perpendiculaire à la droite.

Dès à présent on est donc en mesure de résoudre les deux problèmes suivants :

I. *Mener par un point la perpendiculaire à un plan.*

II. *Mener par un point le plan perpendiculaire à une droite.*

Ces deux problèmes ne présentent aucune difficulté et nous laissons au lecteur le soin de les résoudre à titre d'exercices, en faisant toutefois observer que les *graduations sur la droite et sur l'échelle de pente du plan perpendiculaire doivent aller en sens inverse.*

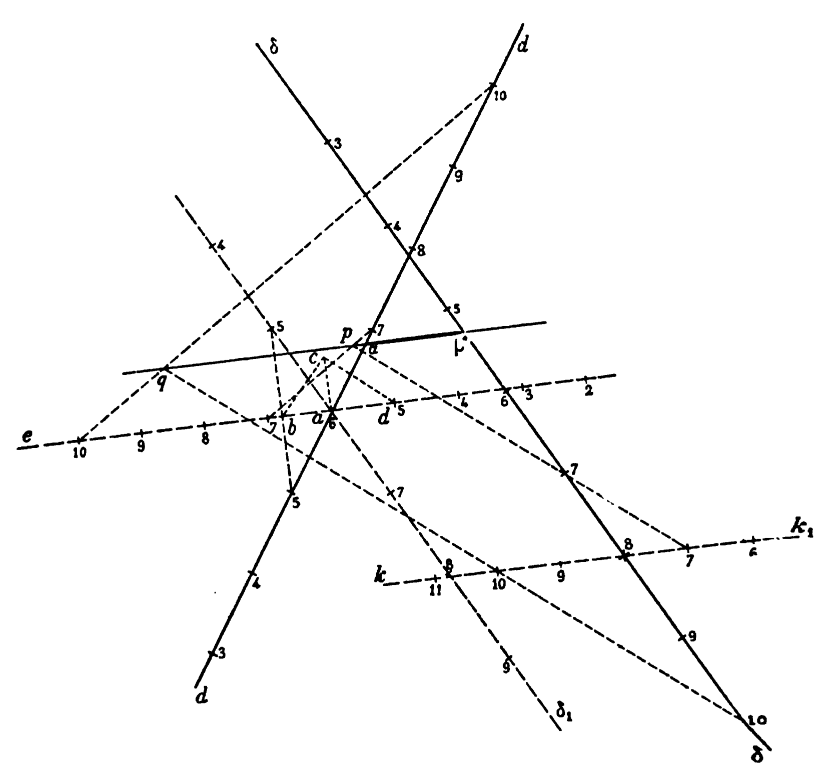
§ IV. — *Distances et angles.*

247. **Distance d'un point à un plan.** — Appelons A et P le point et le plan donnés. Pour avoir la distance du point A au plan P, on mène par le point la perpendiculaire au plan (246), on cherche le point de rencontre B de cette droite et du plan (245), et l'on calcule enfin la distance des deux points A et B (231).

248. **Distance d'un point à une droite.** — Pour obtenir cette distance, on mène par le point le plan perpendiculaire à la droite et on détermine le point de rencontre de ce plan et de la droite. On calcule ensuite la distance du point ainsi obtenu au point donné.

249. **Perpendiculaire commune à deux droites; plus courte distance de ces deux droites.** — On obtient la perpendiculaire commune à deux droites D et Δ en suivant pas à pas une des méthodes employées en géométrie élémentaire pour prouver l'existence de cette

ligne. On mène donc par D le plan P parallèle à Δ, et l'on détermine ce plan en menant la parallèle à Δ par un point de D; on mène ensuite une perpendiculaire au plan P, et enfin on mène, par chaque droite, le plan parallèle à cette perpendiculaire, c'est-à-dire le plan perpendiculaire au plan P. L'intersection des deux plans ainsi obtenus est la perpendiculaire commune aux deux droites. Elle coupe les deux droites en deux points dont on calcule la distance pour avoir la plus courte distance des deux droites D et Δ. Dans la figure ci-dessous les deux droites sont projetées en *d* et en δ, et le plan P est défini par la droite *d* et par la parallèle $a\delta_1$ menée à δ par le point *a* de *d* de cote 6; de sorte que la perpendiculaire *ae* aux horizontales du plan P



est une ligne de plus grande pente de ce plan. L'intervalle de cette ligne de plus grande pente est évidemment *ab*, et on en déduit l'intervalle *ad* de la perpendiculaire au plan P au moyen du triangle rectangle *bcd*, dans lequel on a pris $ac = 1$. La droite *ae* est

aussi la projection de la perpendiculaire au plan P menée par le point a, et la graduation qu'elle porte est celle qui est relative à cette perpendiculaire.

Appelons Q le plan parallèle à cette droite mené par d, et Q_1 le plan analogue mené par δ. Le plan Q est défini par d et par ae; le plan Q_1 est défini par δ et par la parallèle kk_1 à ae menée par le point de δ de cote 8.

Le plan horizontal de cote 7 coupe le plan Q et le plan Q_1 suivant deux horizontales, qui se rencontrent au point p; de même le plan horizontal de cote 10 coupe le plan Q et le plan Q_1 suivant deux horizontales, qui se rencontrent au point q. La droite pq est la perpendiculaire commune; elle rencontre d au point α dont on sait déterminer la cote (227); elle rencontre δ au point β dont on sait également déterminer la cote. On pourra donc calculer la distance de ces deux points, ce qui fera connaitre la plus courte distance des deux droites.

250. **Angle de deux droites.** — Si les deux droites ne se coupent pas, leur angle est égal à celui que fait l'une d'elles avec la parallèle à l'autre menée par un de ses points. On peut donc toujours supposer que les deux droites se coupent.

Si les deux droites se coupent, pour avoir leur angle on rabat cet angle autour d'une horizontale de ce plan; il suffit, pour cela, de rabattre le sommet de l'angle (241) et de joindre le sommet rabattu aux points de rencontre des deux droites avec la charnière.

251. **Angle de deux plans.** — On procède comme si les deux plans étaient représentés par la méthode des deux plans de projection. On détermine donc d'abord l'intersection des deux plans et, par un point de cette droite, on mène un plan perpendiculaire à celle-ci. Cela fait, on détermine ensuite l'intersection de ce nouveau plan avec chacun des plans donnés, et l'on est alors ramené à trouver l'angle des deux droites ainsi obtenues (250).

252. **Angle d'une droite et d'un plan.** — On ramène encore ce problème à celui de la détermination de l'angle de deux droites. Pour cela, on mène par un point de la droite la perpendiculaire au plan donné, et on détermine l'angle de cette perpendiculaire et de la droite

donnée. Cet angle étant le complément de l'angle cherché, on a facilement celui-ci.

253. REMARQUE. — Ces notions sont suffisantes pour montrer comment on peut traiter par la méthode des plans cotés tous les problèmes que nous avons résolus par la méthode des deux plans de projection. Nous engageons néanmoins le lecteur à les traiter, pour bien se familiariser avec la méthode des plans cotés.

EXERCICES SUR LA GÉOMÉTRIE COTÉE

1. Déterminer la cote du point de rencontre de deux droites graduées qui ont même projection.

2. Reconnaître si un point donné par sa cote et sa projection est situé dans un plan donné par son échelle de pente.

3. Un plan est défini par deux droites concourantes graduées. On donne la projection d'un point de ce plan, déterminer sa cote. Elever en ce point la perpendiculaire au plan et porter sur cette droite une longueur donnée. Trouver la cote de l'extrémité ainsi obtenue.

4. On donne un plan par son échelle de pente et un point par sa cote et sa projection. Trouver le point symétrique de celui-ci par rapport au plan.

5. Trouver la distance de deux droites parallèles données.

6. Déterminer la cote du milieu de la perpendiculaire commune à deux droites données, dont l'une est verticale.

7. Construire la plus courte distance de deux droites dont les projections sont parallèles et qui ont leurs graduations égales et croissant en sens inverse.

8. Déterminer l'angle de deux droites qui ont même projection horizontale.

9. Angle de deux plans dont l'un est vertical et l'autre donné par son échelle de pente.

10. Angle d'une droite et d'un plan, la droite ayant sa projection parallèle à celle de la ligne de plus grande pente du plan.

11. Déterminer la projection d'un cercle donné par son plan, la projection de son centre et la longueur de son rayon.

12. XX' est la trace horizontale d'un plan P, qui fait un angle de 40° avec le plan horizontal; o' est la projection horizontale d'un point O dont la cote verticale est de 62^{mm}, la distance $o'\omega$ de o' à XX' étant de 48^{mm}.

1° Tracer la projection cotée d'une droite (D) passant par le point O, parallèle au plan P et faisant un angle de 25° avec le plan horizontal; mener par cette droite un plan Q perpendiculaire au plan P ; construire les traces du plan Q sur le plan horizontal et sur le plan P.

2° Tracer la projection cotée d'un tétraèdre régulier OABC dont le point O est un sommet, dont la droite (D) est un axe, dont un des côtés, BC, est situé dans le plan P, et dont par conséquent le plan Q est un plan de symétrie.

(*École navale, concours de 1891.*)

13. Un triangle ABC est situé dans le plan de cote zéro; ses côtés ont pour valeurs : $AB = 65^{mm}$, $BC = 62^{mm}$, $CA = 51^{mm}$.

1° Construire sur ce triangle un tétraèdre SABC, sachant que ses arêtes opposées sont deux à deux rectangulaires, et dont la hauteur issue du sommet S est donnée et égale à 20^{mm}. Sphère circonscrite.

2° Construire le tétraèdre formé par les plans tangents, menés à la sphère circonscrite au tétraèdre précédent, aux points S, A, B, C.

On se servira comme plan auxiliaire de projection du plan vertical parallèle à la droite joignant le centre du cercle circonscrit au point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

(*École navale, concours de 1893.*)

14. Etant donnés deux points A et B dont les cotes au-dessus du plan de comparaison sont respectivement A ($0^m,38$), B ($0^m,56$) et dont la distance horizontale est de $0^m,42$, construire, à l'échelle de $\frac{1}{10}$, la projection cotée d'un prisme droit à base carrée satisfaisant aux conditions suivantes : le côté de la base est AB ; la pente du plan de cette base est $\frac{1}{2}$; la hauteur du prisme est de $0^m,60$.

Indiquer les intersections de la figure avec une série de plans horizontaux équidistants entre eux de $0^m,20$.

(*École navale, concours de 1890.*)

15. Une pyramide quadrangulaire SABCD repose par sa base ABCD sur un plan horizontal de cote 10^m. Les faces SAB, SBC, SCD, SDA ont des pentes respectivement égales à $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{6}{7}$. On donne : $SA = 18^m$; $SC = 17^m$; $AB = 16^m$; cote de $S = 21^m$.

On demande de représenter par la méthode des plans cotés, à une échelle convenable, la pyramide SABCD et son intersection par un plan ayant une pente de $\frac{2}{7}$ sur un plan horizontal.

(*Journal de* VUIBERT, *8e année.*)

16. Un tétraèdre SABC repose par sa base ABC sur un plan de pente 1. Le côté AB, qui est horizontal, a pour cote 12^m et le sommet S a pour cote 19^m. On donne : $AB = 6^m$; $SA = SB = 8^m$; $BC = 8^m$; $AC = 7^m,5$.

1° Construire la projection du tétraèdre;

2° Couper la pyramide par un plan perpendiculaire à la hauteur SI de la face SAB en son milieu J et déterminer la projection de la section du tétraèdre.

3° Représenter le tronc de pyramide ainsi obtenu, situé au-dessous du plan sécant, et déterminer l'ombre portée par ce tronc sur le plan de la base ABC, les rayons lumineux étant parallèles à une direction D dont la projection fait avec *ab* un angle de 45° et dont la pente est $\frac{1}{4}$. Les cotes de cette droite D croissent dans le même sens que celles de l'arête AC du tétraèdre.

Echelle : $\frac{1}{100}$. (CHARRUIT.)

LIVRE II

LA DÉTERMINATION DES SURFACES ET LES PLANS TANGENTS

CHAPITRE PREMIER

DÉTERMINATION DES SURFACES

§ I. — *Généralités sur les surfaces.*

254. Définitions. — Le *volume* d'un corps est la portion de l'espace occupée par ce corps. On appelle *surface* d'un corps ce qui sépare ce corps de l'espace environnant. On appelle *ligne* la limite de séparation de deux surfaces ou la limite d'une portion de surface.

En Géométrie on considère les surfaces comme engendrées par des lignes qui se déforment ou non en se déplaçant. Les positions successives occupées par les lignes qui engendrent une surface s'appellent les *génératrices* de la surface.

Par exemple, un cône ou *surface conique* est engendré par une droite qui tourne autour d'un point fixe appelé *sommet*, et qui s'appuie sur une ligne fixe appelée *directrice*. Les positions successives occupées par la droite mobile s'appellent les génératrices du cône.

255. Plan tangent. — On démontre, en géométrie analytique, que le lieu géométrique des tangentes en un point M d'une surface à toutes les lignes tracées par ce point sur la surface est en général un plan. Ce plan est appelé le *plan tangent* en M à la surface. Le point M s'appelle le point de contact du plan tangent.

Le lieu des tangentes en un point M d'une surface à toutes les lignes tracées par ce point sur la surface n'est pas toujours un plan. Il existe quelquefois, en effet, sur une surface des points appelés *points singuliers* et pour lesquels ce lieu est un cône. Mais en général le lieu des tangentes est un plan.

De la définition même du plan tangent il suit que le plan tangent en un point d'une surface est déterminé par les tangentes à deux lignes quelconques tracées par ce point sur la surface. On saura donc déterminer ce plan tangent, en géométrie descriptive, si l'on sait déterminer les tangentes à ces deux lignes.

256. Normale. — On appelle *normale* en un point M d'une surface la perpendiculaire menée par le point M au plan tangent en ce point. Le point M s'appelle alors le *pied* ou le point d'*incidence* de la normale.

Quand on sait construire la normale en un point M d'une surface, sans avoir recours au plan tangent, on obtient celui-ci en menant par le point M le plan perpendiculaire à la normale.

257. Plans normaux. — On appelle *plan normal* en un point M d'une surface le plan normal en M à une courbe tracée par ce point sur la surface.

Il y a une infinité de plans normaux en un point M d'une surface. Tous ces plans passent par la normale en M. Quand on en sait construire deux, leur intersection donne la normale en M à la surface.

§ II. — *Détermination de la sphère.*

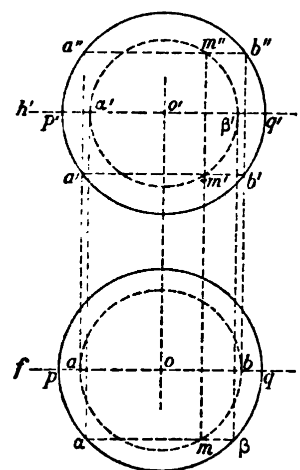
258. Définitions. — La *sphère* est engendrée par la révolution d'un cercle autour d'un de ses diamètres. On dit aussi que la sphère est le lieu géométrique des points qui sont à la même distance d'un point fixe appelé *centre* de la sphère. La distance constante d'un point de la sphère à son centre s'appelle le *rayon* de la sphère.

En géométrie descriptive on détermine une sphère par les projections de son centre et par la longueur de son rayon.

259. Problème. — *Une sphère est définie par son centre et par son*

rayon ; on connaît l'une des projections d'un point de la surface et l'on demande de trouver l'autre projection.

Soient o et o' les projections du centre de la sphère. Si l'on coupe cette sphère par le plan horizontal h' mené par le centre de la sphère, la section est un grand cercle dont la projection horizontale est la circonférence décrite du point o comme centre avec un rayon égal au rayon R de la sphère. Toutes les sections faites dans la sphère par des plans horizontaux se projettent horizontalement suivant des circonférences de centre o et de rayon inférieur à R ; par conséquent tous les points de la sphère sont projetés horizontalement à l'intérieur du cercle de centre o et de rayon R. Pour cette raison, et pour d'autres que nous donnerons plus tard, le cercle déterminé dans la sphère par le plan horizontal h' s'appelle le *cercle de contour apparent horizontal.*



Pareillement, le plan de front, f, mené par le centre de la sphère, détermine un grand cercle projeté verticalement suivant un cercle de centre o' et de rayon R. Tous les points de la sphère sont projetés verticalement à l'intérieur du cercle de centre o' et de rayon R, et le grand cercle dont il est la projection s'appelle le *cercle de contour apparent vertical.* Cela posé :

Première méthode. — Supposons par exemple que l'on se donne la projection horizontale m d'un point de la surface, et cherchons sa projection verticale. Soit M le point de la sphère projeté horizontalement en m. Coupons la sphère par le plan de front mené par M et dont la trace horizontale passe nécessairement par m. La section est un petit cercle qui rencontre le cercle de contour apparent horizontal en deux points projetés horizontalement en α et β. Les projections verticales de ces points sont évidemment sur h' en α' et en β'. Il en résulte que la projection verticale du cercle section est la circonférence de centre o' décrite sur $\alpha'\beta'$ comme diamètre.

La projection verticale du point M devant se trouver sur ce cercle, on l'obtiendra au moyen de la ligne de rappel du point m. Cette ligne

de rappel rencontre le cercle $\alpha'\beta'$ en deux points m' et m'' qui sont les projections verticales des points de la sphère projetés horizontalement en m.

On en conclut que tout point m situé à l'intérieur de la projection horizontale du cercle de contour apparent horizontal est la projection horizontale de deux points de la sphère.

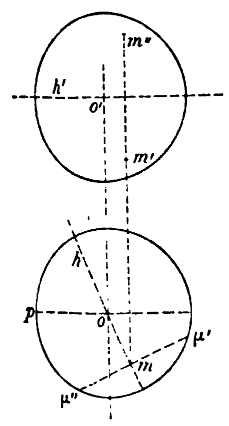
On peut dire aussi que la verticale menée par le même point rencontre la sphère en deux points. Ces deux points sont confondus si la ligne de rappel du point m est tangente à la circonférence $\alpha'\beta'$. Dans ce cas le point de contact ne pouvant être que l'un des points α' ou β', le point m coïncide avec l'un des points α ou β, par suite le point M est situé sur le cercle de contour apparent horizontal. La verticale du point M étant alors tangente à la sphère, on voit que le grand cercle de contour apparent horizontal est le lieu des points de contact des tangentes à la sphère perpendiculaires au plan horizontal.

Si, au lieu de se donner la projection horizontale d'un point de la sphère, on se donnait la projection verticale de ce point, on couperait par un plan horizontal. Par des raisonnements analogues à ceux qui ont été faits plus haut, dans le cas de la projection horizontale, on verrait alors : 1° que si un point est situé à l'intérieur de la projection verticale du contour apparent vertical, il est la projection verticale de deux points de la sphère ; 2° que la ligne de bout menée par un point situé à l'intérieur de la projection verticale du contour apparent vertical, rencontre la sphère en deux points ; 3° que le cercle de contour apparent vertical est le lieu des points de contact des tangentes à la sphère perpendiculaires au plan vertical.

Deuxième méthode. — Le même problème peut aussi être résolu de la manière suivante :

Supposons encore que l'on cherche la projection verticale d'un point M de la sphère, connaissant sa projection horizontale m. Coupons la sphère par le plan vertical passant par le point M et par le centre de la surface. La section est un grand cercle dont la projection horizontale est om. Rabattons ce grand cercle sur le plan du cercle de contour apparent horizontal, en le faisant tourner autour de l'horizontale $(oh, o'h')$. Le grand cercle section se rabat suivant le cercle op

et le point M se rabat, d'une part sur ce cercle *op*, et d'autre part sur la perpendiculaire à *om* menée par le point *m*. Cette perpendiculaire rencontre le cercle *op* en deux points μ' et μ'', qui sont les rabattements des points de la sphère projetés horizontalement en *m*. On en déduit les projections verticales *m'* et *m''* en relevant le plan rabattu.



Si, au lieu de la projection horizontale du point M, on donnait la projection verticale, on couperait par le plan de bout passant par le point et par le centre de la sphère; puis on rabattrait la section sur le plan du cercle de contour apparent vertical.

La discussion se fait sans aucune difficulté, et conduit aux mêmes conclusions que par la première méthode.

§ III. — *Détermination des cônes et des cylindres.*

260. **Définitions.** — Une surface *conique* ou *cône* est la surface engendrée par une droite qui tourne autour d'un point fixe appelé *sommet* et qui est assujettie à rencontrer une ligne fixe appelée *directrice*. Quand la directrice est une ligne plane, on l'appelle la *base* du cône.

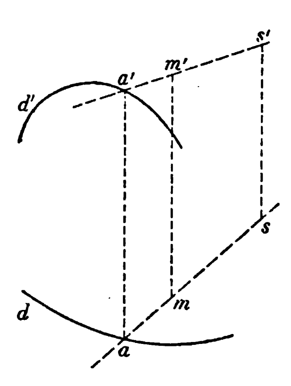
On appelle *cylindre* ou surface *cylindrique* la surface engendrée par une droite qui se déplace parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une ligne fixe appelée *directrice* ou base du cylindre, suivant qu'elle est gauche ou plane.

Une surface cylindrique peut évidemment, d'après cette définition, être considérée comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'éloigne indéfiniment dans une direction donnée.

On détermine une surface conique, en géométrie descriptive, par les projections du sommet et par les projections de la directrice. Pareillement, on détermine une surface cylindrique par les projections de la directrice et par les projections d'une parallèle à la direction des génératrices.

261. Problème I. — *On donne les projections du sommet et de la directrice d'un cône; on connaît l'une des projections d'un point de la surface, et l'on demande de trouver l'autre projection.*

Soient (s, s') le sommet et (d, d') la directrice du cône. Supposons, par exemple, que l'on connaisse la projection verticale m' d'un point de la surface, et proposons-nous de déterminer la projection horizontale de ce point. Appelons, pour cela, M un point de la surface projeté verticalement en m', et considérons la génératrice SM qui passe par M. Cette génératrice, qui est projetée verticalement en $s'm'$, rencontre la directrice en un point dont la projection verticale se trouve à la fois sur $s'm'$ et sur d'. Soit alors a' l'un des points de rencontre de $s'm'$ et de d', et soit a la projection horizontale du point de la directrice dont la projection verticale est a'. La génératrice $(sa, s'a')$ de la surface est telle que sa projection verticale passe par m'; donc, le point de cette génératrice projeté en m' est un point du cône projeté aussi en m'. La projection horizontale de ce point étant m, on voit que le point m est l'un des points cherchés.



Il en résulte que le problème admet autant de solutions qu'il y a de points de rencontre de $s'm'$ avec d'.

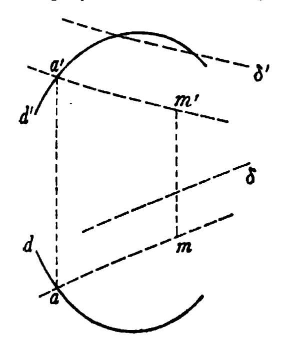
On opère d'une manière analogue pour trouver la projection verticale connaissant la projection horizontale.

262. Problème II. — *Un cylindre est défini par sa directrice et par la direction des génératrices; on connaît l'une des projections d'un point de la surface et l'on demande de trouver l'autre projection.*

Soient (d, d') la directrice et (δ, δ') la direction des génératrices. Supposons, par exemple, que l'on connaisse la projection horizontale d'un point de la surface, et proposons-nous de déterminer la projection verticale de ce point.

On pourrait résoudre ce problème en considérant le cylindre comme un cône dont le sommet est à l'infini dans la direction (δ, δ'), mais nous allons le résoudre directement. Pour cela, appelons encore M un

point de la surface projeté horizontalement en *m*, et cherchons les projections de la génératrice du cylindre qui passe par ce point. On connait la projection horizontale de cette génératrice, projection horizontale qui n'est autre que la parallèle à δ menée par le point *m*. Pour trouver sa projection verticale, nous observons que la génératrice rencontre la directrice en un point projeté horizontalement sur *d* et sur la parallèle à δ menée par *m*. Si donc cette parallèle rencontre *d* en *a*, le point *a* sera la projection horizontale du point de rencontre de la directrice et de la génératrice du point M. Il en résulte que la projection verticale de ce point est *a'* et, par suite, que la projection verticale de la génératrice du point M est la parallèle à δ' menée par *a'*. La projection verticale, *m'*, du point M devant se trouver sur cette parallèle, on l'obtiendra par une ligne de rappel.



Il y aura, d'après cela, autant de solutions que de points de rencontre de *d* avec la parallèle à δ menée par *m*.

On opérerait d'une manière analogue pour trouver la projection horizontale connaissant la projection verticale.

263. Remarque. — Les deux problèmes que nous venons de résoudre reviennent en réalité à déterminer les points de rencontre d'une verticale ou d'une ligne de bout avec une surface conique ou cylindrique. Quand la directrice est une courbe plane, on pourra donc leur appliquer la méthode qui sera donnée ultérieurement pour trouver les points de rencontre d'une droite avec une surface conique ou cylindrique.

§ IV. — *Détermination des surfaces de révolution.*

264. Définitions. — On appelle *surface de révolution* toute surface engendrée par une ligne plane ou gauche tournant autour d'une droite appelée *axe de révolution* de la surface. Parmi les surfaces de révolution les plus simples on distingue :

1° La *sphère*, engendrée par la révolution d'un cercle autour de l'un de ses diamètres ;

2° Le *cône de révolution*, engendré par une droite tournant autour d'une autre droite qu'elle rencontre à distance finie ;

3° Le *cylindre de révolution*, engendré par la révolution d'une droite autour d'une autre droite à laquelle elle est parallèle ;

4° L'*ellipsoïde de révolution*, engendré par la révolution d'une ellipse autour de l'un de ses axes. L'ellipsoïde est *allongé* ou *aplati*, suivant que l'axe de révolution coïncide avec le grand axe ou avec le petit axe. Quand les deux axes de l'ellipse génératrice sont égaux, l'ellipsoïde devient une sphère ;

5° L'*hyperboloïde de révolution*, engendré par la révolution d'une hyperbole autour de l'un de ses axes. Si l'axe de révolution coïncide avec l'axe transverse de l'hyperbole, on a un hyperboloïde de révolution à *deux nappes*. Si l'axe de révolution coïncide avec l'axe non transverse, on a un hyperboloïde de révolution à *une nappe* ;

6° Le *paraboloïde de révolution*, engendré par la révolution d'une parabole autour de son axe ;

7° La *surface gauche de révolution*, engendrée par la révolution d'une droite autour d'une autre droite non située dans le même plan avec la première. On démontre que la surface gauche de révolution n'est autre chose qu'un hyperboloïde de révolution à une nappe ;

8° Le *tore*, engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite quelconque de son plan. Un anneau circulaire nous offre l'image d'un tore.

265. **Méridiens et parallèles.** — On appelle indifféremment *méridiens* ou *méridiennes* d'une surface de révolution les sections faites dans la surface par des plans passant par l'axe.

Lorsque la courbe génératrice d'une surface de révolution tourne autour de l'axe, tout point de cette courbe décrit une circonférence ayant pour centre le point de rencontre de l'axe et du plan perpendiculaire à l'axe mené par ce point ; le rayon de cette circonférence est d'ailleurs égal à la distance du point à l'axe. Il suit de là que toute section faite dans une surface de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe est une circonférence ou un système de circonférences ayant pour centre le point de rencontre de l'axe et du plan sécant. Ces circonférences s'appellent des *parallèles* de la surface.

Tout plan passant par l'axe de révolution est évidemment un plan de symétrie pour chacun des parallèles de la surface et par suite pour la surface. La section méridienne déterminée par ce plan est le lieu des points de rencontre des divers parallèles avec le plan sécant ; les deux points de rencontre du même parallèle avec le plan sécant étant

évidemment symétriques par rapport à l'axe, il en résulte que l'axe de révolution est un axe de symétrie pour tous les méridiens.

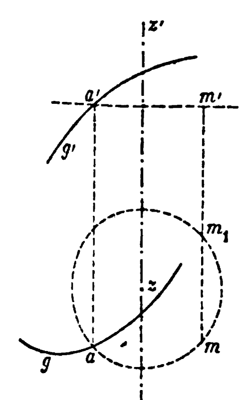
Quand on fait tourner un méridien autour de l'axe, les points du méridien décrivent les divers parallèles de la surface; par conséquent la surface de révolution peut aussi être engendrée par la révolution d'un méridien autour de l'axe. Ceci montre, en passant, que tous les méridiens de la surface sont égaux, et qu'une surface de révolution ne cesse de coïncider avec elle-même quand on la fait tourner autour de son axe.

En géométrie descriptive on appelle *méridien principal* d'une surface de révolution le méridien dont le plan est parallèle au plan vertical, si l'axe de révolution de la surface est de front, ou le méridien dont le plan est parallèle au plan horizontal, si l'axe est horizontal. Quand l'axe n'est ni horizontal, ni de front, il n'y a donc pas lieu de définir le méridien principal.

266. **Problème.** — *On donne l'axe et la génératrice d'une surface de révolution; on connaît l'une des projections d'un point de la surface et l'on demande de trouver l'autre projection.*

Il n'est pas possible de résoudre ce problème lorsque l'axe de révolution est quelconque. Nous examinerons donc plusieurs cas suivant la position de l'axe par rapport aux plans de projection.

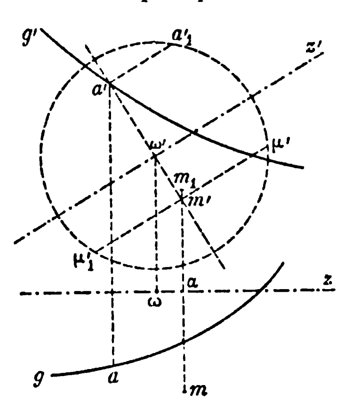
Premier cas. — *L'axe est vertical ou de bout.* — Supposons, par exemple, que l'axe soit vertical, et cherchons d'abord la projection verticale des points de la surface qui se projettent horizontalement en un point donné, m. Pour cela, appelons (g, g') la génératrice, (z, z') l'axe de révolution et M l'un des points de la surface qui sont projetés horizontalement en m. Considérons le parallèle de la surface qui passe par le point M. Ce parallèle étant situé dans un plan horizontal se projette horizontalement en vraie grandeur, suivant un cercle de centre z et qui passe par le point m. Il rencontre la génératrice de la surface en un point qui est projeté horizontalement à l'intersection de g et de la projection horizontale du parallèle. Si donc a est l'un des points de rencontre de ces deux lignes, le point (a, a') est le point de rencontre de la génératrice



avec le parallèle du point M. Il en résulte que la projection verticale de ce parallèle est sur la perpendiculaire à (z, z') menée par a'. On en conclut que le point M est projeté verticalement en m', à l'intersection de cette perpendiculaire et de la ligne de rappel du point m. Il y a autant de solutions que de points de rencontre de g avec la circonférence zm.

Cherchons maintenant la projection horizontale des points de la surface qui se projettent verticalement en un point donné, m'. Si l'on appelle encore M un point de la surface dont la projection verticale est m', on voit que la projection verticale du parallèle de ce point est la perpendiculaire à (z, z') menée par m'. On en déduit que le parallèle rencontre (g, g') en un point (a, a') et que sa projection horizontale est la circonférence za, de centre z et de rayon za. Cette circonférence étant rencontrée en deux points, m et m_1, par la ligne de rappel du point m', il en résulte que m et m_1 sont deux des points cherchés. Chaque point de rencontre de $m'a'$ avec g' donne donc deux solutions du problème.

Deuxième cas. — *L'axe est horizontal ou de front.* — Lorsque l'axe est horizontal, on peut déterminer la projection verticale d'un point connaissant sa projection horizontale, mais on ne peut pas résoudre le problème inverse. De même, lorsque l'axe est de front, on peut déterminer la projection horizontale connaissant la projection verticale, mais on ne peut pas résoudre le problème inverse.



Pour fixer les idées, supposons l'axe de front, et proposons-nous alors de construire la projection horizontale des points de la surface dont on donne la projection verticale. Soient (z, z') l'axe de révolution, (g, g') la génératrice et m' la projection verticale donnée. Appelons M un point de la surface projeté verticalement en m'. Pour trouver la projection horizontale du point M, nous remarquerons que le point M est à l'intersection du parallèle de ce point et de la ligne de bout menée par m'. Tout revient donc à construire le parallèle du point M. Or le plan de ce parallèle étant perpendiculaire à l'axe, la projection verticale du parallèle est située sur la perpendiculaire $m'\omega'$ menée à z' par le point m'. Soit a'

l'un des points de rencontre de $m'\omega'$ et de g'; le point (a, a') de la génératrice est évidemment le point de rencontre de cette génératrice et du parallèle du point M. D'ailleurs, le centre de ce parallèle étant le point (ω, ω'), intersection de l'axe et du plan du parallèle, celui-ci est déterminé par son centre et par un point. Pour trouver alors les points de rencontre du parallèle et de la ligne de bout menée par le point m', il suffit de rabattre le parallèle sur le plan de front de l'axe. Le rabattement est la circonférence de centre ω' et passant par le point a'_1, rabattement du point (a, a'). Le rabattement de la ligne de bout menée par m' étant $\mu'\mu'_1$, les points de rencontre de cette ligne et du parallèle sont μ' et μ'_1 et, en prenant $\alpha m = \alpha m_1 = m'\mu' = m'\mu'_1$, on obtient en m et en m_1 les projections horizontales de deux des points de la surface qui sont projetés verticalement en m'. Tout point de rencontre de g' et de $m'\omega'$ peut donc donner deux solutions du problème : il suffit, pour cela, que le point m' soit intérieur au rabattement du parallèle du point (a, a').

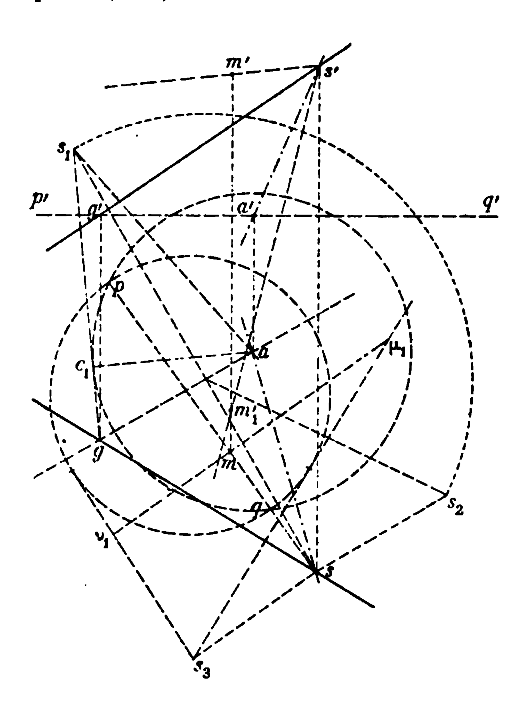
Le raisonnement et les constructions seraient pareils si, au lieu de donner l'axe de front et la projection verticale du point, on donnait l'axe horizontal et la projection horizontale du point.

267. Remarque. — Nous avons dit plus haut que la solution du problème précédent n'est généralement pas possible quand l'axe est quelconque. Nous allons traiter un exemple dans lequel la solution est toujours possible.

268. **Problème.** — *On donne les projections de l'axe et d'une génératrice d'un cône ou d'un cylindre de révolution ; on connaît une projection d'un point de la surface, trouver l'autre projection.*

1° **Cas du cône.** — Soient (s, s') le sommet du cône, $(sa, s'a')$ l'axe et $(sg, s'g')$ la génératrice. Proposons-nous, par exemple, de chercher la projection verticale des points de la surface projetés horizontalement en un point donné, m. Pour cela, nous chercherons les projections verticales des deux génératrices de la surface qui sont projetées horizontalement en sm. Ces deux génératrices s'obtiennent en coupant le cône par le plan vertical dont la trace horizontale est sm, et, si l'on considère une sphère inscrite dans le cône, elles sont tangentes à la section faite dans cette sphère par le plan vertical sm. Nous allons donc déterminer une sphère inscrite dans le cône et la section faite dans cette sphère par le plan vertical sm.

Pour déterminer une sphère inscrite dans le cône, nous rabattrons le plan de l'axe et de la génératrice autour de l'horizontale (ag, $a'g'$) de ce plan. Soit s_1 le rabattement du point s obtenu en appliquant la règle du triangle rectangle, et soient s_1a et s_1g les rabattements respectifs de l'axe et de la génératrice. Le rayon de la sphère inscrite qui a pour centre le point (a, a') de l'axe est la distance ac_1 du point a au



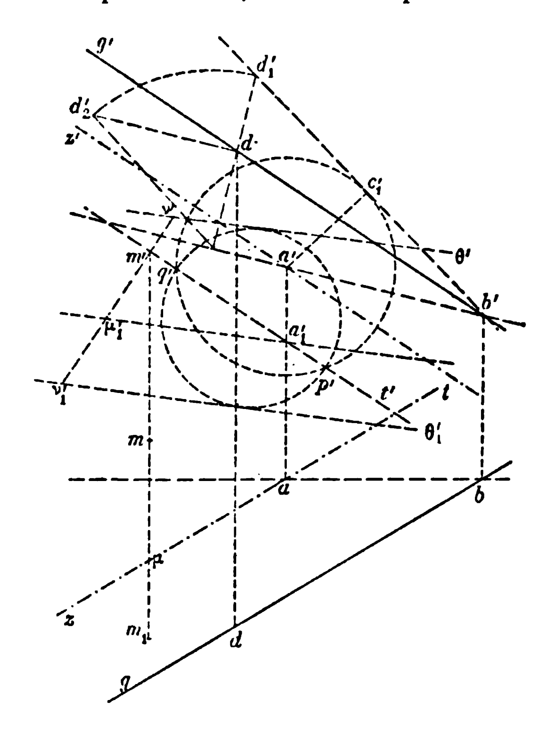
rabattement s_1g de la génératrice; il en résulte que la projection horizontale du grand cercle de contour apparent horizontal de cette sphère est la circonférence décrite du point a comme centre avec la longueur ac_1 comme rayon.

La sphère inscrite ayant été ainsi déterminée, si on la coupe par le plan vertical sm, la section est un petit cercle dont le rabattement autour de l'horizontale (pq, $p'q'$), sur le plan horizontal du point (a, a'), est la circonférence décrite sur pq comme diamètre, car pq est la projection horizontale du diamètre horizontal de ce petit cercle. Le rabattement du sommet sur le même plan et autour de la même horizontale étant s_3, les génératrices cherchées du cône seront rabattues

suivant les tangentes $s_3\mu_1$ et $s_3\nu_1$ à la circonférence pq. Les points rabattus en μ_1 et en ν_1 sont relevés respectivement en (m, m'_1) et en (m, m') ; par suite, les projections verticales des génératrices du cône projetées horizontalement en sm sont $s'm'$ et $s'm'_1$. Il en résulte que les projections verticales des points du cône projetés horizontalement en m sont m' et m_1.

Pour que le problème soit possible, il est nécessaire et suffisant que sm coupe la circonférence ac_1.

2° Cas du cylindre. — Soient $(az, a'z')$ l'axe et $(bg, b'g')$ une génératrice de la surface. Proposons-nous, par exemple, de chercher les projections horizontales des points de la surface qui sont projetés verticalement en un point donné, m'. Comme pour le cône, ces points



sont situés sur les génératrices de la surface dont la projection verticale est la parallèle $m't'$ à $a'z'$ menée par m'. Ces génératrices sont d'ailleurs tangentes à la section faite par le plan de bout $m't'$ dans une

sphère quelconque inscrite dans le cylindre. Le rayon de cette sphère est la distance du point (a, a') à la génératrice $(bg, b'g')$: on l'a obtenu, dans l'épure ci-dessus, en rabattant le plan de l'axe et de la génératrice sur le plan de front mené par la ligne de front $(ab, a'b')$. Le rabattement $b'd'_1$ de la génératrice a été obtenu en rabattant le point (d, d') par la règle du triangle rectangle, et le rayon d'une sphère inscrite est égal à la distance $a'c'_1$ du point a' à la droite $b'd'_1$. Il en résulte que si l'on prend le point (a, a') comme centre de cette sphère, la projection verticale de son cercle de contour apparent vertical est la circonférence $a'c'_1$.

La section de la sphère par le plan de bout $m't'$ est un cercle de diamètre $p'q'$, et que l'on a rabattu sur le plan de front mené par $(ab, a'b')$. La parallèle (at, a'_1t') aux génératrices située dans ce plan de bout est rabattue elle-même en $a'_1\mu'_1$, et son rabattement s'obtient en rabattant le point (μ, m'), puisque le point (a, a'_1) reste fixe. Donc les génératrices du cylindre tangentes à la section sont rabattues suivant les tangentes $\nu'\theta'$ et $\nu'_1\theta'_1$ menées au cercle $p'q'$ parallèlement à $a'_1\mu'_1$.

Mais les points du cylindre projetés verticalement en m' se trouvant à l'intersection de ces génératrices et de la ligne de bout menée par m', seront rabattus en ν' et en ν'_1, sur la perpendiculaire à $p'q'$ menée par m'. En relevant le plan de bout mené par $p'q'$, on aura donc en (m, m') et en (m_1, m') les projections des points rabattus en ν' et en ν'_1, c'est-à-dire que m et m_1 seront les projections horizontales cherchées.

La seule condition de possibilité du problème est que $m't'$ coupe la circonférence $a'c'_1$.

269. Remarque I. — Les deux problèmes que nous venons de résoudre peuvent encore s'énoncer ainsi :

Une surface de révolution étant définie par son axe et par une génératrice, trouver ses points de rencontre avec une verticale ou avec une ligne de bout.

On comprend, d'après cela, qu'il soit impossible de les résoudre dans le cas général, puisqu'ils se ramènent à la détermination des points d'intersection d'une surface de révolution et d'une droite. Dans le cas particulier d'un cône ou d'un cylindre de révolution, nous donnerons plus loin une solution différente de celle qui a été suivie au n° 268.

270. REMARQUE II. — Bien qu'il ne soit pas possible, dans le cas général, de déterminer les points d'une surface de révolution dont on donne soit la projection horizontale, soit la projection verticale, connaissant l'axe et une génératrice de la surface, il est toujours possible, quand la surface de révolution est ainsi définie, de construire autant de points que l'on veut de la surface.

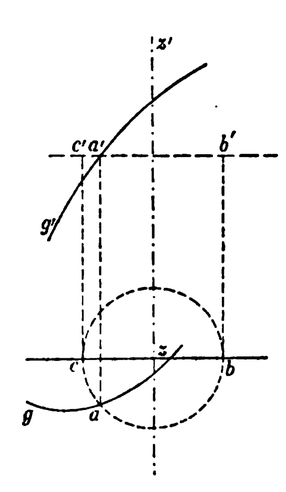
Pour cela, on mène par un point A de la génératrice le plan P perpendiculaire à l'axe. Ce plan P est le plan d'un parallèle de la surface passant par A et dont le rayon est égal à la distance du point A à l'axe. En rabattant le parallèle sur un plan horizontal ou sur un plan de front, on pourra construire le rabattement de ce parallèle et, ensuite, par l'opération inverse, autant de points que l'on veut de chacune de ses projections. Comme tous les points du parallèle appartiennent à la surface, on aura ainsi tous les points de la surface en faisant varier le point A sur la génératrice.

271. **Construction d'une méridienne.** — Nous avons vu qu'une méridienne d'une surface de révolution peut être considérée comme le lieu des points d'intersection de son plan avec les divers parallèles de la surface. Or la remarque précédente nous fournit le moyen de construire autant de parallèles que l'on veut de la surface. Si donc on appelle Δ la droite d'intersection du plan de la méridienne et du plan d'un parallèle, les points de rencontre de la droite Δ et du parallèle seront deux points de la méridienne considérée. On obtiendra tous les points de la méridienne en faisant varier le parallèle. D'ailleurs, les points de rencontre de Δ et du parallèle s'obtiendront par un rabattement dans le cas général, et immédiatement quand l'axe de la surface est vertical ou de bout. Nous allons indiquer le détail des constructions sur des exemples.

272. **Exemple I.** — *Construire un point quelconque de la méridienne principale d'une surface de révolution à axe vertical connaissant une génératrice de la surface.*

Soient (z, z') l'axe et (g, g') une génératrice de la surface. Le parallèle d'un point (a, a') de la génératrice est projeté horizontalement suivant une circonférence égale passant par le point a et ayant son centre au pied, z, de l'axe sur le plan horizontal. Cette circonférence

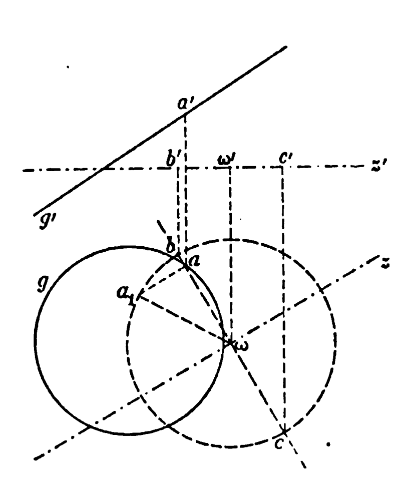
rencontre la trace horizontale du plan du méridien principal en deux points b et c, qui sont les projections horizontales de deux points de la méridienne. Mais le parallèle étant projeté verticalement suivant la perpendiculaire à l'axe menée par a', les projections verticales, b' et c', de ces points s'en déduiront par des lignes de rappel.



273. Exemple II. — *Une surface de révolution à axe horizontal est engendrée par une ellipse située dans un plan de bout et dont la projection horizontale est un cercle donné. Construire un point quelconque de la méridienne parallèle au plan horizontal.*

On connaît la projection verticale de la méridienne, puisque cette projection est confondue avec la trace verticale du plan horizontal mené par l'axe. Il s'agit donc de déterminer un point quelconque de la projection horizontale.

Pour cela, appelons (z, z') l'axe de la surface et (g, g') la génératrice dont la projection verticale est confondue avec la trace verticale du plan de bout qui la contient. Si l'on considère le parallèle du point (a, a'), la projection horizontale de ce parallèle est la perpendiculaire à z menée par le point a; le centre du parallèle est donc (ω, ω'). Il en résulte que si l'on rabat ce parallèle sur le plan horizontal de l'axe, le rabattement sera la circonférence de centre ω qui passe par le point a_1, rabattement du point (a, a'). Mais les points de rencontre du parallèle avec le plan horizontal de l'axe n'ayant pas bougé, ces points sont rabattus et projetés horizontalement en b et en c. Il en

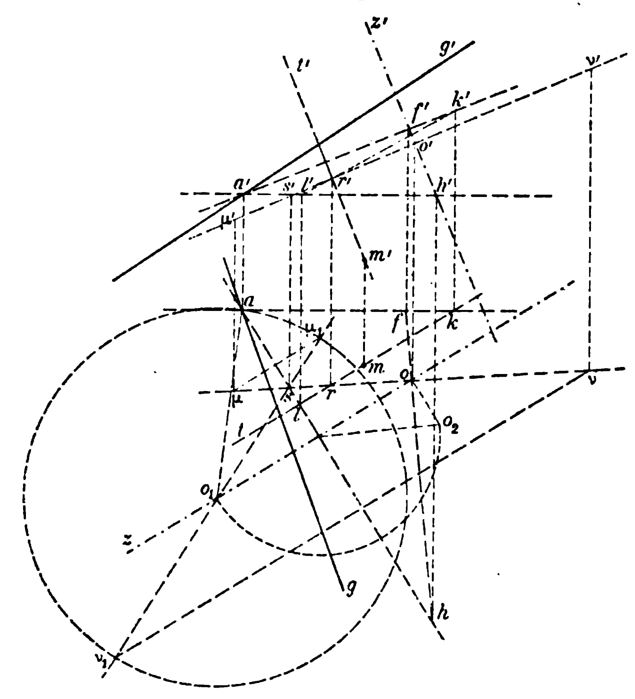


résulte que les points $(b,\ b')$ et $(c,\ c')$ sont les deux points de la méridienne principale situés sur le parallèle du point $(a,\ a')$.

274. Exemple III. — *Construire un point quelconque d'une méridienne quelconque d'une surface gauche de révolution, engendrée par une droite tournant autour d'un axe quelconque.*

Soient $(oz,\ o'z')$ l'axe et $(ag,\ a'g')$ une génératrice de la surface. Proposons-nous de déterminer un point de la méridienne située dans le plan déterminé par l'axe et par un point $(m,\ m')$.

Pour cela, par un point quelconque (a, a') de la génératrice menons le plan perpendiculaire à l'axe et cherchons à construire le parallèle du point $(a,\ a')$, qui est situé dans ce plan. A cet effet, appelons P le



plan perpendiculaire à l'axe mené par (a, a'), et déterminons ce plan par une horizontale $(ah,\ a'h')$ et par une frontale $(af,\ a'f')$; puis construisons le point de rencontre $(o,\ o')$ du plan P et de l'axe. Le parallèle du point $(a,\ a')$ a pour centre le point $(o,\ o')$, et son rayon est égal à la distance du point $(o,\ o')$ au point $(a,\ a')$; son plan est d'ailleurs le plan P. Le parallèle étant ainsi déterminé, construisons l'inter-

section de son plan avec le plan du méridien du point (m, m'). Nous avons déjà un point (o, o') de cette intersection, et, pour en avoir un second, nous avons déterminé le point de rencontre (r, r') du plan P avec la parallèle $(mt, m't')$ à l'axe menée par (m, m'). La droite d'intersection du plan P avec le plan du méridien du point (m, m') est donc $(or, o'r')$, et elle rencontre l'horizontale $(ah, a'h')$ au point (s, s'). Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer les points de rencontre de cette droite avec le parallèle du point (a, a').

Pour cela, rabattons le plan P du parallèle autour de $(ah, a'h')$ sur le plan horizontal de cette droite.

Le rabattement du point (o, o'), obtenu au moyen de la règle du triangle rectangle, est le point o_1; donc la droite $(or, o'r')$ est rabattue en o_1s, puisque le point (s, s') n'a pas bougé. Le point (a, a') n'ayant pas bougé non plus, le rabattement du parallèle est la circonférence de centre o_1 et de rayon o_1a. Cette circonférence rencontre o_1s en deux points μ_1 et ν_1 qui sont les rabattements des points cherchés. Ces points sont relevés en (μ, μ') et en (ν, ν') sur la droite $(or, o'r')$.

En faisant varier le point (a, a') sur la génératrice $(ag, a'g')$, on obtiendra ainsi autant de points que l'on voudra de la méridienne du point (m, m').

Il est presque superflu d'observer qu'on a supposé que la surface de révolution est engendrée par une droite, pour fixer les idées; mais les constructions seraient tout à fait les mêmes si la génératrice (g, g') était, non pas une droite, mais une ligne quelconque.

275. Points doubles de la méridienne d'une surface de révolution. — La méridienne d'une surface de révolution peut présenter trois sortes de points doubles :

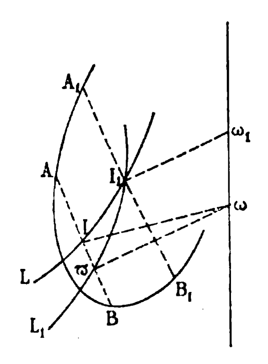
1° Si la génératrice de la surface a un point double, ce point, en tournant autour de l'axe, décrit un parallèle double, dont les points de rencontre avec le plan de la méridienne sont des points doubles de cette ligne.

2° Si la génératrice rencontre l'axe en un point S, ce point est un point commun à toutes les méridiennes, et c'est un point double de chacune d'elles. Les tangentes en ce point à toutes les méridiennes sont situées sur un cône de révolution de sommet S, engendré par la révolution autour de l'axe de la tangente en S à la génératrice. Pour cette raison, le point S s'appelle un *sommet* de la surface.

3° Enfin, s'il existe sur la génératrice deux points qui décrivent le même parallèle, ce parallèle est un parallèle double et ses points de rencontre avec un plan méridien sont deux points doubles de la méridienne située dans ce plan.

La détermination des points doubles de la première et de la deuxième espèce résulte de leur définition et ne présente aucune difficulté. Voici comment on procède pour déterminer les points doubles de la troisième espèce :

Soient A et B les extrémités d'une corde de la génératrice perpendiculaire à l'axe. Appelons P le plan perpendiculaire à l'axe mené par AB, et ω le point de rencontre de ce plan avec l'axe. Il est clair que les deux points A et B décrivent le même parallèle si la droite qui joint le point ω au milieu I de AB est perpendiculaire à AB. Or, quand le plan P se déplace en restant perpendiculaire à l'axe, le point I décrit une ligne L que l'on peut construire par points, ou même, quelquefois, exactement ; cette ligne est d'ailleurs tracée sur la surface engendrée par AB. D'autre part, si l'on appelle ϖ le pied de la perpendiculaire à AB menée par le point ω, le lieu du point ϖ, quand le plan P se déplace perpendiculairement à l'axe, est une autre ligne L_1 située également sur la surface engendrée par AB. Supposons que ces deux lignes L et L_1, qui sont tracées sur la même surface, se coupent en un point I_1, et appelons A_1B_1 la position correspondante de la corde AB, ω_1 la position correspondante de ω. La droite $\omega_1 I_1$ étant alors perpendiculaire au milieu de A_1B_1, les points A_1 et B_1 décrivent le même parallèle, et les points doubles de la troisième espèce sont situés sur ce parallèle et sur les parallèles analogues.



276. Points à l'infini de la méridienne. — Appelons maintenant P le plan d'une méridienne. Cette méridienne est le lieu géométrique des points de rencontre du plan P avec les divers parallèles de la surface. Dès lors, pour qu'un point de cette méridienne soit à l'infini, il faut, ou que le plan du parallèle correspondant soit à l'infini, ou que ce même parallèle ait un rayon infini. Comme d'ailleurs tous les parallèles sont décrits par les points de la génératrice, les parallèles qui

donnent les points à l'infini de la méridienne sont, dans tous les cas, ceux qui sont décrits par les points à l'infini de la génératrice.

Imaginons alors que par un point σ pris sur l'axe, on mène la parallèle à une direction asymptotique de la génératrice. Quand la génératrice tourne autour de l'axe, cette parallèle tourne également et engendre un cône de révolution de sommet σ, et dont l'axe coïncide avec celui de la surface. Ce cône et la surface ont un parallèle commun à l'infini, et les points de rencontre de ce parallèle avec le plan P sont des points à l'infini sur la méridienne située dans le plan P. Or les points de ce cône qui sont à l'infini dans le plan P sont les points à l'infini sur les génératrices communes au cône et au plan P. Ces génératrices sont donc des directions asymptotiques de la méridienne.

A tout point à l'infini sur la génératrice de la surface correspond ainsi un cône, qui peut se réduire à un plan perpendiculaire à l'axe, et qu'on appelle un *cône directeur*. Les génératrices déterminées par le plan P d'une méridienne dans chacun de ces cônes, dont on suppose les sommets confondus ou non sur l'axe, sont les directions asymptotiques de cette méridienne.

277. Remarque. — Il semble résulter de là qu'une méridienne ne peut avoir de points à l'infini que si la génératrice en a elle-même. Il en est bien ainsi dans le cas général, mais nous rencontrerons dans la suite des surfaces de révolution dont les méridiennes ont des points à l'infini, alors que la génératrice n'en a pas. (Voir les surfaces de révolution engendrées par une conique, nº 461).

278. Points de rencontre d'une droite et d'une surface de révolution. — Quand on sait construire une méridienne d'une surface de révolution, on trouve facilement, au moins en théorie, les points de rencontre de la surface avec une droite. Appelons en effet S la surface, D la droite, et considérons la surface gauche de révolution engendrée par D en tournant autour de l'axe de S. Dans ce mouvement, les points de rencontre de D avec S décrivent des parallèles communs à cette surface et à la surface gauche engendrée par D. Si l'on connaissait ces parallèles, leurs points de rencontre avec D seraient les points cherchés. Mais quand deux surfaces de révolution ont le même axe, tout parallèle commun rencontre le plan d'un méridien en un point commun aux méridiennes des deux surfaces situées dans ce plan. D'ailleurs, si l'on a un point commun aux méridiennes des deux sur-

faces, en faisant tourner ce point autour de l'axe on décrit un parallèle commun aux deux surfaces.

D'après cela, on construira une méridienne de la surface S et la méridienne, située dans le même plan, de la surface engendrée par D en tournant autour de l'axe de S. A chaque point commun aux deux méridiennes correspondra un parallèle commun aux deux surfaces et un point commun à la surface S et à la droite D.

Les constructions sont particulièrement simples quand l'axe de la surface S est vertical ou de bout. Quant à la méridienne de la surface gauche engendrée par D, elle est une hyperbole ou un système de deux droites suivant que D ne rencontre pas ou rencontre l'axe de révolution. Nous allons du reste nous occuper maintenant de la détermination de la surface gauche de révolution.

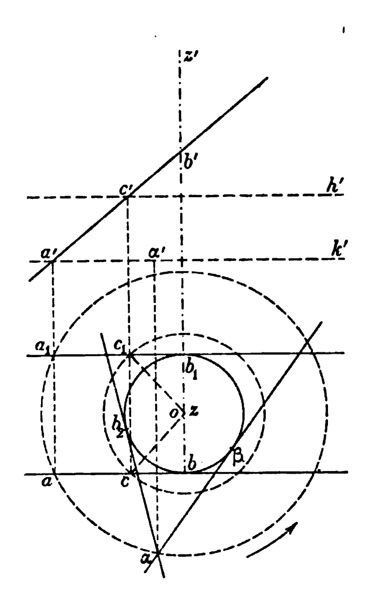
§ V. — *Détermination de la surface gauche de révolution.*

279. **Définitions.** — Nous avons appelé *surface gauche* de révolution la surface engendrée par une droite qui tourne autour d'une autre droite non située avec elle dans le même plan. Les positions successives de la droite mobile sont les génératrices de la surface, et chaque point d'une génératrice, en tournant autour de l'axe, décrit un parallèle de la surface. Parmi ces parallèles, celui qui a le rayon minimum et qui est engendré par le pied, sur la génératrice, de la perpendiculaire commune à cette droite et à l'axe s'appelle le *cercle de gorge* ou le *collier* de la surface. Quand l'axe est parallèle à l'un des plans de projection, on appelle *génératrices principales* celles qui sont parallèles au même plan.

Lorsque l'axe de révolution est vertical ou de bout, par exemple vertical, la projection horizontale du cercle de gorge est une circonférence de même rayon ayant pour centre la trace horizontale de l'axe, et les projections horizontales des génératrices sont tangentes à cette circonférence : ceci résulte de ce que la perpendiculaire commune à l'axe et à la génératrice forme avec celle-ci un angle droit dont la projection horizontale est un angle droit, parce que l'un de ses côtés, la perpendiculaire commune, est horizontal.

280. **La surface gauche de révolution admet deux systèmes de génératrices.** — Cela veut dire que la surface peut être engendrée par deux

droites tournant autour du même axe et telles qu'elles ne puissent

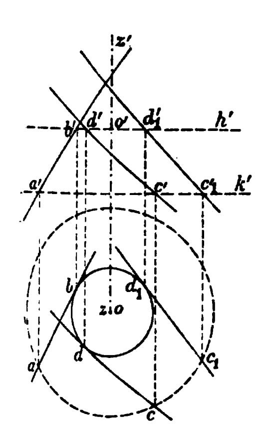


coïncider dans aucune de leurs positions. Supposons l'axe vertical, et considérons les deux droites parallèles $(ab, a'b')$ et $(a_1b_1, a'b')$ situées dans le même plan de bout. Chacune de ces droites en tournant autour de l'axe (oz, z') engendre une surface gauche. Ces deux surfaces gauches coïncident, car un plan horizontal quelconque, h', coupe la première surface suivant un parallèle ayant pour projection horizontale la circonférence de centre o et de rayon oc ; il coupe la deuxième surface suivant un parallèle dont la projection horizontale est la circonférence ayant pour centre le point o et pour rayon oc_1. Mais $oc = oc_1$; donc tout plan horizontal coupe les deux surfaces suivant le même parallèle et les deux surfaces ne sont pas distinctes.

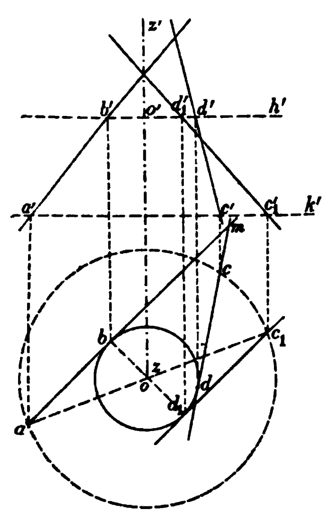
Il reste alors à prouver qu'il n'existe aucune position de la première droite coïncidant avec une position de la deuxième. Supposons en effet que, par une rotation autour de l'axe et dans le sens de la flèche, on ait amené la première droite dans une position telle que sa projection horizontale soit $\alpha\beta$, α et β étant les nouvelles positions respectives de a et de b. Pour que la deuxième droite puisse coïncider avec cette nouvelle position de la première, il faut évidemment que le point (a_1, a') vienne coïncider avec (α, α') ; or, quand on fait tourner $(a_1b_1, a'b')$ autour de l'axe jusqu'à ce que le point (a_1, a') coïncide avec le point (α, α'), il est visible que le point b_1 vient en b_2, et, par suite, que les deux droites ne peuvent pas coïncider. Ainsi, la surface gauche de révolution admet bien deux systèmes de génératrices rectilignes.

281. Manière de distinguer les génératrices des deux systèmes. — Le raisonnement par lequel on a établi l'existence de deux systèmes de génératrices rectilignes permet aussi de distinguer les généra-

trices des deux systèmes. Considérons, par exemple, les traces des génératrices sur le plan h' du cercle de gorge et sur un plan horizontal k'. Il est visible alors que les deux droites $(ab,\ a'b')$ et $(cd,\ c'd')$ sont deux positions de la même droite, c'est-à-dire deux génératrices de même système. Au contraire, $(ab,\ a'b')$ et $(c_1d_1,\ c_1'd_1')$ sont deux génératrices de systèmes différents, puisque si l'on amène $(a,\ a')$ en $(c_1,\ c_1')$, les deux droites ne coïncident pas.



On peut encore procéder autrement. Supposons qu'un observateur soit placé debout sur le plan horizontal, couché sur l'axe, et observe le déplacement de la projection horizontale d'un point mobile sur une génératrice depuis le plan du cercle de gorge jusqu'à un plan horizontal k', choisi une fois pour toutes. Tandis que ce déplacement s'effectue de droite à gauche pour toutes les génératrices d'un système, son sens change quand on passe à une génératrice de l'autre système. Dans le cas actuel, il s'effectue de droite à gauche pour les génératrices de même système que $(ab,\ a'b')$ et de gauche à droite pour les autres.

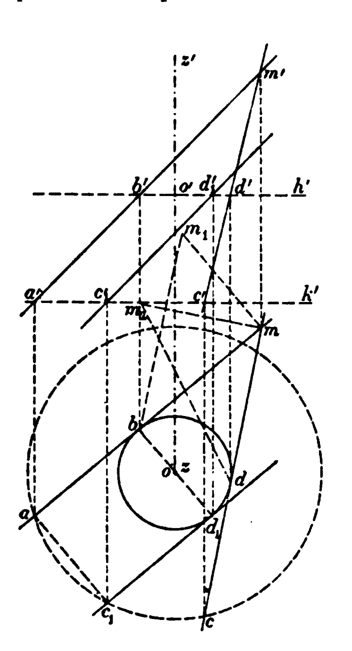


282. Deux génératrices de même système ne se rencontrent pas et ne sont pas parallèles. —Soient d'abord $(ab,\ a'b')$ et $(cd,\ c'd')$ deux génératrices de même système, dont les projections horizontales se rencontrent en m. Si les deux génératrices se rencontrent, elles ne peuvent se rencontrer qu'en un point projeté horizontalement en m. Or, les deux plans horizontaux h' et k' partagent l'espace en trois régions, et un simple examen montre que le point de $(ab,\ a'b')$ projeté horizontalement en m et le point de $(cd,\ c'd')$ projeté horizontalement au même point,

appartiennent toujours à des régions différentes. Par exemple, dans le cas de la figure ci-dessus, le premier point est situé au-dessus du plan h', tandis que le second est au-dessous du plan k'; donc les deux points sont distincts, et les deux droites ne se rencontrent pas.

Soient maintenant $(ab, a'b')$ et $(c_1d_1, c_1'd_1')$ deux génératrices de même système dont les projections horizontales sont parallèles. Les deux triangles oab et oc_1d_1 étant symétriques par rapport au point o, il est clair que $a'b'$ et $c_1'd_1'$ sont symétriques par rapport à l'axe z'; donc les deux droites ne sont pas parallèles.

283. Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent ou sont parallèles. — Soient en effet $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$ deux génératrices de systèmes différents dont les projections horizontales se coupent au point m. Les points des deux droites projetés horizontalement en m sont situés dans la même région de l'espace par rapport aux deux plans h' et k'; car bm et dm sont les projections horizontales de portions de ces droites situées dans la même région, ainsi que cela résulte de la deuxième manière de distinguer les deux systèmes de génératrices. Pour fixer les idées, supposons-les, comme dans la figure ci-contre, au-dessus du plan h', et rabattons sur le plan h' les plans projetant horizontalement les deux génératrices. Soit m_1 le rabattement du point de $(ab, a'b')$ projeté en m, et soit m_2 le rabattement du point analogue de $(cd, c'd')$. Par définition (280), les deux génératrices faisant des angles égaux avec le plan horizontal, on a $\widehat{mbm_1} = \widehat{mdm_2}$;

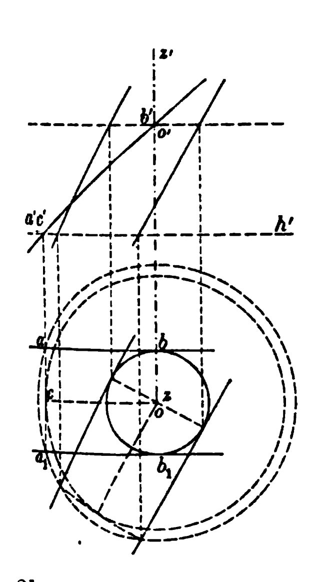


donc les deux triangles rectangles mbm_1 et mdm_2 sont égaux. Il en résulte que les deux points rabattus en m_1 et en m_2 ont la même cote; comme ils ont la même projection horizontale et qu'ils sont situés dans la même région de l'espace par rapport aux plans h' et k', ils coïncident, et les deux génératrices se rencontrent.

Toutefois, si les projections horizontales des deux génératrices étaient parallèles, les génératrices seraient elles-mêmes parallèles. Considérons en effet les deux génératrices $(ab, a'b')$ et $(c_1d_1, c'_1d'_1)$ dont les projections horizontales sont parallèles. La figure abc_1d_1 étant un rectangle, la figure $a'b'c'_1d'_1$ est un parallélogramme ; donc $a'b'$ et $c'_1d'_1$ sont parallèles, et les deux génératrices sont elles-mêmes parallèles.

Il suit de là qu'à une génératrice quelconque $(ab, a'b')$, correspond toujours une génératrice $(c_1d_1, c'_1d'_1)$ de système différent et qui lui est parallèle ; il ne lui en correspond d'ailleurs qu'une.

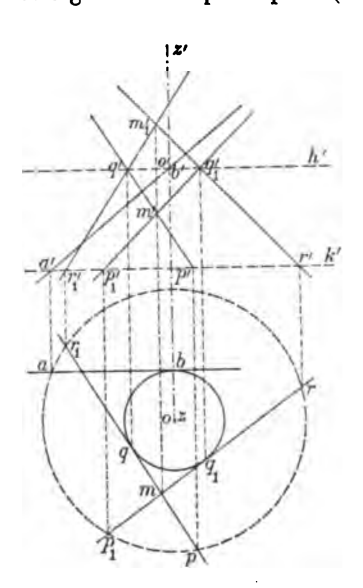
284. Cône asymptote. — Considérons deux génératrices principales de systèmes différents et parallèles $(ab, a'b')$ et $(a_1b_1, a'b')$. Par le point (o, o'), centre du cercle de gorge, menons la parallèle $(oc, o'c')$ à ces deux droites, de sorte que nous avons ainsi trois droites parallèles situées dans le même plan de bout. Quand on fait tourner ce plan autour de l'axe, les deux droites $(ab, a'b')$ et $(a_1b_1, a'b')$ engendrent la surface gauche de révolution, et la droite $(oc, o'c')$ engendre un cône de révolution autour de l'axe $(oz, o'z')$ et ayant pour sommet le centre (o, o') du cercle de gorge. Ce cône s'appelle le *cône asymptote* de la surface. Sa trace sur un plan horizontal quelconque, h', est tangente à la trace, sur ce même plan, du plan des deux droites $(ab, a'b')$ et $(a_1b_1, a'b')$; par suite, le plan de ces deux droites est, dans chacune de ses positions, tangent au cône asymptote.



Observons, d'ailleurs, qu'en tournant autour de l'axe, $(ab, a'b')$ et $(a_1b_1, a'b')$ coïncident successivement avec tous les couples de génératrices parallèles ; donc, le plan qui contient deux génératrices parallèles d'une surface gauche de révolution est tangent au cône asymptote suivant une génératrice parallèle aux deux premières. Inversement, tout plan tangent au cône asymptote coupe la surface suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact.

285. Détermination d'un point de la surface gauche de révolution. — Il y a deux cas à examiner suivant qu'on se donne la projection verticale ou la projection horizontale du point. Dans le premier cas on procède comme pour toutes les surfaces de révolution (266). On peut procéder de même dans le second cas, mais il vaut mieux observer que le point est déterminé par l'intersection des deux génératrices de systèmes différents qui y passent; on est ainsi conduit à construire les deux génératrices de systèmes différents qui passent par un point dont on donne la projection horizontale. Résolvons ce problème.

Pour cela, supposons la surface définie par son axe $(oz, o'z')$ et par une génératrice principale $(ab, a'b')$. Si m est la projection horizontale donnée, les génératrices qui passent par le point M de l'espace sont projetées horizontalement suivant les tangentes menées du point m à la projection horizontale du cercle de gorge. Menons ces tangentes, et, pour achever la détermination des génératrices cherchées, prenons leurs traces sur le plan horizontal h' du cercle de gorge et sur un autre plan horizontal quelconque k'. Comme du point m on peut mener deux tangentes à la projection horizontale du cercle de gorge, on voit que si $(ab, a'b')$ tourne autour de l'axe, il y a deux positions de cette génératrice pour lesquelles sa projection horizontale passe par m; ces deux positions sont $(pq, p'q')$ et $(rq_1, r'q'_1)$. Il y a également deux génératrices de l'autre système dont les projections horizontales passent par m : l'une est projetée en $(p_1q_1, p'_1q'_1)$, l'autre en (r_1q, r'_1q').



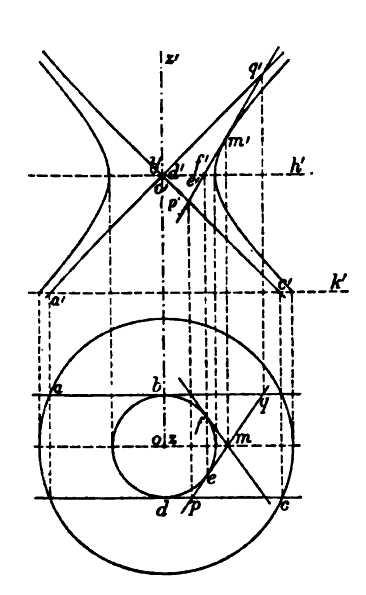
Pour avoir deux génératrices de systèmes différents se coupant en un point dont la projection horizontale est m, il faut évidemment associer $(pq, p'q')$ avec $(p_1q_1, p'_1q'_1)$ et $(rq_1, r'q'_1)$ avec (r_1q, r'_1q'); car $(pq, p'q')$ et (r_1q, r'_1q') se coupent au point (q, q') tandis que $(p_1q_1, p'_1q'_1)$ et $(rq_1, r'q'_1)$ se coupent au point (q_1, q'_1). Il suit de là qu'il y a deux points de la surface projetés horizontalement en m : le premier est l'intersection

des deux droites $(pq, p'q')$ et $(p_1q_1, p'_1q'_1)$; le second est l'intersection des deux droites $(rq_1, r'q'_1)$ et (r_1q, r'_1q').

Il est bien évident, du reste, qu'ils sont déterminés par la ligne de rappel du point m et par deux génératrices de même système $(pq, p'q')$ et $(rq_1, r'q'_1)$, par exemple.

286. Méridienne principale. — On peut obtenir la méridienne principale, comme celle de toute surface de révolution, en la considérant comme le lieu des points de rencontre du plan de cette méridienne avec les divers parallèles de la surface. Il est plus commode de la considérer comme le lieu des points de rencontre du plan de front mené par l'axe avec les diverses génératrices.

Considérons, d'après cela, deux génératrices principales de même système $(ab, a'b')$ et $(cd, c'd')$; leurs projections verticales, on l'a vu (282), sont symétriques par rapport à $o'z'$. Soit pq la projection horizontale d'une génératrice quelconque de l'autre système; comme cette génératrice rencontre toutes celles du premier système, sa projection verticale est $p'q'$. Si donc m est l'intersection de pq avec le plan de front mené par l'axe, le point (m, m') est un point de la méridienne principale.



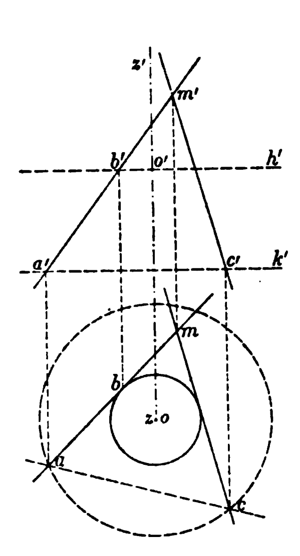
On déduit facilement de là que la méridienne principale est une hyperbole dont les asymptotes sont $a'b'$ et $c'd'$ et dont $o'z'$ est l'axe non transverse. En effet, soit (e, e') le point de rencontre de la génératrice $(pq, p'q')$ avec le cercle de gorge; si l'on considère la seconde génératrice de la surface passant par le point (m, m'), sa projection horizontale étant symétrique de pq par rapport à om, cette génératrice rencontre le cercle de gorge en un point (f, f') situé sur la même ligne de bout que le point (e, e'). Or il est clair que le plan des génératrices qui passent par un point de la surface est tangent à la surface en ce point. Dans le cas actuel, le plan

des deux génératrices qui passent par le point (m, m') est un plan tangent de bout, puisqu'il contient une ligne de bout. Comme il contient la tangente à la méridienne principale, sa trace verticale $p'q'$ est tangente en m' à la projection verticale de la méridienne principale. Ainsi, la tangente en chaque point de la méridienne principale est partagée en deux parties égales par le point de contact et par les droites $a'b'$ et $c'd'$; donc la méridienne principale est une hyperbole projetée verticalement suivant une hyperbole égale dont les asymptotes sont $a'b'$ et $c'd'$, et dont l'axe non transverse est $o'z'$. En outre, les projections verticales de toutes les génératrices sont tangentes à cette hyperbole.

On conclut de là que la surface gauche de révolution est un hyperboloïde de révolution à une nappe, c'est-à-dire engendré par une hyperbole qui tourne autour de son axe non transverse.

287. Problème. — *Tout plan passant par une génératrice de la surface gauche de révolution coupe la surface suivant une seconde génératrice; déterminer cette seconde génératrice.*

La surface gauche de révolution étant du second degré, tout plan la coupe suivant une conique. Cette conique dégénère en deux droites quand le plan passe par une génératrice; l'une de ces droites est la génératrice elle-même, et il s'agit de trouver l'autre. Soient, pour cela, $(ab, a'b')$ la génératrice donnée et $(oz, o'z')$ l'axe de révolution, supposé vertical. Achevons de déterminer le plan mené par $(ab, a'b')$ au moyen de sa trace $(ac, a'c')$ sur un plan horizontal quelconque k'. La trace de la droite inconnue sur le plan k' doit être à la fois sur $(ac, a'c')$ et sur la trace de la surface sur le même plan : c'est donc le point (c, c'). En outre, la projection horizontale de la génératrice inconnue doit être l'une des deux tangentes menées du point c à la projection horizontale du cercle de gorge; comme



les deux génératrices doivent être de systèmes différents, puisqu'elles

sont dans le même plan, on voit que la projection horizontale de la droite cherchée est cm; il en résulte que sa projection verticale est $c'm'$.

Ajoutons que le point (m, m') est le point de contact de la surface avec le plan qui a été mené par $(ab, a'b')$ et qui est toujours un plan tangent, puisqu'il contient deux génératrices; de sorte qu'on a résolu, par la même occasion, le problème suivant :

Tout plan passant par une génératrice est un plan tangent, trouver son point de contact.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE PREMIER

1. Un cône est-il déterminé quand il est assujetti à passer par deux cercles qui se coupent ? Faire l'épure et trouver le sommet.

2. Construire l'axe d'un cône de révolution défini par les projections de trois génératrices.

3. Un cylindre de révolution est défini par son axe et par un point; trouver la projection horizontale d'un point connaissant sa projection verticale.

4. Déterminer une sphère passant par deux points donnés et tangente au plan horizontal de l'un des points donnés. Nombre des solutions.

5. Un cercle situé dans le plan horizontal tourne autour d'une droite de front; trouver la projection horizontale d'un point de la surface engendrée, connaissant la projection verticale de ce point.

6. On donne une hyperbole dans le plan horizontal et une droite ayant sa trace horizontale sur l'hyperbole. Existe-t-il un hyperboloïde de révolution à une nappe contenant l'hyperbole et la droite ? S'il existe, le construire.

Le problème est déterminé. Pour construire l'hyperboloïde, on cherche d'abord la direction de l'axe. Cette direction est celle de l'axe du cône des directions asymptotiques, dont on connait trois génératrices qui sont parallèles respectivement aux asymptotes de l'hyperbole donnée et à la droite donnée. La direction de l'axe étant déterminée, on coupe l'hyperbole et la droite par un plan perpendiculaire à cette direction ; on obtient ainsi trois points d'un parallèle. Le centre de ce parallèle étant sur l'axe, on achève facilement le problème.

7. On donne un cercle dans le plan horizontal. Ce cercle est la base d'un cylindre passant par deux points donnés ; déterminer ce cylindre.

Il suffit de déterminer la direction des génératrices. Soient A et B les points donnés, A_1 et B_1 leurs symétriques par rapport au centre ; le plan ABA_1B_1 coupe le cylindre suivant une ellipse concentrique au cercle, et, par suite, déterminée. On projette cette ellipse sur le plan horizontal et on mène une tangente commune à l'ellipse projetée et au cercle, ce qui donne la direction des projections horizontales des génératrices. On achève ensuite sans difficulté.

8. Une droite non située dans le même plan avec la ligne de terre tourne autour de celle-ci. Déterminer un point de la surface engendrée connaissant l'une de ses projections. Construire, ensuite, la méridienne située dans le plan horizontal.

9. Un cercle situé dans un plan de front tourne autour d'un axe vertical. Déterminer un point de la surface engendrée connaissant l'une des projections de ce point. Construire la méridienne principale.

10. Les projections d'une ligne de l'espace sont deux cercles donnés. On fait tourner cette ligne autour de l'une de ses tangentes et l'on demande : 1° de trouver les projections d'un point quelconque de la surface ; 2° d'indiquer la construction par points de la méridienne dont le plan passe par le point dont les projections sont confondues avec les centres des projections de même nom de la génératrice.

11. Construire un cylindre de révolution connaissant trois génératrices.

12. On considère les deux droites Oa et Ob', la première Oa située dans le plan horizontal de projection et faisant avec xy un angle de 40° ; la seconde Ob' située dans le plan vertical et faisant avec xy un angle de 50°.

On demande :

1° De tracer les projections Oc, Oc' d'une droite passant par le point O, faisant avec Oa un angle de 70°, avec Ob' un angle de 45° et située par rapport au plan aOb' du même côté que Ox ;

2° De tracer les projections de l'axe du cône de révolution passant par les droites Oa, Ob' et la droite (Oc, Oc') précédemment déterminée.

(École navale, concours de 1887.)

CHAPITRE II

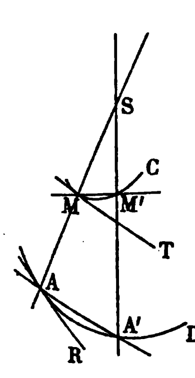
PLANS TANGENTS AUX CONES ET AUX CYLINDRES

§ I. — *Plan tangent en un point de la surface.*

288. Théorème. — *Le plan tangent en un point d'une surface conique ou cylindrique est invariable quand le point se déplace sur une génératrice.*

La démonstration étant la même pour le cône et pour le cylindre, nous nous bornerons à la donner pour le cône.

Considérons donc une surface conique définie par son sommet S et par une directrice D. Soient M un point quelconque de la surface et C une courbe tracée sur la surface et passant par le point M. Prenons sur la courbe C un point M′ voisin du point M, et soient A et A′ les points où les génératrices SM et SM′ rencontrent la directrice. Si le point M′ tend vers M, il est clair que le point A′ tend vers A. Mais quand le point M′ tend vers M, la sécante MM′ tend vers la tangente en M à la courbe C; pareillement, quand le point A′ tend vers A, la sécante AA′ tend vers la tangente en A de la directrice ; d'ailleurs, les deux sécantes MM′ et AA′ atteignent simultanément leurs positions limites respectives.



Or, le plan tangent en M à la surface est défini par SM, qui est sa propre tangente en M, et par la tangente en M à la courbe C. Il en résulte que le plan tangent en M est la position limite du plan SMM′ quand le point M′ se rapproche indéfiniment du

point M. On voit de même que le plan tangent en A est la position limite du plan SAA′ quand le point A′ se rapproche indéfiniment du point A.

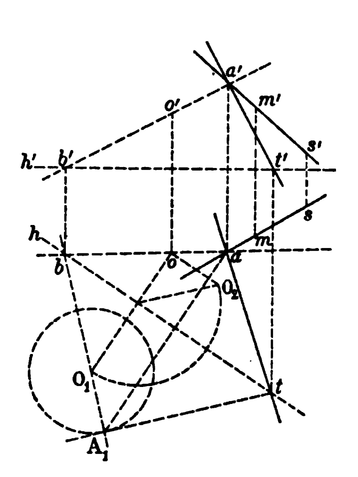
Mais ces deux plans coïncident à chaque instant et, de plus, ils atteignent simultanément leurs positions limites respectives ; donc le plan tangent en M coïncide toujours avec le plan tangent en A.

289. Problème. — *Mener le plan tangent en un point donné d'une surface conique ou cylindrique.*

Appelons M le point de contact donné du plan tangent inconnu, et soit A le point de rencontre de la génératrice du point M avec la directrice de la surface. Supposons que l'on sache construire la tangente AT au point A à la directrice ; alors, en vertu du théorème précédent, le plan tangent cherché sera défini par la génératrice AM et par la tangente AT.

La difficulté du problème réside donc, comme on le voit, dans la construction de la tangente en A à la directrice.

Dans l'épure ci-contre, la surface est un cône dont le sommet est le point (s, s') et dont la directrice est un cercle connu par son plan et par son rabattement sur le plan horizontal passant par l'horizontale (h, h').



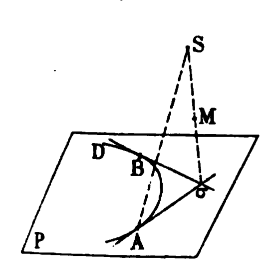
Soient O_1 le rabattement du cercle et (a, a') le point rabattu en A_1, de sorte que $(sa, s'a')$ est une génératrice du cône. Pour avoir le plan tangent à la surface au point (m, m') situé sur cette génératrice, on observe que la génératrice rencontre la directrice au point (a, a'). La tangente à la directrice, en ce point, est rabattue en A_1t ; elle est par suite projetée en $(at, a't')$. Il en résulte que le plan tangent au point (m, m') est déterminé par les deux droites $(sa, s'a')$ et $(at, a't')$.

§ II. — *Plans tangents passant par un point donné non situé sur la surface, ou parallèles à une direction donnée. — Contours apparents.*

290. Problème. — *Mener à un cône ou à un cylindre un plan tangent passant par un point donné non situé sur la surface.*

Il n'est généralement pas possible de résoudre graphiquement ce problème quand la directrice du cône ou du cylindre est une courbe quelconque. Nous supposerons donc que la directrice soit une courbe plane, et nous appellerons P le plan de cette courbe.

Pour fixer les idées, supposons que la surface soit un cône de sommet S, et soit D la directrice de ce cône située dans le plan P.



Proposons-nous de mener à ce cône les plans tangents qui passent par le point M non situé sur la surface. Pour cela, supposons le problème résolu et soit SA la génératrice de contact de l'un des plans tangents cherchés, de sorte que ce plan tangent est déterminé par la droite SA et par le point M. Soit σ la trace de la droite SM sur le plan P. Si l'on suppose tracée la tangente en A à la directrice, cette droite est située dans le plan tangent en A, c'est-à-dire dans le plan ASM, et dans le plan P : elle passe donc par le point σ. Réciproquement, si σA est l'une des tangentes à la directrice D, menées par le point σ, le plan σSA est un plan tangent à la surface; et comme ce plan passe par le point M, c'est l'un des plans tangents cherchés.

D'après cela :

Règle. — *Pour mener par un point* M, *non situé sur la surface d'un cône, un plan tangent à cette surface, on joint le point* M *au sommet du cône et l'on détermine la trace* σ *de cette droite sur le plan de base du cône. Par ce point* σ *on mène les tangentes* σA, σB *à la base du cône, et chacune de ces tangentes, associée au point* M, *détermine l'un des plans tangents cherchés.*

Pour que le problème soit possible, il faut que l'on puisse mener du

point σ des tangentes à la base du cône ; s'il est possible, il y a autant de solutions que de tangentes à la base issues du point σ.

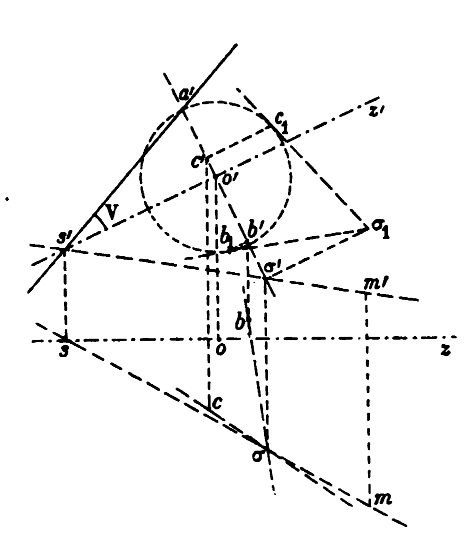
291. Remarque. — Dans le cas du cylindre, la règle s'énonce comme il suit :

Pour mener par un point M, *non situé sur la surface d'un cylindre, un plan tangent à cette surface, on mène par le point* M *la parallèle aux génératrices du cylindre et l'on détermine la trace* σ *de cette droite sur le plan de base. Par le point* σ *on mène les tangentes à la base du cylindre, et chacune de ces tangentes, associée au point* M, *détermine l'un des plans tangents cherchés.*

On établit cette règle en raisonnant comme dans le cas du cône ; mais on peut la déduire de celle qui a été donnée dans ce cas en observant que le cylindre est un cône dont le sommet est le point à l'infini dans la direction des génératrices.

292. Application. — *Un cône de révolution est défini par son axe qui est de front, par son sommet et par le demi-angle au sommet ; mener à ce cône les plans tangents passant par un point donné.*

Soient (s, s') et $(sz, s'z')$ le sommet et l'axe du cône auquel on veut mener les plans tangents passant par le point (m, m'). Si l'on coupe le cône par le plan de front passant par l'axe, on obtient deux génératrices dont les projections verticales font avec $s'z'$ le demi-angle au sommet ; si donc on appelle V ce demi-angle et si l'on mène $s'a'$ faisant l'angle V avec $s'z'$, la droite $s'a'$ est la projection verticale de l'une des génératrices ainsi obtenues.



Cela posé, prenons comme base du cône la section par un plan perpendiculaire à l'axe. L'axe étant de front, ce plan est de bout, de sorte que sa trace

verticale est une droite $o'a'$ perpendiculaire à $s'z'$. La ligne de jonction des points (s, s') et (m, m') coupe alors le plan de la base au point (σ, σ'), et il ne reste plus qu'à mener par ce point les tangentes à la base. Pour cela, on rabat la base et le point (σ, σ') sur le plan de front qui passe par l'axe. La base étant un cercle de centre (o, o') et de rayon $o'a'$, se rabat suivant un cercle de centre o' et de rayon $o'a'$. Le point (σ, σ') étant rabattu en σ_1, les tangentes à la base sont rabattues en $\sigma_1 b_1$, $\sigma_1 c_1$. Les points b_1 et c_1 se relèvent en (b, b') et en (c, c'), de sorte que les plans tangents cherchés sont déterminés soit par la droite SM associée à chacun de ces points, soit par les tangentes $(\sigma b, \sigma' b')$, $(\sigma c, \sigma' c')$ et par le point (m, m').

293. **Problème.** — ***Mener à un cône ou à un cylindre un plan tangent parallèle à une direction donnée.***

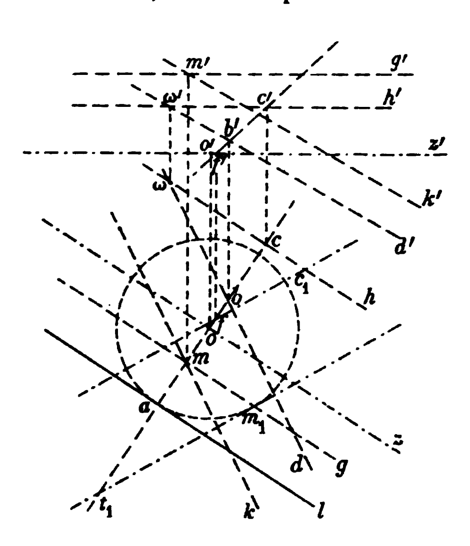
Ce problème est un cas particulier du précédent : il n'y a qu'à supposer que le point M s'est éloigné à l'infini dans la direction donnée.

Si alors la surface est un cône, la droite SM devient la parallèle à la direction donnée menée par le point S; par suite σ est la trace de cette parallèle sur le plan de base du cône.

Si la surface est un cylindre, comme le point S et le point M sont à l'infini, la ligne SM est aussi à l'infini et il en est de même du point σ. Il suffit donc de trouver la direction du point σ. Pour cela, on observe que dans le cas où la surface est un cône, $S\sigma$ est l'intersection de tous les plans parallèles à la direction donnée menés par le point S. Par conséquent, lorsque la surface devient un cylindre, $S\sigma$ devient l'intersection de tous les plans qui sont à la fois parallèles à la direction donnée et parallèles aux génératrices du cylindre. Donc, par un point quelconque de l'espace on mènera la parallèle à la direction donnée et la parallèle aux génératrices du cylindre. Ces deux parallèles déterminent un plan Q dont on déterminera l'intersection Δ avec le plan P : le point σ sera le point à l'infini dans la direction Δ. On mènera alors les tangentes à la base du cylindre parallèlement à Δ, et on achèvera le problème comme plus haut.

294. **Application.** — ***Un cylindre de révolution est défini par son axe supposé horizontal et par son rayon; mener à cette surface un plan tangent parallèle à une direction donnée.***

Soit $(oz, o'z')$ l'axe du cylindre. Le plan horizontal mené par cette droite coupe le cylindre suivant deux génératrices dont les projections horizontales, situées de part et d'autre de oz, sont à une distance de oz égale au rayon du cylindre ; soit al la projection horizontale de l'une de ces génératrices, la projection verticale étant, bien entendu, confondue avez $o'z'$.



Par un point quelconque (ω, ω') menons la parallèle $(\omega d, \omega'd')$ à la direction donnée et la parallèle $(\omega h, \omega'h')$ aux génératrices du cylindre ; puis déterminons l'intersection du plan de ces deux droites avec le plan de base du cylindre. Si l'on prend comme base du cylindre la section par le plan vertical ao perpendiculaire à l'axe, cette intersection est $(bc, b'c')$, et il ne reste plus qu'à mener à la base du cylindre les tangentes parallèles à $(bc, b'c')$.

Pour cela, on rabat la base et la droite $(bc, b'c')$ sur le plan horizontal passant par l'axe. La base est rabattue suivant la circonférence décrite du point o comme centre avec oa comme rayon ; la droite est rabattue suivant fc_1 ; de sorte que les tangentes à la base parallèles à $(bc, b'c')$ seront rabattues suivant les tangentes menées à la circonférence oa parallèlement à fc_1. Soient m_1t_1 l'une de ces tangentes et m_1 son point de contact avec la circonférence. Le point m_1 se relevant en (m, m'), l'un des plans tangents demandés est déterminé : 1° par la parallèle $(mg, m'g')$ aux génératrices du cylindre menée par (m, m') ; 2° par la parallèle $(mk, m'k')$ à la direction donnée menée également par (m, m').

Dans le cas général où l'axe est quelconque, on peut remarquer que le problème se ramène au suivant, qui sera résolu ultérieurement :

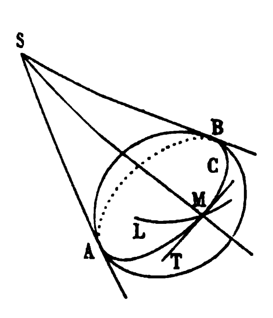
Mener par la droite $(\omega d, \omega'd')$, parallèle aux génératrices, les plans tangents à une sphère quelconque inscrite dans le cylindre.

295. Problème. — *Mener à un cône ou à un cylindre les plans tangents perpendiculaires à un plan donné.*

Imaginons que l'on ait mené une droite quelconque D perpendiculaire au plan donné ; les plans tangents demandés seront alors parallèles à la droite D. Le problème est ainsi ramené à celui qui a été résolu au n° 293.

Nous allons appliquer ce problème à la détermination des *contours apparents* des cônes et des cylindres ; mais nous allons donner d'abord la définition et les propriétés des contours apparents d'une surface quelconque.

296. Cônes et cylindres circonscrits à une surface ; contours apparents. — Si par un point quelconque, S, de l'espace, on mène les tangentes SA, SB, ... à une surface, le lieu de ces tangentes est une surface conique appelée *cône circonscrit à la surface par le point* S. Le lieu des points A, B, ... où ces tangentes touchent respectivement la surface est une ligne C, tracée sur la surface, et qu'on appelle la *courbe de contact* du cône circonscrit par le point S. En un point quelconque, M, de la ligne C, le plan tangent à la surface est défini : 1° par la génératrice SM du cône circonscrit, puisque SM est une tangente en M; 2° par la tangente MT à la ligne C. Le plan tangent au cône circonscrit étant déterminé par les deux mêmes droites, on voit qu'*en tout point de la courbe de contact le cône et la surface ont le même plan tangent.* Comme, d'ailleurs, tous les plans tangents au cône passent par son sommet, on voit aussi que *le cône circonscrit à une surface par un point* S *peut être considéré comme l'enveloppe des plans tangents menés à la surface par le point* S.



Lorsque le point S est l'œil d'un observateur, les tangentes à la surface issues de ce point peuvent être considérées comme des rayons visuels, et la ligne C prend alors le nom de *contour apparent* de la surface par rapport à cet observateur. Elle détermine sur la surface deux régions, dont une seule, celle qui est tournée vers l'observateur, est vue par lui, si la surface est opaque ; de sorte que si une ligne quelconque, L, tracée sur la surface, traverse le contour apparent

en M, en ce point elle cesse d'être vue par l'observateur, ou inversement. En d'autres termes, le contour apparent partage cette ligne en deux parties dont la première, située dans la région tournée vers le point S, est vue, tandis que l'autre, située dans la région opposée, est cachée. Toutefois, il peut arriver que la ligne L soit ou tout entière vue ou tout entière cachée, suivant qu'elle est située tout entière sur la région vue ou tout entière sur la région cachée.

Lorsque le point S est un point lumineux, la courbe C prend encore un autre nom : on l'appelle la courbe d'*ombre propre* relative au point S. Si la surface est opaque, elle sépare sur la surface les points qui sont éclairés de ceux qui ne le sont pas. Quant au cône circonscrit, il prend dans ce cas le nom de *cône d'ombre*.

Il importe d'observer, d'après ce que l'on vient de voir, que les problèmes relatifs aux cônes circonscrits, aux contours apparents et aux ombres sont, au fond, des problèmes identiques.

Si l'on coupe par un plan P le cône circonscrit à une surface par un point S, la section obtenue s'appelle le *contour apparent* de la surface *sur le plan* P, ou l'*ombre portée* par la surface sur ce plan, suivant que le point S est l'œil d'un observateur ou un point lumineux.

Lorsque le point S passe à l'infini dans une direction donnée, le cône circonscrit devient un cylindre circonscrit, et l'on conserve les mêmes dénominations que plus haut pour la courbe de contact et pour la trace du cylindre sur un plan. En géométrie descriptive, l'observateur étant à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan horizontal ou à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan vertical, il convient de distinguer deux sortes de contours apparents : le *contour apparent horizontal* et le *contour apparent vertical.*

On appelle contour apparent horizontal d'une surface la courbe de contact du cylindre vertical circonscrit à la surface, et l'on appelle contour apparent d'une surface sur le plan horizontal la trace horizontale de ce cylindre.

On définit d'une manière analogue le contour apparent vertical et le contour apparent sur le plan vertical.

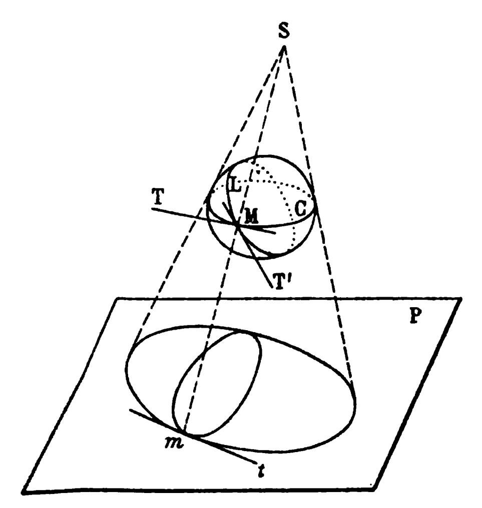
Par définition, le contour apparent sur le plan horizontal peut être considéré, soit comme le lieu des traces horizontales des tangentes verticales à la surface, soit comme l'enveloppe des traces horizontales des plans tangents verticaux à la surface. Pareillement, le contour apparent sur le plan vertical peut être considéré, soit comme le lieu

des traces verticales des tangentes de bout, soit comme l'enveloppe des traces verticales des plans tangents de bout.

Ces contours apparents étant relatifs à des observateurs différents, n'ont d'ailleurs aucune relation entre eux et peuvent ne pas exister ou se réduire individuellement à des points. En tous cas, quand on représente une surface dans le système des projections orthogonales, on dessine en traits pleins, en général, le contour apparent sur le plan horizontal et le contour apparent sur le plan vertical. D'ailleurs, le contour apparent sur le plan horizontal est la projection horizontale du contour apparent horizontal, et, pour éviter toute confusion, *on dessine en lignes de construction* la projection verticale du contour apparent horizontal. On opère d'une manière analogue pour le contour apparent vertical, en intervertissant les mots horizontal et vertical.

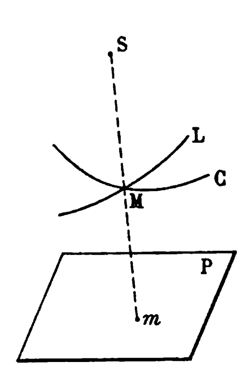
297. **Théorème.** — *Soient* C *le contour apparent d'une surface par rapport à un point* S *et* L *une ligne tracée sur la surface et traversant le contour apparent en* M. *Si l'on projette la figure sur un plan* P *et du point* S, *la projection de la ligne* L *est tangente au contour apparent sur le plan* P *au point* m, *projection du point* M.

Soient, en effet, MT et MT' les tangentes en M aux deux lignes respectives C et L. Tout revient évidemment à prouver (17) que les projections de ces deux droites sont confondues, c'est-à-dire que les plans projetant ces deux droites sont confondus. Or, ceci résulte de ce que le plan projetant MT n'est autre chose que le plan tangent en M au cône circonscrit par le point S, et de ce que ce plan tangent contient toutes les tangentes en M à la surface, puisqu'il est aussi tangent à la surface. Il contient donc MT' et coïncide avec le plan projetant cette droite.



298. Corollaire. — *Lorsque deux surfaces sont tangentes entre elles tout le long d'une courbe, leurs contours apparents sur le même plan sont tangents entre eux.*

Appelons Σ et Σ_1 les deux surfaces, et soient : S l'œil de l'observateur ; L la courbe de contact des deux surfaces ; C le contour apparent de la première surface par rapport au point S ; M un point commun aux deux lignes L et C. Au point M les deux surfaces Σ et Σ_1 ont le même plan tangent par hypothèse ; mais, puisque le point M appartient au contour apparent de Σ, ce plan tangent passe par S ; donc le point M appartient aussi au contour apparent de Σ_1. Il résulte alors du théorème précédent que si l'on projette du point S sur un plan P, et si m est la projection de M, la projection de L est tangente en m aux contours apparents de Σ et de Σ_1 sur le plan P ; donc ces deux contours apparents sont tangents entre eux.



299. Contours apparents des cônes et des cylindres. — Lorsque la surface est un cône ou un cylindre, les plans tangents à cette surface menés par un point S passent par une droite (290) ; ils touchent la surface suivant des génératrices, de sorte que le contour apparent par rapport au point S se compose de génératrices ; il en résulte que le contour apparent sur un plan est un système de droites qui sont les droites d'intersection de ce plan avec les plans tangents à la surface menés par le point S.

D'après cela, si l'on projette sur deux plans rectangulaires :

1° *Le contour apparent d'un cône ou d'un cylindre sur le plan horizontal est l'ensemble des traces horizontales des plans tangents verticaux ;*

2° *Le contour apparent d'un cône ou d'un cylindre sur le plan vertical est l'ensemble des traces verticales des plans tangents de bout.*

Il ne faut cependant pas perdre de vue que le contour apparent sur le plan horizontal est le lieu des traces horizontales des tangentes verticales menées à la surface, et que le contour apparent sur le plan vertical est le lieu des traces verticales des tangentes de bout ; car il peut

exister des plans tangents verticaux ou de bout sans qu'il existe de contour apparent sur le plan horizontal ou sur le plan vertical. Par exemple, si un cône a une génératrice verticale, le plan tangent suivant cette génératrice est bien vertical, mais sa trace horizontale n'appartient pas au contour apparent sur le plan horizontal ; car ce contour apparent se réduit à la trace horizontale de la génératrice verticale.

Il ne faut pas non plus perdre de vue que le contour apparent sur un plan est une enveloppe de traces de plans tangents. Par exemple, si les génératrices d'un cylindre sont verticales, tout plan tangent au cylindre est un plan vertical, mais sa trace horizontale n'appartient pas au contour apparent sur le plan horizontal. Dans ce cas le contour apparent sur le plan horizontal n'est autre chose que la trace horizontale du cylindre, c'est-à-dire, si l'on veut, l'enveloppe des traces horizontales des plans tangents verticaux.

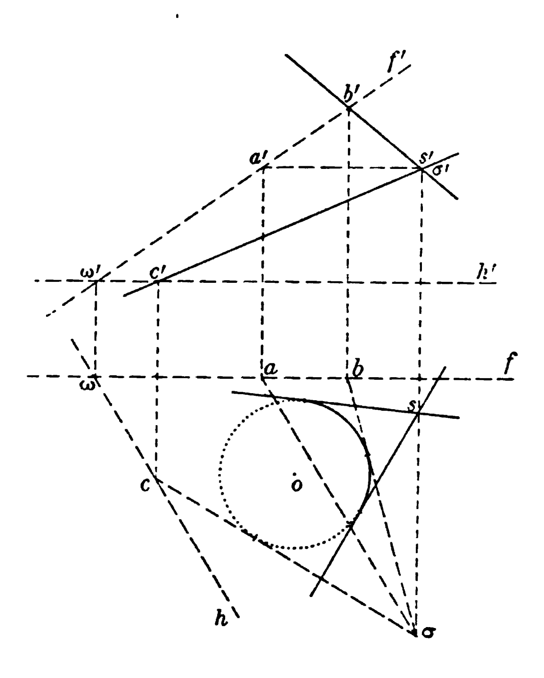
Nous allons donner deux exemples de détermination de contours apparents de cônes et de cylindres.

300. **Exemple I.** — *Déterminer les contours apparents d'un cône dont on donne le sommet, le plan de la base et l'une des projections de cette base.*

Soit (s, s') [voir la fig. à la page 228] le sommet du cône et soient $(\omega h, \omega' h')$, $(\omega f, \omega' f')$ les deux droites qui déterminent le plan de base. Supposons, par exemple, que l'on connaisse la projection horizontale de la base du cône, et que cette projection horizontale soit un cercle de centre o. Tous les plans tangents au cône passant par le sommet, les traces horizontales des plans tangents verticaux passent par le point s et les traces verticales des plans tangents de bout passent par le point s'. Mais, en vertu d'une proposition établie plus haut (297), le contour apparent sur le plan horizontal doit être tangent au cercle o ; ce contour apparent est donc constitué par l'ensemble des tangentes menées du point s au cercle o.

Pour avoir le contour apparent sur le plan vertical, il faut mener au cône les plans tangents de bout. Soit donc (σ, σ') (voir n°s 290 et 291) la trace sur le plan de base de la ligne de bout passant par le sommet du cône. Les plans tangents cherchés coupent la base du cône suivant des droites dont les projections horizontales sont les tangentes

au cercle o menées du point σ ; comme ces plans tangents sont de bout, leurs traces verticales sont confondues avec les projections



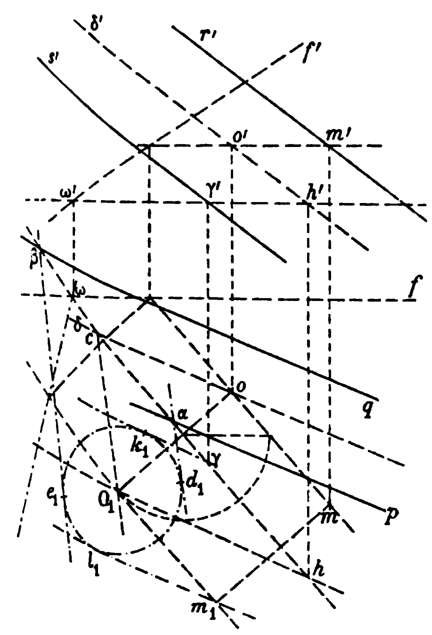
verticales de ces tangentes. Les projections verticales de ces tangentes étant $\sigma'b'$ et $\sigma'c'$, on a ainsi, suivant ces droites, le contour apparent du cône sur le plan vertical.

301. **Exemple II.** — *Construire les contours apparents d'un cylindre connaissant la direction des génératrices et sachant que la base est un cercle dont on donne le plan, le centre et le rayon.*

Supposons que le plan de base soit déterminé par une horizontale $(\omega h, \omega' h')$ et par une ligne de front $(\omega f, \omega' f')$, et soient (o, o') le centre du cercle de base, $(o\delta, o'\delta')$ la direction des génératrices du cylindre.

Pour avoir le contour apparent sur le plan horizontal, il faut mener au cylindre les plans tangents verticaux. Menons donc (295) par $(o\delta, o'\delta')$ le plan perpendiculaire au plan horizontal, et cherchons l'intersection de ce plan avec le plan de base du cylindre. Si l'on

rabat le plan de base autour de $(\omega h, \omega' h')$, sur le plan horizontal mené par cette droite, le point (o, o') se rabat en O_1, la base se rabat suivant la circonférence de rayon donné, ayant pour centre le point O_1, et l'intersection du plan de la base avec le plan vertical mené par $(o\delta, o'\delta')$ se rabat suivant O_1c. Par conséquent, les tangentes à la base parallèles à cette intersection se rabattent suivant les tangentes $d_1\alpha$, $e_1\beta$ menées à la circonférence O_1 parallèlement à O_1c. En menant alors par les points α et β les parallèles αp et βq à $o\delta$, on obtient les projections horizontales des droites $d_1\alpha$ et $e_1\beta$ relevées, c'est-à-dire le contour apparent du cylindre sur le plan horizontal.



Pour obtenir, de même, le contour apparent sur le plan vertical, on mène le plan de bout qui passe par $(o\delta, o'\delta')$ et l'on détermine l'intersection de ce plan avec le plan de base du cylindre ; cette intersection projetée verticalement en $o'h'$ est rabattue en O_1h. On mène ensuite à la base les tangentes parallèles à cette droite, et les projections verticales de ces tangentes constituent le contour apparent du cylindre sur le plan vertical. Ces tangentes sont rabattues en $k_1\gamma$ et en l_1m_1, parallèlement à O_1h ; les points γ et m_1 sont relevés verticalement en γ' et en m' ; donc le contour apparent sur le plan vertical est constitué par les parallèles $\gamma's'$ et $m'r'$ à $o'\delta'$ menées respectivement par γ' et par m'.

302. Remarque. — Quand on veut déterminer les contours apparents d'un cône de révolution ou d'un cylindre de révolution, il est commode d'inscrire une sphère dans ces surfaces et d'appliquer la proposition démontrée au n° 298. En effet, en vertu de cette proposition, le

contour apparent de la surface conique ou cylindrique sur le plan horizontal est tangent au contour apparent de même nom de la sphère inscrite, et la même propriété subsiste pour les contours apparents sur le plan vertical.

§ III. — *Plans tangents passant par une droite ou parallèles à un plan donné. — Plans tangents communs.*

303. **Problème.** — *Par une droite donnée, mener un plan tangent à un cône ou à un cylindre.*

Soit D la droite donnée. Tout plan tangent à un cône passe par son sommet ; si donc on peut mener par la droite un plan tangent à une surface conique, ce plan sera défini par la droite D et par le sommet du cône. Le problème est donc généralement impossible, et pour reconnaître s'il est possible, il suffit de voir si la trace, sur le plan de base du cône, du plan passant par D et par le sommet est tangente à la base du cône. Ce n'est que dans le cas de l'affirmative que le problème est possible.

Si, au lieu d'un cône, on avait un cylindre, on raisonnerait absolument de la même manière, en remplaçant le plan passant par D et par le sommet par celui qui est mené par D parallèlement aux génératrices du cylindre.

Dans le cas du cône, le problème est possible en général quand la droite D passe par le sommet du cône. Alors, en prenant un point M sur la droite, on est ramené à faire passer par le point M un plan tangent au cône, problème déjà résolu (290).

De même, dans le cas du cylindre le problème est possible quand la droite D est parallèle aux génératrices du cylindre, et en prenant encore un point M sur cette droite, le problème se ramène au problème, déjà résolu, des plans tangents à un cylindre passant par un point donné.

304. **Problème.** — *Mener à un cône ou à un cylindre un plan tangent parallèle à un plan donné.*

Soit P le plan donné. Le plan tangent cherché, si la surface est un cône, sera le plan P′, mené par le sommet du cône parallèlement au

plan P. Or, le plan P′ n'est généralement pas tangent au cône ; donc, le problème est en général impossible pour le cône.

Si la surface est un cylindre, comme tout plan tangent au cylindre est parallèle aux génératrices, le problème est impossible si le plan P n'est pas parallèle aux génératrices. Si, au contraire, le plan P est parallèle aux génératrices, en menant dans le plan P une droite quelconque Δ non parallèle aux génératrices, le problème se ramène à un autre déjà résolu : mener à une surface cylindrique les plans tangents parallèles à une direction donnée Δ (293).

305. **Problème**. — *Mener un plan tangent commun à deux cônes.*

C'est encore un problème en général impossible. Appelons en effet S et S_1 les sommets des deux cônes. Si l'on mène par la ligne SS_1 les plans tangents au premier cône, aucun de ces plans ne sera, en général, tangent au second cône.

Le problème est possible dans les divers cas suivants :

1° *Quand les deux cônes ont le même sommet.* — On obtient alors les plans tangents communs en coupant les deux cônes par un même plan et en menant les tangentes communes aux deux sections. Chacune de ces tangentes et le sommet commun définissent un plan tangent commun.

2° *Quand les deux cônes ont une directrice commune dans le même plan.* — On cherche alors la trace de la ligne des sommets sur le plan de cette directrice, et, par ce point, on mène les tangentes à la base commune. Une quelconque de ces tangentes et la ligne des sommets définissent un plan tangent commun.

3° *Quand les deux cônes sont homothétiques.* — Car alors tout plan tangent à l'un des cônes mené par la ligne des sommets est aussi tangent à l'autre cône. Les génératrices de contact sont d'ailleurs parallèles.

4° *Quand les deux cônes sont circonscrits à la même surface.* — Car si M est un point commun aux deux courbes de contact, le plan tangent en M à la surface inscrite est aussi tangent à chacun des cônes (296).

306. **Problème**. — *Mener un plan tangent commun à un cône et à un cylindre.*

Ce problème, comme le précédent, est en général impossible. En effet, tout plan tangent commun doit passer par le sommet du cône et doit être, en outre, parallèle aux génératrices du cylindre. Il doit donc contenir la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône. Or, aucun des plans tangents au cône menés par cette droite n'est, en général, tangent au cylindre.

Le problème est possible si les deux surfaces ont une directrice plane commune ou si elles sont circonscrites à une même surface. La solution du problème, dans ces deux cas, se déduit de celle qui a été donnée plus haut, dans les cas correspondants, pour deux cônes.

307. **Problème.** — *Mener un plan tangent commun à deux cylindres.*

Soit P un plan quelconque parallèle aux génératrices des deux cylindres. Tout plan tangent commun à ces deux surfaces doit être parallèle au plan P. Or, aucun des plans tangents au premier cylindre parallèles au plan P n'est en général tangent au deuxième cylindre. Donc, le problème est en général impossible. Il est possible :

1° *Quand les deux cylindres ont même directrice plane.* — Dans ce cas, pour le résoudre, on cherche la trace du plan P sur le plan de cette directrice, et l'on mène à la directrice les tangentes parallèles à cette trace.

2° *Quand les deux cylindres sont circonscrits à la même surface.* — Dans ce cas on raisonne comme pour deux cônes (305, 4°).

§ IV. — *Plans tangents parallèles et normales communes à deux surfaces coniques ou cylindriques.*

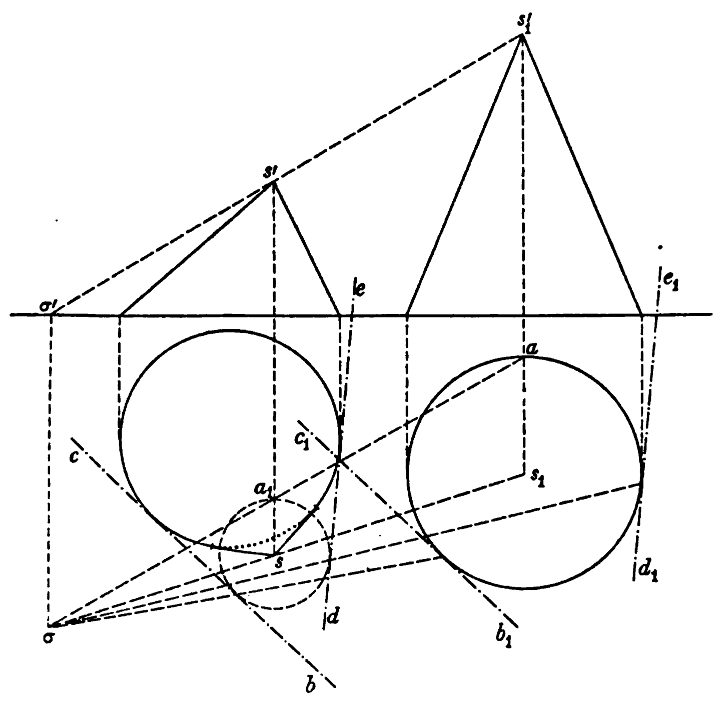
308. **Problème.** — *Étant données deux surfaces coniques, mener deux plans respectivement tangents à ces deux surfaces et parallèles entre eux.*

Soient S et S_1 les sommets des deux cônes. Supposons le problème résolu, et soient P et P_1 deux plans parallèles tangents, l'un au premier cône et l'autre au second. Transportons l'un des cônes, S_1 par exemple, parallèlement à lui-même, de manière que le point S_1 vienne coïncider avec le point S. Le plan P_1 se transportera alors parallèlement à lui-même et viendra coïncider avec le plan P; de sorte que le

plan P sera un plan tangent commun à deux cônes de même sommet : le cône S et le cône S_1 transporté. Donc, pour résoudre le problème, on mènera un plan tangent commun, P, à ces deux cônes et, par le point S_1, on mènera le plan parallèle au plan P. Il y aura autant de solutions que de plans tangents communs aux deux cônes de même sommet. Ajoutons d'ailleurs que, transporter le cône S_1 parallèlement à lui-même, de manière que le point S_1 coïncide avec le point S, revient à construire un cône homothétique au cône S_1 et ayant pour sommet le point S. Ce cône homothétique au cône S_1 est le lieu des parallèles aux génératrices de S_1 menées par S ; ce qui fournit le moyen de le construire graphiquement.

309. **Exemple.** — *Les deux cônes ont pour bases des cercles situés dans le plan horizontal.*

Soient (s, s') et (s_1, s'_1) les deux cônes donnés, dont le second est un



cône de révolution à axe vertical. Transportons ce second cône parallèlement à lui-même de manière que son sommet vienne en (s, s'). La

nouvelle base de ce cône ainsi transporté sera une circonférence décrite du point s comme centre dans le plan horizontal. D'ailleurs, le cône (s_1, s'_1) et le cône qu'on obtient en le transportant parallèlement à lui-même, de manière que son sommet vienne en (s, s'), sont homothétiques par rapport à un point quelconque de la ligne $(ss_1, s's'_1)$; donc, les sections de ces deux cônes par le plan horizontal sont homothétiques par rapport à la trace horizontale (σ, σ') de la ligne $(ss_1, s's'_1)$. Il suit de là que pour avoir le rayon de la circonférence de base du cône (s_1, s'_1) transporté, il suffit de mener deux rayons parallèles s_1a, sa_1, et de prendre le point de rencontre a_1 de sa_1 avec σa.

Cela posé, les plans tangents communs au cône (s, s') et au cône (s_1, s'_1) transporté ont pour traces horizontales les tangentes communes aux circonférences de bases ; soient bc et de ces tangentes communes. Si l'on mène b_1c_1 et d_1e_1 respectivement parallèles à bc et à de et tangentes à la circonférence de base du cône (s_1, s'_1), les plans tangents aux deux cônes respectifs, et dont les traces horizontales sont bc et b_1c_1, donnent une solution du problème. On en a une seconde solution en prenant les deux plans tangents dont les traces horizontales sont de et d_1e_1.

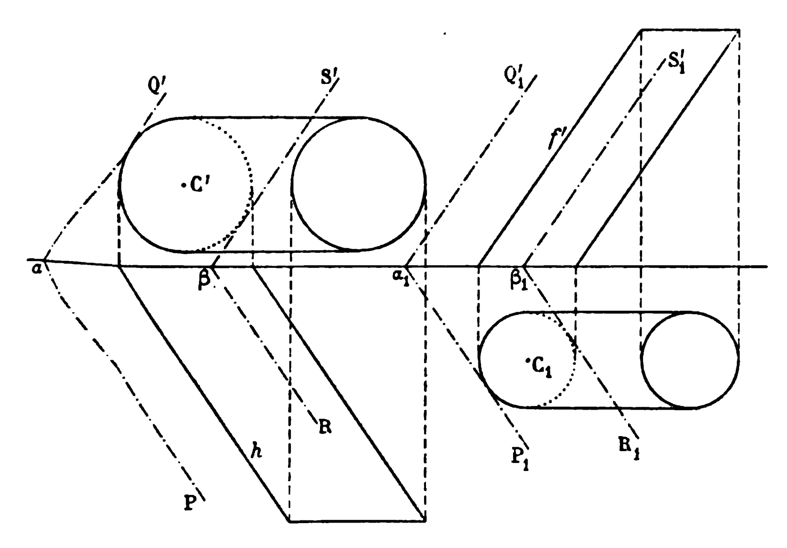
310. **Problème.** — *Étant donnés deux cylindres, mener deux plans respectivement tangents à ces deux surfaces et parallèles entre eux.*

Soit P un plan quelconque parallèle aux génératrices des deux cylindres. S'il existe un couple de plans Q et Q_1 parallèles entre eux et respectivement tangents aux deux cylindres, ces plans seront parallèles au plan P. De cette remarque résulte évidemment la solution du problème : on mène à chacun des cylindres les plans tangents parallèles au plan P ; si Q est un plan tangent au premier cylindre et si Q_1 est un plan tangent au deuxième, Q et Q_1 donnent une solution du problème.

311. **Exemple.** — *Mener deux plans tangents parallèles à un cylindre horizontal et à un cylindre de front.*

Supposons que la base du premier cylindre soit un cercle C′ du plan vertical et que la base du second soit un cercle C_1 du plan horizontal. Un plan quelconque parallèle aux génératrices des deux cylindres a sa trace horizontale parallèle à la projection horizontale h de la direction des génératrices du premier cylindre, et sa trace verti-

cale est parallèle à la projection verticale f' de la direction des génératrices du second cylindre. Si donc on mène les tangentes au cercle C'



parallèles à f' et les tangentes au cercle C_1 parallèles à h, on obtient en $P\alpha Q'$, $R\beta S'$, $P_1\alpha_1 Q'_1$, $R_1\beta_1 S'_1$ les plans tangents demandés.

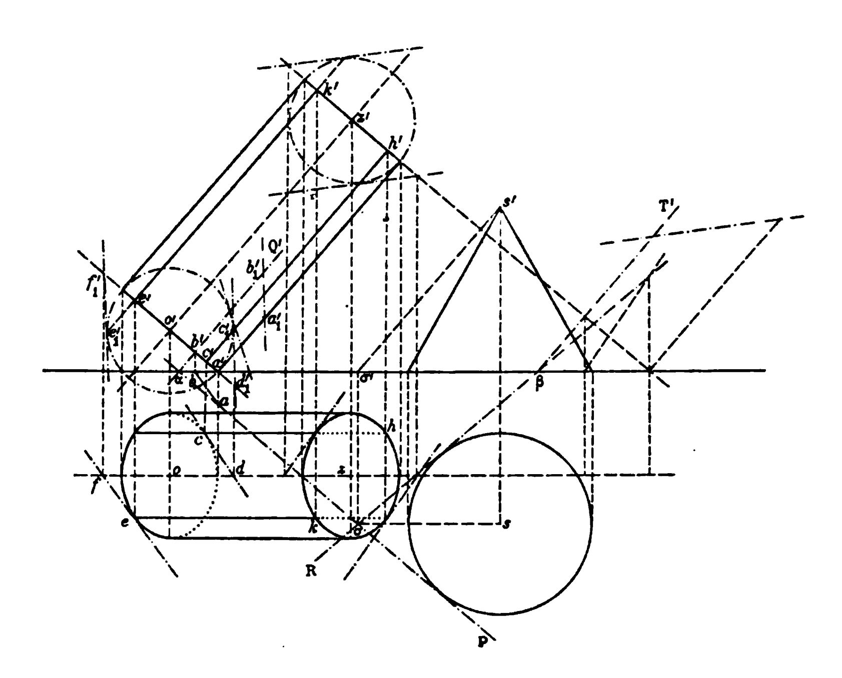
312. **Problème.** — *Étant donnés un cône et un cylindre, mener deux plans respectivement tangents à ces deux surfaces et parallèles entre eux.*

Appelons S le sommet du cône et D la direction des génératrices du cylindre. Soient d'ailleurs P et P_1 deux plans parallèles et respectivement tangents aux deux surfaces. Le plan P passe par le point S et le plan P_1 est parallèle à la direction D; donc, le plan P qui est parallèle au plan P_1, est aussi parallèle à D et contient la parallèle à cette droite menée par le point S. De là résulte évidemment la solution du problème : par le sommet du cône on mène la parallèle aux génératrices du cylindre, et par cette droite on mène les plans P tangents au cône. On mène enfin, au cylindre, les plans tangents P_1 parallèles aux plans P : un plan P et un plan P_1 donnent une solution du problème.

313. **Exemple.** — *Mener deux plans tangents parallèles à un cône de*

révolution à axe vertical et à un cylindre de révolution à axe de front.

Soient (s, s') le sommet du cône et $(oz, o'z')$ l'axe du cylindre. La parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône est $(s\sigma, s'\sigma')$, et l'on a en $P\alpha Q'$ et en $R\beta T'$ les plans tangents au cône menés par $(s\sigma, s'\sigma')$. Pour mener au cylindre les plans tangents parallèles à $P\alpha Q'$, on a considéré le cylindre comme ayant sa base dans le plan perpendiculaire à l'axe mené par le point (o, o'). L'intersection de ce plan et du plan $P\alpha Q'$ étant $(ab, a'b')$, on l'a rabattue en $a'_1b'_1$



sur le plan de front mené par $(oz, o'z')$. Le rabattement de la base du cylindre sur ce plan de front est la circonférence de rayon égal à celui du cylindre décrite du point o' comme centre. En menant à cette circonférence les tangentes $c'_1d'_1$ et $e'_1f'_1$ parallèles à $a'_1b'_1$, on obtient en $(ch, c'h')$ et $(ek, e'k')$ les génératrices de contact des plans tangents cherchés. Le premier de ces plans est défini par la génératrice $(ch, c'h')$ et par la tangente $(cd, c'd'_1)$; le deuxième est de même défini par la génératrice $(ek, e'k')$ et par la tangente $(ef, e'f'_1)$. En associant

l'un de ces plans au plan PαQ', on a une solution du problème, ce qui fournit ainsi deux solutions.

On en obtient deux autres en menant les plans tangents au cylindre parallèlement au plan RβT'. Pour mener ces plans tangents on a opéré comme plus haut, mais en se servant de la base supérieure du cylindre au lieu de se servir de la base inférieure. Enfin, on a fait la ponctuation des génératrices de contact avec le cylindre en supposant celui-ci opaque et limité aux plans perpendiculaires à l'axe menés, l'un par le point (o, o'), l'autre par le point (z, z').

314. Remarque. — Il est bon d'observer que les génératrices de contact des plans tangents cherchés et du cylindre ont deux à deux les mêmes projections horizontales et les mêmes projections verticales; car les plans tangents au cylindre sont deux à deux symétriques par rapport au plan de front et par rapport au plan de bout menés par l'axe $(oz, o'z')$.

315. **Problème.** — *Mener une normale commune à deux cônes, à deux cylindres, ou à un cône et à un cylindre.*

Supposons le problème résolu, et soient A et B les points d'incidence de la normale commune avec les deux surfaces respectives. Le plan tangent en A à la première surface et le plan tangent en B à la deuxième sont parallèles. Les génératrices de contact de ces deux plans tangents passent, l'une par A, l'autre par B, de sorte que AB est la perpendiculaire commune à ces deux droites. D'ailleurs la direction de cette perpendiculaire commune est celle de la normale aux plans tangents parallèles. Donc, pour résoudre le problème, on mènera un couple de plans P et P_1 respectivement tangents aux deux surfaces et parallèles entre eux; on construira la direction D de la normale à ces deux plans et les génératrices de contact G et G_1 de ces deux plans et des deux surfaces respectives; enfin, on mènera la parallèle à la direction D s'appuyant sur G et sur G_1.

Il y aura autant de solutions que de couples de plans analogues à P et à P_1.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1. Un cône a pour base un cercle dans le plan vertical et pour sommet un point quelconque. Un cylindre a pour base un cercle dans un plan vertical et ses génératrices sont perpendiculaires à ce plan. Mener les normales communes aux deux surfaces.

2. Un cône a pour base un cercle du plan vertical et pour sommet un point du plan horizontal. Trouver les contours apparents du cône supplémentaire.

3. On donne deux droites qui se coupent; mener par l'une d'elles un plan faisant un angle donné avec l'autre.

4. Résoudre la même question quand les deux droites données ne se coupent pas.

5. Mener les normales communes à deux cônes ayant pour base commune un cercle situé dans un plan de profil, et dont les sommets sont deux points situés sur la ligne de terre et symétriques par rapport au plan de profil.

6. Trouver la plus courte distance de la ligne de terre et d'un cylindre défini par sa base et par la direction de ses génératrices.

7. Un cône de sommet donné a pour base un cercle du plan horizontal. Mener par un point donné les plans tangents au cône supplémentaire.

Soient S le sommet du cône et A le point donné. Le plan mené par S perpendiculairement à SA coupe le cône donné suivant deux génératrices. Les plans menés par S et respectivement perpendiculaires à ces deux génératrices sont les plans tangents demandés.

8. Normales communes à une droite et à un cône donnés. Examiner en particulier le cas où le cône est de révolution.

9. Un cône de sommet donné a pour base un cercle du plan horizontal. Trouver la projection verticale d'un point du cône supplémentaire connaissant sa projection horizontale.

Cela revient à mener au cône donné les plans tangents dont les traces horizontales ont une direction connue.

10. Un cône a pour base une conique située dans un plan déterminé par ses traces et projetée horizontalement suivant un cercle donné. On coupe ce cône par un deuxième plan, et l'on prend la section comme base d'un second cône de sommet donné; trouver les contours apparents de ce nouveau cône.

11. On donne un cône de révolution à axe vertical et une droite ne rencontrant pas ce cône. Cette droite est l'axe d'un second cône de révolution tangent au premier et ayant son sommet dans le plan horizontal; construire les contours apparents de ce second cône.

12. Mener les normales communes à deux cylindres de révolution définis par leurs axes et par leurs rayons.

13. On donne deux droites A et B qui se coupent et l'on fait tourner B autour de A; mener par un point donné les plans tangents au cône ainsi engendré.

14. On donne le sommet, l'axe et le demi-angle au sommet d'un cône de révolution. On donne, d'autre part, le rayon et la direction des projections horizontales des génératrices d'un cylindre; placer ce cylindre sur le plan horizontal et sous le cône, de manière qu'il soit tangent au cône.

15. Mener à une sphère les plans tangents passant par un point donné et faisant un angle donné avec une droite ou avec un plan donnés.

16. Mener à un cône quelconque les plans tangents faisant un angle donné avec un plan donné.

17. Mener par un point donné une droite située à des distances données de deux droites données.

18. Résoudre le même problème quand on remplace le point donné par une direction donnée.

19. Mener à un cône ou à un cylindre une normale parallèle à une direction donnée.

20. Mener par un point donné une tangente commune à deux cônes.

21. Même problème en remplaçant le point donné par une direction donnée.

22. On donne un plan $P\alpha P'$ dont la trace horizontale αP fait un angle de 30° avec xy; le plan est incliné de 53° sur le plan vertical. On donne un point A dans ce plan dont la cote est 2^{cm} et l'éloignement 3^{cm}. Ce point est le centre de base d'un cône droit situé sur la face supérieure du plan et dont le rayon est 3^{cm}. La hauteur du cône est 12^{cm}. Construire les projections de ce cône.

(*Ecole navale, concours de 1876.*)

23. Deux cônes circulaires droits et égaux ont même sommet S, se touchent extérieurement suivant la génératrice SA, de manière à adhérer l'un à l'autre. Le rayon de la base vaut $3^{cm},8$ et la génératrice est double du rayon. La base de l'un des cônes est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal, sa circonférence touchant xy, et la génératrice SA étant de front. Cela posé, on demande :

1° De construire les projections du solide formé par l'ensemble des deux cônes;

2° De construire la partie invisible du plan vertical de projection supposé relevé, l'œil étant placé sur la perpendiculaire à xy menée par le point A, et à une distance en avant de cette ligne xy égale à deux fois le diamètre de l'un des cônes.

On ombrera la partie invisible demandée en n'y comprenant pas la projection verticale des cônes.

(*Ecole de Saint-Cyr, concours de 1873.*)

24. On donne deux points α et β sur xy, distants entre eux de $17^{cm},5$, et deux plans passant par ces points : l'un $P\alpha P'$, dont les traces font avec xy des angles $P\alpha x = 36°$, $P'\alpha x = 48°$; l'autre $Q\beta Q'$, qui est perpendiculaire au plan vertical de projection, et qui fait un angle de 42° avec le plan horizontal. Cela posé, on demande :

1° De prendre dans le plan $P\alpha P'$ un point S de cote 10^{cm} et d'éloignement $4^{cm},2$;

2° De construire les projections d'un cône circulaire droit ayant le point S pour sommet et s'appuyant par sa base sur le plan $Q\beta Q'$; le diamètre de base de ce cône étant égal à sa hauteur;

3° De mener les plants tangents à ce cône parallèles à l'intersection des deux plans $P\alpha P'$ et $Q\beta Q'$.

(*Ecole de Saint-Cyr, concours de 1879.*)

25. On donne un plan $P\alpha P'$, incliné de 40° sur le plan horizontal et dont la trace horizontale fait avec xy un angle de 36°. Un cercle situé sur ce plan, dans le premier dièdre, est tangent aux traces αP et $\alpha P'$, et a pour diamètre $5^{cm},4$. Ce cercle est la base d'un cône droit, situé au-dessus du plan $P\alpha P'$ et dont la hauteur est égale à $10^{cm},8$. On demande :

1° De construire les projections de ce cône;

2° De trouver les points de rencontre de ce cône avec la parallèle à xy menée par le milieu de la hauteur;

3° De mener le plan tangent au cône par le point de rencontre situé à droite.

(*Ecole de Saint-Cyr, concours de 1881.*)

26. Un cône de révolution est limité par un plan perpendiculaire à son axe. Dans ces conditions le cône a les dimensions suivantes : hauteur 140mm, diamètre de base 100mm.

1re partie. — On demande de placer ce solide conique de telle sorte que :

1° Son sommet (s, s') soit situé à 50mm en avant du plan vertical et à 130mm au-dessus du plan horizontal ;

2° Son cercle de base soit tangent au plan horizontal ;

3° Son axe fasse, dans l'espace, un angle de 30° avec le plan vertical.

NOTA. — Parmi les quatre solutions possibles on choisira celle pour laquelle l'axe est dirigé en avant et à gauche du sommet.

On représentera le cône dans cette position.

En projection horizontale, l'ellipse, projection du cercle de base, sera déterminée par ses axes ; en projection verticale, il suffira qu'elle le soit par deux diamètres conjugués convenablement choisis.

2e partie. — Eclairer le solide par des rayons lumineux tels que (R, R'), parallèles entre eux et au plan vertical et inclinés à 45° sur le plan horizontal.

R' 45° R

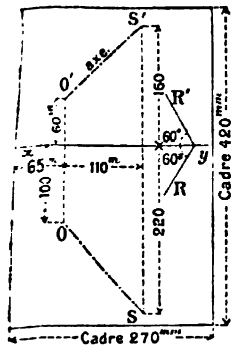
Déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal et l'ombre propre du solide.

Les constructions relatives aux ombres seront faites en bleu ; les autres, relatives à la mise en place du solide, seront en rouge.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1889.*)

27. Représentation d'un cône de révolution.

On demande de représenter un cône de révolution supposé limité à un cercle de base, sachant :



1° Que son axe est la droite (SO, S'O') ;

2° Que son sommet est le point (S, S') ;

3° Que le point (O, O') est le centre de son cercle de base ;

4° Que ce cercle de base est tangent au plan horizontal.

Le cône, une fois représenté, sera éclairé par des rayons lumineux parallèles à la droite (R, R').

On cherchera l'ombre propre du cône et ses ombres portées sur les plans de projection.

Pour les dimensions, se rapporter aux cotes données, en millimètres, sur le croquis ci-contre.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1886.*)

CHAPITRE III

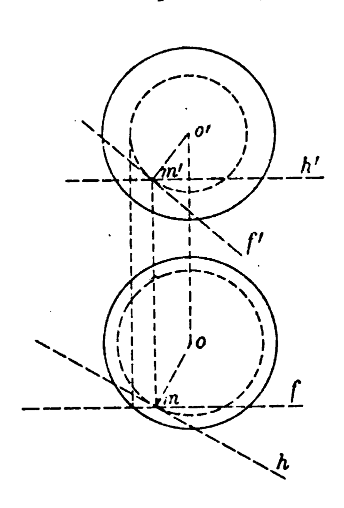
PLANS TANGENTS A LA SPHÈRE

---

§ I. — *Plans tangents à une sphère.*

316. **Problème.** — *Mener le plan tangent en un point d'une sphère.*

Soit (o, o') la sphère donnée représentée par ses contours apparents sur les deux plans de projection, et soit (m, m') un point pris sur la surface de cette sphère. En vertu de la propriété du plan tangent à la sphère, le plan tangent au point (m, m') à la sphère considérée est perpendiculaire au rayon $(om, o'm')$. On obtiendra donc ce plan tangent en menant par le point (m, m') le plan perpendiculaire à $(om, o'm')$. Dans l'épure ci-contre, le plan tangent est déterminé par l'horizontale $(mh, m'h')$ et par la ligne de front $(mf, m'f')$.



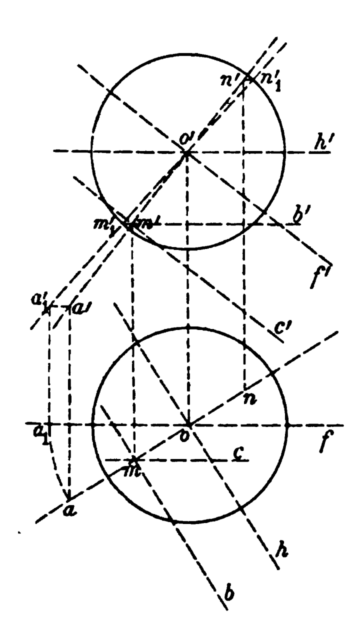
On peut aussi déterminer le plan tangent au moyen des tangentes en (m, m') à deux lignes tracées sur la surface de la sphère. Si l'on prend, par exemple, les tangentes en (m, m') aux deux cercles obtenus en coupant la sphère par un plan horizontal et par un plan de front passant par ce

point, on est encore conduit à déterminer, comme plus haut, le plan tangent par les deux droites $(mh, m'h')$ et $(mf, m'f')$.

317. **Problème.** — *Mener à une sphère les plans tangents parallèles à un plan donné.*

Appelons O le centre de la sphère donnée et M le point de contact de l'un des plans tangents cherchés. Tout revient évidemment à déterminer le point M. Or, si l'on appelle P le plan donné, le rayon OM étant perpendiculaire au plan tangent en M est perpendiculaire au plan P; donc le point M n'est autre que l'un des points de rencontre de la sphère avec la perpendiculaire au plan P menée par le centre O.

D'ailleurs, pour obtenir les points de rencontre de la sphère et de la perpendiculaire au plan P menée par le point O, il suffit de porter sur cette perpendiculaire, à partir du point O et de part et d'autre de ce point, une longueur égale au rayon de la sphère, problème qu'on sait résoudre (168).



Dans l'épure ci-contre, le plan P est déterminé par une horizontale $(oh, o'h')$ et par une ligne de front $(of, o'f')$. La perpendiculaire au plan P menée par le centre de la sphère est projetée en $(oa, o'a')$, et, pour avoir ses points de rencontre avec la sphère, on l'a rendue de front par une rotation autour de la verticale du point O. On a obtenu ainsi en m'_1 et en n'_1 les projections verticales des points de rencontre après la rotation; on en a déduit les points de rencontre (m, m') et (n, n') avant la rotation par une opération inverse.

Pour terminer le problème, il ne reste plus qu'à mener les plans parallèles au plan P par les points (m, m') et (n, n'). Dans l'épure, on a déterminé celui de ces plans qui passe par (m, m') au moyen

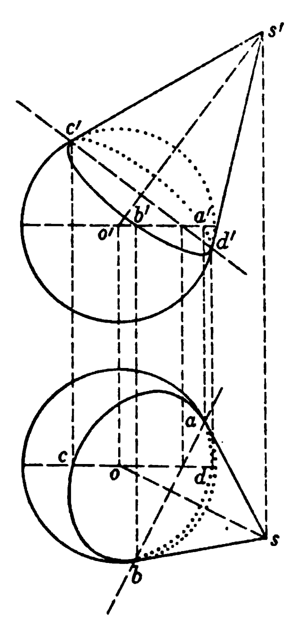
d'une horizontale (mb, $m'b'$) et d'une ligne de front (mc, $m'c'$) ; on déterminerait d'une manière analogue celui qui passe par (n, n').

Le problème admet, d'après cela, deux solutions.

318. **Problème.** — *Mener à une sphère les plans tangents qui passent par un point donné non situé sur la sphère.*

Soient (o, o') le centre de la sphère représentée par ses contours apparents et (s, s') le point donné. Il y a une infinité de plans tangents à la sphère passant par le point (s, s') ; tous ces plans enveloppent le cône circonscrit à la sphère par ce point.

On peut se proposer de construire la courbe de contact de la sphère et du cône circonscrit ; de cette manière on a les points de contact de tous les plans tangents passant par (s, s'). D'ailleurs, la courbe de contact est une courbe plane dont le plan n'est autre que le plan polaire du point (s, s') par rapport à la sphère. La détermination de la courbe de contact se ramène donc à la construction de la section faite dans la sphère par un plan, le plan polaire du point (s, s'). Ce problème sera résolu ultérieurement (Livre III, chap. III), mais il faut néanmoins, pour le résoudre, pouvoir déterminer le plan polaire du point (s, s'). Pour cela, on observe que le cône de sommet (s, s'), circonscrit à la sphère, a ses contours apparents sur les deux plans de projection tangents aux contours apparents de même nom de la sphère (302). On déduit facilement de là les contours apparents sa, sb, $s'c'$, $s'd'$ du cône. Mais si l'on considère les points de la sphère qui sont projetés horizontalement en a et en b, ces points sont à l'intersection du contour



apparent horizontal de la sphère et de la courbe de contact du cône circonscrit par le point (s, s') ; ils sont donc projetés verticalement en a' et en b' ; par suite, la droite (ab, $a'b'$) est une horizontale du plan polaire du point (s, s'). On voit de même que (cd, $c'd'$) est une

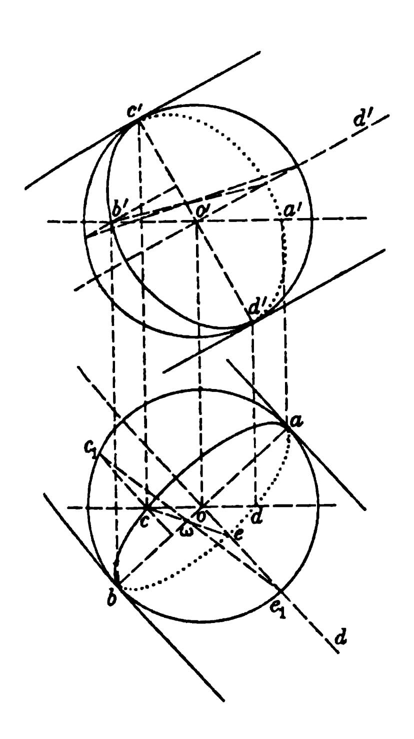
ligne de front du même plan, qui se trouve par suite ainsi complètement déterminé.

Il est bon, du reste, d'observer que *ab* est la polaire du point *s* par rapport au contour apparent de la sphère sur le plan horizontal, et que *c'd'* est, de même, la polaire du point *s'* par rapport au contour apparent de la sphère sur le plan vertical. Cette remarque permet de construire le plan polaire d'un point quelconque par rapport à la sphère, alors même que ce plan polaire ne couperait pas la sphère.

Ajoutons que, dans la ponctuation de l'épure ci-contre, on a supposé les deux corps solides et le cône limité, d'une part au sommet, d'autre part au plan de la courbe de contact.

Rappelons enfin, et cela est visible sur la figure, que le plan polaire d'un point (*s*, *s'*) est perpendiculaire à la ligne (*os*, *o's'*).

319. **Problème.** — *Mener à une sphère les plans tangents parallèles à une direction donnée.*



Soient (*o*, *o'*) le centre de la sphère et (*od*, *o'd'*) la direction donnée. Il y a une infinité de plans tangents à la sphère parallèles à cette direction ; tous ces plans enveloppent le cylindre circonscrit à la sphère parallèlement à la direction considérée.

On peut se proposer de construire la courbe de contact des deux surfaces, ce qui permet d'obtenir les points de contact de tous les plans tangents parallèles à (*od*, *o'd'*). D'ailleurs, la courbe de contact est plane, et son plan n'est autre que le plan perpendiculaire à (*od*, *o'd'*) mené par le centre de la sphère. On détermine alors facilement une horizontale (*ab*, *a'b'*) et une ligne de front (*cd*, *c'd'*) de ce plan, ce

qui fournit en même temps les points de la courbe de contact situés sur les contours apparents de la sphère.

Il est aisé, après cela, de construire la projection horizontale et la projection verticale de la courbe de contact. Comme cette courbe est un grand cercle de la sphère, ses projections sont des ellipses dont les grands axes sont égaux au diamètre de la sphère. Le grand axe de la projection horizontale est donc ab et celui de la projection verticale est $c'd'$. Pour avoir le petit axe de la projection horizontale, imaginons que la courbe de contact ait été rabattue autour de $(ab, a'b')$ sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère. La courbe de contact se rabat suivant le cercle de contour apparent de la sphère sur le plan horizontal, un sommet situé sur le petit axe se rabat en e_1 et le point (c, c') se rabat en c_1. Si donc on joint les points c_1 et e_1, puis qu'on relève la droite rabattue en $c_1\omega e_1$, on obtient en e l'un des sommets situés sur le petit axe de la projection horizontale. On en déduit l'autre sommet par symétrie, et l'on détermine d'une manière analogue les sommets situés sur le petit axe de la projection verticale.

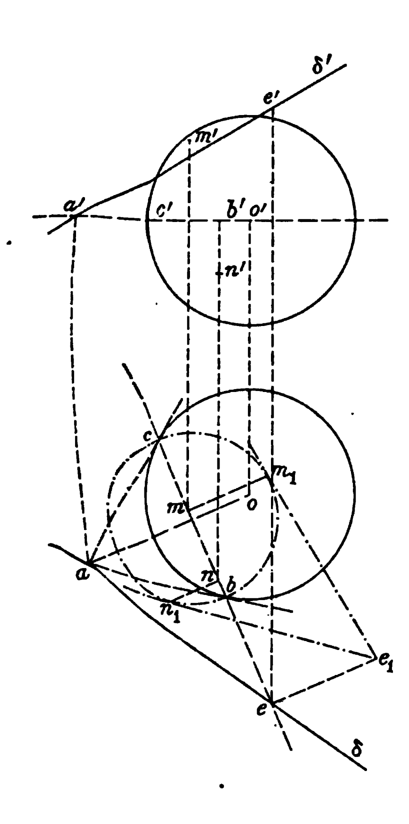
Pour faire la ponctuation, on a supposé la sphère solide, le cylindre circonscrit transparent, et on a tracé en traits pleins les contours apparents de ce cylindre.

320. **Problème.** — *Mener à une sphère les plans tangents passant par une droite.*

En général, pour mener, par une droite Δ, les plans tangents à une surface S, on circonscrit à la surface S un cône ayant pour sommet un point de Δ, puis on mène par Δ les plans tangents à ce cône. On conçoit, d'après cela, que la simplicité de la solution au point de vue graphique doive dépendre du choix du sommet du cône ainsi que du choix du plan de base de ce cône. De là, pour le cas où la surface S est une sphère, diverses méthodes que nous allons indiquer.

Première méthode. — Elle consiste à prendre comme sommet du cône soit le point de rencontre de la droite avec le plan horizontal mené par le centre de la sphère, soit le point de rencontre de cette même droite avec le plan de front mené également par le centre de la sphère. Comme plan de base du cône, on prend le plan de la courbe de contact avec la sphère.

Soient donc (o, o') le centre de la sphère, δ et δ' les projections de la droite. Prenons, par exemple, comme sommet du cône le point de rencontre (a, a') de la droite avec le plan horizontal mené par (o, o'). Le plan de la courbe de contact étant alors perpendiculaire au rayon horizontal $(oa, o'a')$, est vertical ; de sorte que si ab et ac sont les tangentes menées du point a à la circonférence o, la trace horizontale de ce plan est bc. Il en résulte que le point de rencontre de (δ, δ') avec la base du cône est projeté en e et en e'.

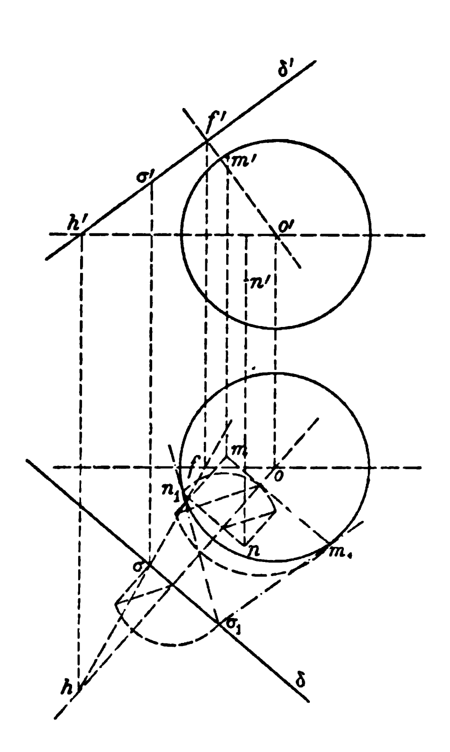


Pour mener de ce point les tangentes à la base du cône, rabattons cette base sur le plan horizontal qui passe par le centre de la sphère, en faisant tourner autour de $(bc, b'c')$. Le rabattement de la base du cône est la circonférence décrite sur bc comme diamètre. Celui du point (e, e') étant e_1, les tangentes à la base menées par (e, e') sont rabattues en e_1m_1 et en e_1n_1. Il en résulte que les points (m, m') et (n, n') sont les points de contact des plans tangents cherchés, qui sont par suite déterminés par ces points et par la droite donnée.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point e_1 soit extérieur à la circonférence bc.

Deuxième méthode. — Elle consiste à prendre comme sommet du cône le point à l'infini sur la droite. Le cône circonscrit devient ainsi un cylindre circonscrit parallèlement à la droite, et l'on prend, comme base de ce cylindre, le plan de la courbe de contact avec la sphère, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à la droite mené par le centre de la

sphère. En conservant les mêmes notations que plus haut, le plan de base est déterminé par une horizontale $(oh, o'h')$ et par une ligne de front $(of, o'f')$. Il est coupé par la droite (δ, δ') au point (σ, σ'), et, pour mener de ce point les tangentes à la base, on a rabattu autour de $(oh, o'h')$ sur le plan horizontal passant par cette droite. La base est rabattue suivant la circonférence o, et le rabattement du point (σ, σ'), obtenu d'après la règle du triangle rectangle, est le point σ_1. Les tangentes à la base sont donc rabattues suivant les tangentes $\sigma_1 m_1$ et $\sigma_1 n_1$ menées du point σ_1 à la circonférence o, de sorte que les points m_1 et n_1 sont les rabattements des points de contact des plans tangents demandés. En relevant ces points, on obtient en (m, m') et en (n, n') les points de contact de ces plans tangents, dont chacun est ainsi déterminé par son point de contact et par la droite (δ, δ').



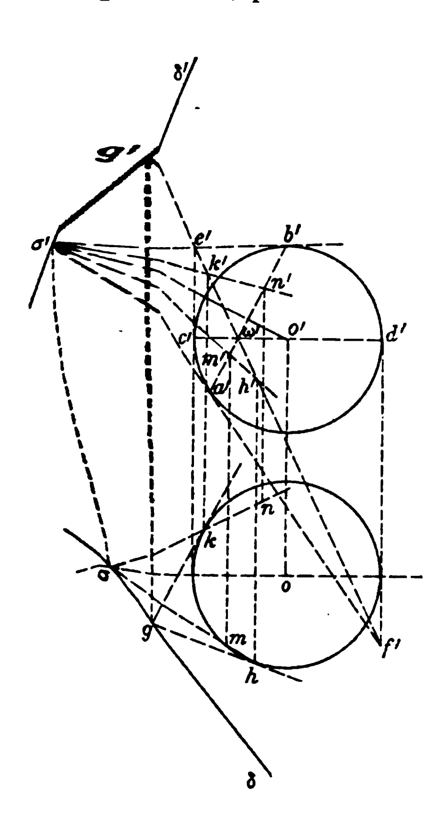
Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que le point σ_1 soit extérieur à la circonférence o. Suivant la position du point σ_1 par rapport à cette circonférence, on aura 0, 1 ou 2 solutions.

Troisième méthode. — Elle ne diffère des précédentes que par le choix de la base du cône circonscrit. Ce choix résulte des deux propositions suivantes, qu'on démontre dans tous les cours de géométrie analytique :

1° *Lorsque deux quadriques ont les mêmes plans tangents en deux de leurs points communs, elles se coupent suivant deux courbes planes qui sont nécessairement des coniques ;*

2° *Lorsque deux quadriques sont circonscrites à une même troisième, elles se coupent suivant deux courbes planes. Les plans de ces deux courbes passent, d'ailleurs, par la droite d'intersection des plans des deux courbes de contact et forment avec ceux-ci un faisceau harmonique.*

D'après cela, prenons comme sommet du cône circonscrit le point de rencontre (σ, σ') de la droite (δ, δ') avec le plan de front mené par le centre de la sphère. Le plan de la courbe de contact de la sphère avec ce cône est perpendiculaire à la droite de front (σo, $\sigma' o'$) et est, par suite, perpendiculaire au plan vertical ; sa trace verticale est donc $a'b'$.



Considérons, d'autre part, le cylindre vertical circonscrit à la sphère, c'est-à-dire le cylindre qui a pour base le cercle o de contour apparent sur le plan horizontal. Ce cylindre et le cône étant circonscrits à la sphère se coupent suivant deux courbes planes. Les plans de ces deux courbes passent par l'intersection des plans des deux courbes de contact ; mais ceux-ci sont des plans de bout ayant pour traces verticales respectives $a'b'$ et $c'd'$; leur intersection est donc la ligne de bout projetée verticalement en ω' ; de sorte que les plans des deux courbes communes au cône et au cylindre circonscrits passent par cette ligne de bout et sont eux-mêmes de bout. Or, les points e' et f' qui se trouvent à l'intersection des génératrices de contour apparent du cône et du cylindre sur le plan vertical, sont évidemment les projections verticales de deux points de l'une des courbes communes. Le plan de cette courbe est donc le plan de bout dont la trace verticale est $e'\omega'f'$.

Ce plan coupe le cône et le cylindre suivant une ellipse projetée horizontalement sur la circonférence o, et c'est cette ellipse que l'on prend comme base du cône. Soit alors (g, g') le point de rencontre de (δ, δ') avec la base du cône ainsi choisie. Les tangentes à cette base menées par (g, g') sont projetées horizontalement en gh et gk, verticalement en $g'h'$ et en $g'k'$. Chacune de ces droites associée à (δ, δ') définit l'un des plans tangents cherchés.

Pour avoir les points de contact de ces plans avec la sphère, on remarque qu'ils sont aussi tangents au cône suivant les génératrices respectives $(\sigma h, \sigma' h')$ et $(\sigma k, \sigma' k')$. Ces génératrices rencontrent la courbe de contact du cône et de la sphère aux points projetés verticalement en m' et en n'; on en conclut que les points (m, m') et (n, n') sont les points de contact des plans tangents menés par (δ, δ').

Le problème admet 0, 1 ou 2 solutions suivant que le point g est intérieur à la circonférence o, sur cette circonférence ou extérieur à cette ligne.

§ II. — *Plans tangents communs à deux ou à trois sphères.*

321. Problème. — *Mener un plan tangent commun à deux sphères.*

On démontre, en géométrie élémentaire, que tout plan tangent commun à deux sphères passe par l'un des centres de similitude et que, réciproquement, tout plan tangent à l'une des sphères, passant par l'un des centres de similitude, est tangent à l'autre sphère. Comme par un point donné on peut mener une infinité de plans tangents à une sphère, on voit que le problème proposé est indéterminé.

Pour le déterminer, on peut assujettir le plan tangent commun à une autre condition; de là les deux problèmes suivants.

322. Problème. — *Mener par un point donné un plan tangent commun à deux sphères.*

Appelons A le point donné, C et C_1 les centres de similitude des deux sphères. En vertu de ce que l'on a dit plus haut (**321**), les plans tangents cherchés doivent passer soit par le point C, soit par le point C_1. Comme ils doivent aussi passer par le point A, ils doivent contenir, soit la droite AC, soit la droite AC_1. D'aileurs, tout plan

tangent à l'une des sphères, mené par cette droite, est aussi tangent à l'autre sphère, puisqu'il passe par un de leurs centres de similitude ; donc le problème est ramené au suivant, déjà résolu : mener par une droite (AC ou AC_1) les plans tangents à une des sphères.

Par chacune des droites AC ou AC_1 on peut mener jusqu'à deux plans tangents à l'une des sphères ; donc le problème proposé peut admettre jusqu'à 4 solutions.

323. REMARQUE. — Il peut arriver que le centre de similitude directe des deux sphères ne soit pas dans les limites du dessin. Le problème présente alors une difficulté provenant de ce qu'il est impossible de joindre ce centre de similitude au point A. On évite cette difficulté au moyen de la remarque suivante : Si l'on imagine le cône de sommet A circonscrit à l'une des sphères, tout plan tangent commun aux deux sphères est tangent à ce cône ; il est donc tangent à une sphère quelconque inscrite dans ce cône. Dès lors, on peut remplacer la sphère à laquelle le cône est circonscrit, par une autre sphère inscrite dans ce cône et choisie de telle sorte que l'on puisse tracer la ligne qui joint le point A au nouveau centre de similitude directe des deux sphères. On pourra, par exemple, s'arranger de manière que les deux sphères auxquelles on va mener finalement les plans tangents communs soient égales ; car de cette manière la ligne droite qui va du point A au centre de similitude directe est parallèle à la ligne des centres des deux sphères.

324. **Problème.** — *Mener à deux sphères un plan tangent commun parallèle à une direction donnée.*

Ce problème est identique au précédent quand le point A s'éloigne indéfiniment dans la direction donnée. On mènera donc les parallèles à cette direction par les deux centres de similitude, et, par chacune de ces droites, on mènera les plans tangents à l'une des sphères : ce seront les plans tangents demandés.

Quand le centre de similitude directe des deux sphères n'est pas dans les limites du dessin, on remplace les deux sphères par les cylindres circonscrits parallèlement à la direction donnée, et l'on mène les plans tangents communs à ces deux cylindres. Pour cela, on coupe les deux cylindres, qui sont de révolution, par un plan perpendiculaire à la direction donnée et l'on mène les tangentes communes aux deux

cercles de section. Chacune de ces tangentes et la direction donnée définissent un plan tangent cherché.

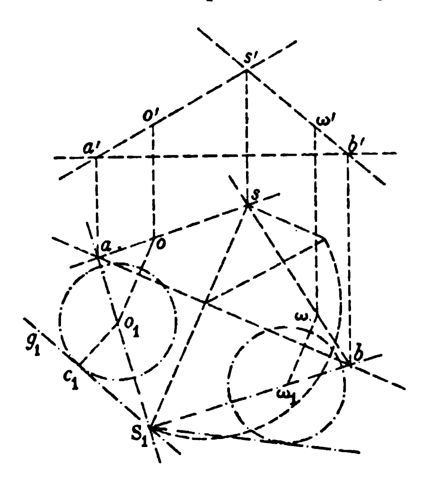
325. **Problème.** — *Mener les plans tangents communs à trois sphères.*

On démontre, en géométrie élémentaire, que tout plan tangent commun à trois sphères passe par l'un des axes de similitude et que, réciproquement, si l'on mène les plans tangents à l'une des sphères par l'un des axes de similitude, ces plans sont tangents aux deux autres sphères. Il suffit donc, pour résoudre le problème proposé, de mener les plans tangents à l'une des sphères successivement par chacun des axes de similitude. Comme il y a 4 axes de similitude, il peut y avoir jusqu'à 8 solutions, deux pour chaque axe.

326. **Application.** — *Mener les plans tangents communs à deux cônes de révolution de même sommet.*

Pour mener les plans tangents communs à deux cônes de révolution de même sommet, on inscrit une sphère dans chacun des cônes, et par le sommet des deux cônes on mène les plans tangents communs à ces deux sphères.

Il y a avantage à inscrire dans les deux cônes deux sphères égales, parce qu'alors la ligne qui joint le sommet commun au centre de similitude directe est parallèle à la ligne des centres.



Comme on le voit, la seule difficulté du problème réside actuellement dans la détermination des sphères inscrites respectivement dans les deux cônes.

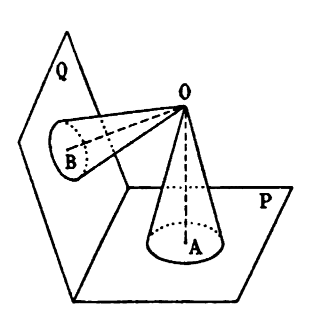
Pour montrer, encore une fois, comment on peut résoudre ce dernier problème, supposons les deux cônes définis par leurs axes et par leurs demi-angles au sommet. Soient (sa, $s'a'$) et (sb, $s'b'$) les deux axes. Si l'on imagine une sphère inscrite dans le premier cône et une sphère inscrite dans le deuxième, le plan des axes coupe ces deux sphères suivant deux

grands cercles respectivement tangents aux génératrices déterminées par le même plan dans les deux cônes. Les deux sphères sont déterminées en même temps que ces deux grands cercles.

Pour déterminer ces deux grands cercles, rabattons le plan des axes sur un plan horizontal, par exemple. En rabattant sur le plan horizontal qui passe par $(ab, a'b')$, le sommet se rabat en S_1 et les axes se rabattent en S_1a et en S_1b. Une des génératrices déterminées par le plan des axes dans le premier cône se rabat donc suivant une droite S_1g_1 menée par S_1 et faisant avec S_1a un angle égal au demi-angle au sommet du premier cône; par suite, le grand cercle déterminé par le même plan dans la sphère inscrite au premier cône se rabat suivant une circonférence ayant son centre sur S_1a et tangente à S_1g_1. Soit o_1c_1 cette circonférence, dont on peut prendre le centre arbitrairement sur S_1a. En relevant le point o_1 en (o, o'), on a le centre d'une sphère inscrite dans le premier cône; le rayon de cette sphère est d'ailleurs égal à o_1c_1. On détermine de même une sphère inscrite dans le deuxième cône, et, d'après ce que l'on vient de voir, il n'y a aucune difficulté à choisir ces deux sphères de manière qu'elles aient des rayons égaux, car cela revient à inscrire deux circonférences égales dans deux angles donnés.

327. Application à la construction d'un trièdre dont on donne les trois dièdres. — Résolvons d'abord le problème suivant:

Etant donnés deux plans P, Q *et un point* O, *mener par le point* O *un plan faisant l'angle* V *avec le plan* P *et l'angle* V' *avec le plan* Q.



Soient OA et OB les perpendiculaires respectives menées du point O sur les plans P et Q. Le plan cherché faisant l'angle V avec le plan P fait l'angle $\frac{\pi}{2} - V$ avec la droite OA; il est donc tangent à un cône de révolution autour de OA et dont le demi-angle au sommet est $\frac{\pi}{2} - V$. On voit de même qu'il est tangent au cône de révolution autour de OB dont le demi-angle au sommet est $\frac{\pi}{2} - V'$. Les plans tangents cherchés sont donc les plans

tangents communs à ces deux cônes de révolution de même sommet et, par suite, les plans tangents communs, menés par le point O, à deux sphères inscrites respectivement dans les deux cônes. Le problème est ainsi ramené à un autre déjà résolu (322). Nous allons donner le détail des constructions et la discussion.

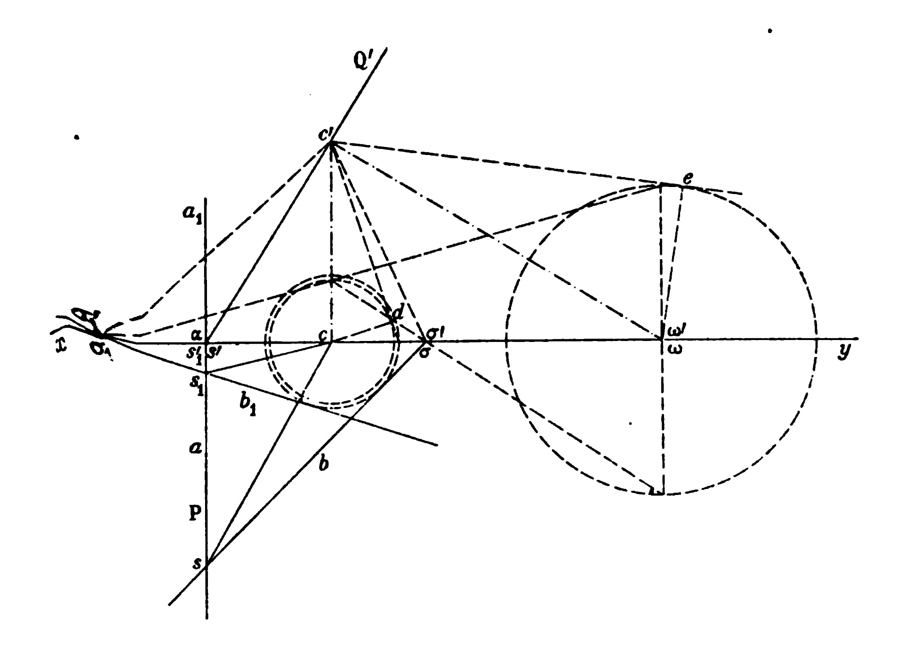
Pour cela, nous appellerons, comme d'habitude, A, B, C les trois dièdres et nous examinerons deux cas, suivant que le nombre des dièdres obtus est pair ou impair.

1° Supposons d'abord que le nombre des dièdres obtus soit pair (0 ou 2). Il est aisé de voir qu'on peut le supposer égal à 0. En effet, si SABC est un trièdre dont les dièdres B et C sont obtus, le trièdre SA'BC, obtenu en prolongeant l'arête SA au-delà du sommet, a ses trois dièdres aigus. D'ailleurs, le trièdre SA'BC étant construit, on a construit par cela même le trièdre SABC.

Supposons donc les trois dièdres aigus et prenons comme plan horizontal le plan de la face c, comme plan vertical un plan perpendiculaire à l'arête SA. De cette façon le plan des deux arêtes SA, SC est représenté par ses traces en $P\alpha Q'$, de telle sorte que l'angle $Q'\alpha y$ est égal au rectiligne du dièdre A. Il faut maintenant mener un plan faisant les angles respectifs B et C avec le plan horizontal et avec le plan $P\alpha Q'$. Comme on peut faire passer ce plan par un point quelconque de l'espace, nous l'assujettirons à passer par le point (c, c') pris sur $\alpha Q'$. Menons donc la droite cc' perpendiculaire à xy et $c'\omega$ perpendiculaire à $\alpha Q'$, puis considérons les deux cônes de révolution ayant pour axes respectifs ces deux droites et pour demi-angles aux sommets $\frac{\pi}{2} - B$ et $\frac{\pi}{2} - C$. Inscrivons enfin dans ces cônes deux sphères dont les centres respectifs sont les points de rencontre des axes avec la ligne de terre : la première sphère a pour rayon cd et le rayon de la deuxième est égal à ωc.

Il s'agit maintenant de mener par le point (c, c') un plan tangent commun à ces deux sphères. Pour cela, prenons les centres de similitude (σ, σ') et (σ_1, σ_1') des deux sphères, et menons par l'une des droites $(c\sigma, c'\sigma')$ ou $(c\sigma_1, c'\sigma_1')$ les plans tangents à l'une quelconque des deux sphères ou, mieux encore, les plans tangents au cône à axe vertical. Nous obtenons ainsi quatre plans tangents, d'où il semble résulter que le problème admet quatre solutions. Il est aisé de voir qu'il n'en admet qu'une.

Menons, en effet, des points σ et σ_1 les tangentes à la base du cône à axe vertical et observons d'abord qu'il suffit de tracer deux de ces tangentes, σs et $\sigma_1 s_1$, les trièdres obtenus au moyen des deux autres étant symétriques de ceux qu'on obtient au moyen des deux premières. A la première de ces tangentes correspond un plan $s\sigma c'$ qui coupe le plan $P\alpha Q'$ suivant $(sc, s'c')$; de même, à la deuxième de ces tangentes correspond un plan $s_1\sigma_1 c'$ qui coupe le plan $P\alpha Q'$ suivant $(s_1c, s_1'c')$; de



sorte que le sommet du trièdre cherché est, soit le point (s, s'), soit le point (s_1, s_1'). Si on prend le point (s, s') comme sommet, il est permis de prendre la demi-droite $(sc, s'c')$ comme arête. Alors les deux autres arêtes doivent être sa et sb et non leurs prolongements respectifs ; car les trois dièdres étant aigus, chaque arête se projette sur le plan de la face opposée à l'intérieur de l'angle formé par les deux autres arêtes ; et sc devant être située dans l'angle formé par les deux autres arêtes, celles-ci sont nécessairement sa et sb. D'ailleurs, la projection de sb sur le plan de la face ASC est située à l'intérieur de l'angle formé par les arêtes SA et SC, puisque la projection du point (σ, σ') est nécessairement située entre s' et c'.

Si, au contraire, on prend le point (s_1, s'_1) comme sommet du trièdre, il est permis de prendre la demi-droite (s_1c, s'_1c') comme arête, de sorte que les deux autres arêtes sont nécessairement s_1b_1 et s_1a_1, puisque leur angle doit comprendre la demi-droite s_1c. Mais le trièdre dont les arêtes sont s_1a_1, s_1b_1 et (s_1c, s'_1c') ne répond pas à la question ; car la projection de (σ_1, σ'_1) sur $\alpha Q'$ ne tombant pas entre s'_1 et c', la projection de l'arête SB sur le plan de la face ASC ne tombe pas dans l'angle formé par les arêtes SA et SC.

Le raisonnement suppose que le point σ_1 n'est pas situé entre α et c. Dans ce dernier cas, comme les tangentes menées du point σ_1 à la base du cône dont l'axe est vertical sont symétriques par rapport à xy, il y en a une qui rencontre $P\alpha$ au-dessous de la ligne de terre. En appelant s_1 ce point de rencontre, on peut prendre le point s_1 pour sommet du trièdre dont une arête sera toujours (s_1c, s'_1c'). Le simple examen des constructions montre alors que la projection de l'arête SB sur le plan de la face ASC ne tombe pas dans l'angle formé par les deux arêtes SA et SC.

Donc, en résumé, quand le problème est possible, dans le cas où les trois dièdres sont aigus, il admet une seule solution, *qui est obtenue au moyen du centre de similitude interne des deux sphères inscrites.*

Il reste à trouver les conditions de possibilité du problème. D'après la discussion qui vient d'être faite, ces conditions s'obtiendront en exprimant que le point σ est extérieur à la base du cône à axe vertical, c'est-à-dire que σc est supérieur au rayon de cette base. Ce rayon, que nous appellerons r, est égal à $cc' \cot B$. D'autre part σc est déterminé par la proportion

$$\frac{\sigma c}{\sigma\omega} = \frac{cd}{\omega e},$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\sigma c}{cd} = \frac{\sigma\omega}{\omega e} = \frac{c\omega}{cd + \omega e},$$

et qui donne

$$\sigma c = \frac{cd \times c\omega}{cd + \omega e}.$$

Or, on a évidemment

$$cd = cc' \cos B, \qquad c\omega = cc' \operatorname{tg} A, \qquad \omega e = \omega' c' \cos C = \frac{cc' \cos C}{\cos A}.$$

Il en résulte

$$\sigma c = \frac{\overline{cc'}^2 \cdot \dfrac{\sin A \cos B}{\cos A}}{cc'\left(\cos B + \dfrac{\cos C}{\cos A}\right)} = cc' \frac{\sin A \cos B}{\cos C + \cos A \cos B},$$

et la condition de possibilité du problème s'écrit

$$cc' \frac{\sin A \cos B}{\cos C + \cos A \cos B} > \frac{cc' \cos B}{\sin B}.$$

Les angles étant aigus, toutes les lignes trigonométriques qui figurent dans cette inégalité sont positives, et, en chassant les dénominateurs, l'inégalité est équivalente à

$$\cos C + \cos A \cos B < \sin A \sin B$$

ou à

$$\cos C + \cos (A + B) < 0.$$

Celle-ci, à son tour, est équivalente à

$$\cos C < \cos (\pi - A - B);$$

et comme le premier membre est positif, que de plus A et B sont aigus, il faut, pour qu'elle soit satisfaite, que l'on ait

$$\pi - (A + B) < \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad A + B + C > \pi.$$

Les angles A, B, C étant aigus, la première de ces deux inégalités est une conséquence de la deuxième. Donc, dans ce cas, il y a une seule condition de possibilité du problème, savoir :

$$A + B + C > \pi.$$

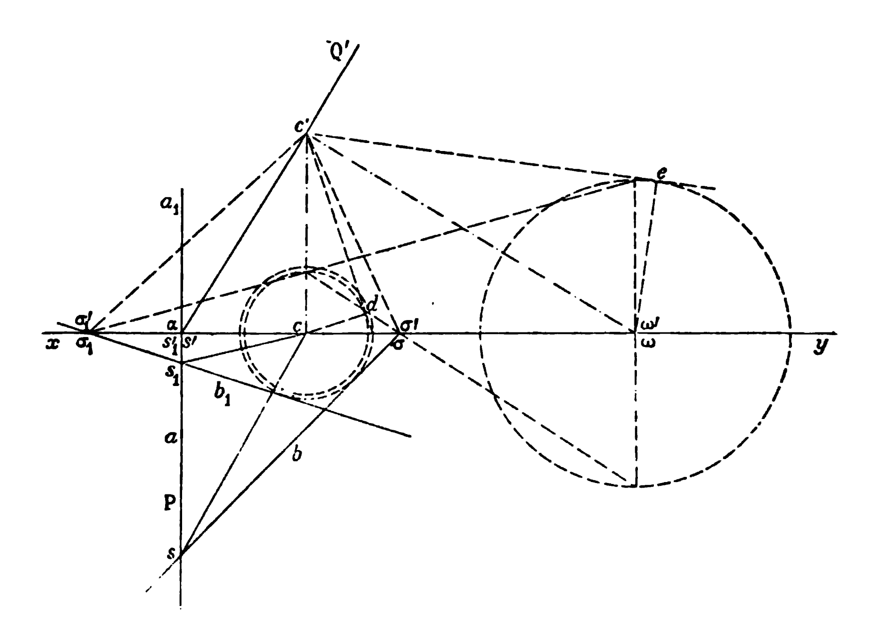
Si les deux dièdres B et C étaient obtus, en exprimant qu'on peut construire le trièdre dont les angles sont A, $\pi - B$, $\pi - C$, on aurait

$$A + \pi > B + C.$$

2° Supposons maintenant que le nombre des dièdres obtus soit impair (1 ou 3). Si le nombre des dièdres obtus est 3, on peut construire le trièdre SA'BC, obtenu en prolongeant l'arête SA au-delà du sommet. Dans ce trièdre, le dièdre SA' seul est obtus, de sorte qu'il est permis de supposer qu'un seul des trois dièdres est obtus.

Supposons donc que le dièdre SA tout seul soit obtus, et prenons : comme plan horizontal le plan de la face ASB; comme plan vertical un plan quelconque perpendiculaire à SA. Dans ce système, si PαQ'

est le plan de la face ASC, le rectiligne du dièdre est $x\alpha Q'$. En recommençant alors le raisonnement fait dans le premier cas, on est conduit à mener par les points σ et σ_1 les tangentes à la base du cône dont l'axe est cc'. Pour faire la discussion, on observe que si une face d'un dièdre est adjacente à un dièdre aigu et à un dièdre obtus, la projection de la troisième arête sur le plan de cette face n'est pas située dans



l'angle des deux arêtes situées dans le plan de cette face. Par un raisonnement encore pareil à celui qui a été fait dans le premier cas, on voit alors qu'il n'y a pas de solution correspondant à un plan passant par le centre de similitude interne (σ, σ'); de sorte que si le problème est possible, il n'admet qu'une solution, *qu'on obtient au moyen du centre de similitude externe des deux sphères inscrites.*

Pour que le problème soit possible, il faut évidemment et il suffit que $\sigma_1 c$ soit supérieur au rayon du cercle de base du cône à axe vertical cc', c'est-à-dire qu'on ait

$$\sigma_1 c > cc' \operatorname{cotg} B.$$

Or on a maintenant

$$\frac{\sigma_1 c}{\sigma_1 \omega} = \frac{cd}{\omega e} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_1 c}{cd} = \frac{\sigma_1 \omega}{\omega e} = \frac{c\omega}{\omega e - cd}.$$

On en déduit

$$\sigma_1 c = cc' \frac{\sin A \cos B}{\cos C + \cos A \cos B},$$

et la condition de possibilité du problème s'écrit encore

$$\frac{\sin A \cos B}{\cos C + \cos A \cos B} > \frac{\cos B}{\sin B},$$

ou bien, puisque $\cos B$ et $\sin B$ sont positifs,

$$\frac{\sin A \sin B}{\cos C + \cos A \cos B} > 1.$$

Comme le numérateur du premier membre de cette inégalité est positif, le dénominateur doit être positif (ce qui résulte, du reste, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, de ce que l'on a supposé tacitement que le rayon ωe est supérieur au rayon cd), et l'inégalité est équivalente à

$$\cos C + \cos A \cos B < \sin A \sin B$$

ou à

$$\cos (A + B) < \cos (\pi - C).$$

Mais, actuellement, les angles $A + B$ et $\pi - C$ étant obtus, cette inégalité ne peut être satisfaite que si l'on a

$$\pi - C < A + B < 2\pi - (\pi - C);$$

ce qui donne

$$A + B + C > \pi$$

et

$$A + B < \pi + C.$$

Rien n'empêche, d'ailleurs, de supposer que C soit le plus petit dièdre, de sorte que la dernière inégalité signifie que le plus petit dièdre augmenté de deux droits doit donner une somme supérieure à celle des deux autres dièdres.

Si les trois dièdres étaient obtus, on construirait le trièdre ayant pour dièdres A, $\pi - B$, $\pi - C$, et les conditions de possibilité s'écriraient

$$A + \pi > B + C,$$

$$A + C < B + \pi.$$

Si l'on rapproche cette discussion de celle qui a été faite dans le premier cas, et si l'on observe que chaque dièdre étant inférieur à 2 droits, leur somme est inférieure à 6 droits, on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse construire un trièdre avec trois dièdres donnés sont :

1° *Que la somme des trois dièdres soit comprise entre 2 et 6 droits;*

2° *Que le plus petit dièdre augmenté de deux droits donne une somme supérieure à celle des deux autres dièdres.*

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1. Mener à une sphère les plans tangents faisant des angles donnés avec deux droites données.

2. Mener à une sphère les plans tangents faisant des angles donnés avec une droite et avec un plan donnés.

3. Mener à une sphère les plans tangents faisant des angles donnés avec deux plans donnés.

4. Mener une droite rencontrant une droite donnée, tangente à un cône donné et située à une distance donnée d'un point donné.

5. Même problème en remplaçant le cône par un cylindre.

6. Mêmes problèmes en supposant que la droite cherchée, au lieu de rencontrer une droite donnée, soit parallèle à un plan donné.

7. Mener par un point donné les plans tangents à une sphère parallèles à une direction donnée.

8. Mener les tangentes communes à deux sphères rencontrant une droite donnée. Nombre de solutions.

9. Mener un plan situé à des distances données de trois points donnés.

10. Mener à une sphère les tangentes situées dans un plan donné et rencontrant une droite donnée.

11. Etant donnée une sphère dont le centre se trouve dans le premier dièdre à égale distance du plan horizontal et du plan vertical ($o\omega = o'\omega = 5^{cm}$), et dont le rayon R est égal à la moitié de cette distance ($R = 2^{cm},5$), on demande de construire les projections d'un tronc de pyramide triangulaire ABCA'B'C' satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les plans de base ABC et A'B'C' sont tangents à la sphère, parallèles à xy et font un angle de 45° avec la partie postérieure du plan horizontal;

2° Les arêtes latérales AA', BB', CC' prolongées passent par le point ω; elles sont tangentes à la sphère et font entre elles des angles égaux.

On placera l'arête AA' dans le plan de profil $o'\omega o$ et de manière à faire avec le plan horizontal le plus grand angle possible. On indiquera les intersections de la sphère avec les faces du tronc de pyramide.

(*Ecole navale, concours de 1885.*)

12. Un tétraèdre SABC a sa base ABC sur le plan horizontal :
$aa' = 8^{cm},4$, $a'b' = 9^{cm},9$, $ab = 11^{cm},2$, $bc = 14^{cm},4$, $ac = 17^{cm},1$.

L'arête SA, parallèle au plan vertical, égale $13^{cm},6$ et fait avec l'arête AB un angle de 62°.

On demande :

1° De construire le tétraèdre;

2° De mener la droite DE perpendiculaire commune aux deux arêtes opposées SA et BC.

Du point O, milieu de DE, comme centre, on décrit une sphère avec un rayon égal à $2^{cm},2$. Mener à cette sphère deux plans tangents perpendiculaires à l'arête SC, et construire les sections de ces deux plans avec le tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on ne conservera que la partie du tétraèdre comprise entre les deux plans.

(*Ecole de Saint-Cyr, concours de 1887, 2e épreuve.*)

13. Une droite est définie par deux points A et B; le premier a pour cote $1^{cm},2$ et pour éloignement $4^{cm},2$; le second a pour cote $5^{cm},8$ et pour éloignement $2^{cm},4$. La distance de leurs plans de profil est égale à 8^{cm}. On demande :

1° De déterminer les projections de la perpendiculaire commune à cette droite et à xy;

2° De tracer les projections de la sphère décrite sur cette perpendiculaire commune comme diamètre et de déterminer ses intersections avec les plans de projection;

3° De tracer les projections du cube circonscrit à cette sphère dont l'une des faces passe par la droite donnée et dont l'une des arêtes est parallèle à cette droite.

(*Ecole navale, concours de 1888.*)

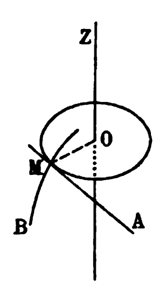
CHAPITRE IV

PLANS TANGENTS ET NORMALES AUX SURFACES DE RÉVOLUTION

§ I. — *Plan tangent en un point; normale.*

328. Théorème. — *Le plan tangent en un point d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par ce point.*

Soient en effet OZ l'axe d'une surface de révolution et M un point de la surface. Le plan tangent en M à la surface contenant toutes les tangentes en M, contient en particulier la tangente MA au parallèle de ce point. Or, si O est le point de rencontre de l'axe avec le plan du parallèle, la tangente MA est perpendiculaire au rayon OM de ce parallèle; elle est aussi perpendiculaire à l'axe, puisque celui-ci est perpendiculaire au plan du parallèle; donc MA est perpendiculaire au plan MOZ, c'est-à-dire au plan du méridien qui passe par M; donc enfin le plan tangent, qui contient MA, est lui-même perpendiculaire au plan de ce méridien.



329. Corollaire I. — *Si un point se déplace sur un méridien, le plan tangent en ce point enveloppe un cylindre circonscrit à la surface le long de ce méridien.*

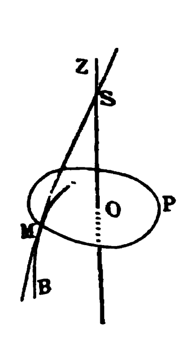
En effet, si le point M se déplace sur le méridien MB, la droite MA reste toujours perpendiculaire au plan de ce méridien et engendre un

cylindre dont la section droite est MB. D'ailleurs en tout point de MB ce cylindre et la surface ont le même plan tangent.

330. **Corollaire II.** — *Lorsqu'un méridien est parallèle à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan fait partie du contour apparent de la surface sur le même plan.*

Car si le méridien MB est parallèle au plan horizontal par exemple, le cylindre circonscrit le long de ce méridien et un lieu de tangentes verticales à la surface. Par suite la trace horizontale de ce cylindre, c'est-à-dire la projection horizontale de MB, fait partie du contour apparent de la surface sur le plan horizontal.

331. **Théorème.** — *Si un point décrit un parallèle d'une surface de révolution, le plan tangent à la surface en ce point passe par un point fixe situé sur l'axe de révolution.*



Soit en effet MS la tangente en M à la méridienne MB d'une surface de révolution autour de l'axe OZ. Cette tangente et l'axe de révolution étant situés dans le même plan se rencontrent; soit S leur point de rencontre. Quand on fait tourner la méridienne MB autour de l'axe, le point M décrit un parallèle P et le point S reste fixe; d'ailleurs MS reste toujours tangente en M à la méridienne MB dans chacune de ses positions; et comme le plan tangent en M contient toujours MS, il passe constamment par le point fixe, S.

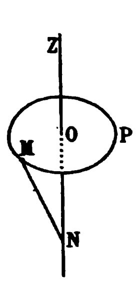
332. **Cône circonscrit le long d'un parallèle.** — Quand le point M parcourt le parallèle P, la droite MS engendre un cône de révolution autour de OZ et de sommet S. Le parallèle P est un parallèle commun à ce cône et à la surface de révolution. De plus, en chaque point M du parallèle, le cône et la surface ont le même plan tangent; car le plan tangent en M à chacune de ces surfaces est le plan mené par MS perpendiculairement au plan du méridien qui passe par M. Pour cette raison, le cône considéré s'appelle le *cône circonscrit* à la surface le long du parallèle P. A chaque parallèle de la surface correspond ainsi un cône circonscrit qui dégénère, bien entendu, en un cylindre circonscrit si le point S est à l'infini dans la direction de l'axe, et en un plan si MS est perpendiculaire à l'axe.

333. **Cône asymptote.** — Si la surface de révolution est d'une nature telle que le parallèle P puisse s'éloigner indéfiniment, le cône circonscrit le long de ce parallèle prend le nom de *cône asymptote*.

Il ne peut évidemment exister de cône asymptote que si la méridienne MB a un point à l'infini, c'est-à-dire est à branches infinies. D'ailleurs, si le point M est à l'infini sur la méridienne MB, la tangente MS à cette méridienne devient la tangente en un point à l'infini, c'est-à-dire une asymptote, et le cône asymptote est engendré par la révolution de cette droite autour de l'axe; de sorte que si le point M est à l'infini sur une branche parabolique de la méridienne, il n'y a pas de cône asymptote. Enfin, il y a autant de cônes asymptotes proprement dits ou dégénérés que d'asymptotes de la méridienne..

334. **Théorème.** — *Si un point décrit un parallèle d'une surface de révolution, la normale en ce point passe par un point fixe situé sur l'axe.*

En effet, le plan tangent en un point M d'une surface de révolution étant perpendiculaire au plan du méridien qui passe par ce point, la normale en M est située dans le plan du méridien; elle rencontre donc l'axe en un point N. Si l'on fait tourner le méridien autour de l'axe, le point M décrit un parallèle P et la normale MN coïncide successivement avec les normales aux divers points de ce parallèle; comme le point N reste fixe pendant la rotation, la proposition est démontrée.



335. **Cône des normales.** — Il suit de là que si le point M décrit un parallèle P, la normale MN engendre un cône de révolution ayant pour sommet le point N. Ce cône s'appelle le *cône des normales*. En tout point M du parallèle P le plan tangent à la surface est perpendiculaire à la génératrice correspondante du cône des normales.

336. **Sphère inscrite le long d'un parallèle.** — Considérons, d'après cela, la sphère qui a pour centre le point N et dont le rayon est égal à MN. Cette sphère passe par le parallèle P; de plus en chaque point M du parallèle le plan tangent à la sphère étant perpendiculaire au rayon MN coïncide avec le plan tangent à la surface de révolution.

Pour cette raison, la sphère considérée s'appelle la sphère *inscrite* le long du parallèle P.

Le cône circonscrit le long d'un parallèle et la sphère inscrite le long du même parallèle peuvent être substitués à la surface pour la résolution de certains problèmes sur les plans tangents aux surfaces de révolution. On en verra de nombreux exemples dans la suite.

337. **Détermination du plan tangent en un point.** — En général on détermine le plan tangent en un point quelconque d'une surface de révolution par la tangente au parallèle de ce point et par le sommet du cône circonscrit le long de ce parallèle. D'ailleurs, pour obtenir le sommet de ce cône, il suffit de prendre l'intersection de l'axe avec le plan tangent en un point particulier du parallèle (332). Par exemple, si la génératrice est donnée par ses projections, on peut prendre l'intersection de l'axe avec le plan tangent au point de rencontre du parallèle et de la génératrice, plan tangent qui est déterminé par la tangente à la génératrice et par la tangente au parallèle. Si l'on donne la méridienne de la surface, le sommet du cône circonscrit s'obtient plus simplement encore : il suffit de prendre le point de rencontre de l'axe avec la tangente à la méridienne menée au point où elle est rencontrée par le parallèle.

Enfin, dans certains cas, il y a avantage à construire d'abord la normale et à mener ensuite par le point considéré le plan perpendiculaire à cette droite : tel est, par exemple, le cas de la sphère. Ajoutons que pour avoir la normale en un point il suffit de joindre ce point au sommet du cône des normales relatif au parallèle de ce point. Enfin, pour obtenir le sommet de ce cône, il suffit de mener par un point quelconque du parallèle correspondant le plan perpendiculaire à une droite située dans le plan tangent en ce point, *pourvu que cette tangente ne soit pas la tangente au parallèle.* On prendra, par exemple, le point de rencontre du parallèle avec la génératrice et, par ce point, on mènera le plan perpendiculaire à la tangente en ce même point à la génératrice : le point de rencontre de ce plan avec l'axe de révolution sera le sommet du cône des normales relatif au parallèle considéré. Si la génératrice est la méridienne, il suffit de mener la normale à cette méridienne au point où elle est rencontrée par le parallèle.

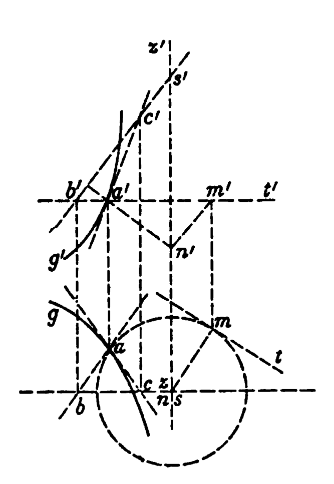
Ces divers modes de détermination du plan tangent conviennent à toutes les surfaces de révolution. Toutefois, quand la surface est une

surface gauche de révolution, il peut être préférable de déterminer le plan tangent en un point au moyen des deux génératrices rectilignes qui passent par ce point (287).

Nous allons traiter maintenant quelques exemples.

338. **Exemple I.** — *Déterminer le plan tangent en un point d'une surface de révolution à axe vertical ou de bout connaissant les projections de la génératrice.*

Supposons, par exemple, l'axe (sz, $s'z'$) vertical et soit (g, g') la génératrice de la surface. Considérons le parallèle décrit par le point (a, a') de la génératrice, et proposons-nous de déterminer le plan tangent en un point quelconque (m, m') de ce parallèle. Pour cela, remarquons que le plan tangent à la surface au point (a, a') est déterminé par la tangente (ab, $a'b'$) au parallèle de ce point et par la tangente (ac, $a'c'$) à la génératrice. Le plan de front passant par l'axe coupe ce plan tangent suivant la droite (bc, $b'c'$) qui rencontre l'axe au point (s, s'). Le point (s, s') est le sommet du cône circonscrit le long du parallèle du point (a, a'); par suite, le plan tangent au point (m, m') est déterminé : 1° par le point (s, s'); 2° par la tangente (mt, $m't'$) au parallèle de ce point.

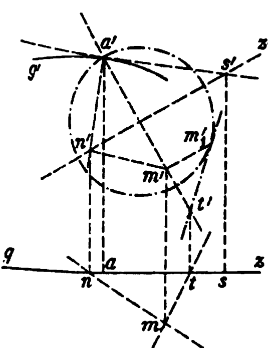


La normale au point (a, a') est projetée verticalement suivant la perpendiculaire $a'n'$ à $b'c'$, puisque $b'c'$ est une ligne de front du plan tangent. Elle rencontre l'axe au point (n, n'); donc (mn, $m'n'$) est la normale au point (m, m').

339. **Exemple II.** — *Déterminer le plan tangent en un point d'une surface de révolution à axe horizontal ou de front, connaissant les projections de la méridienne principale.*

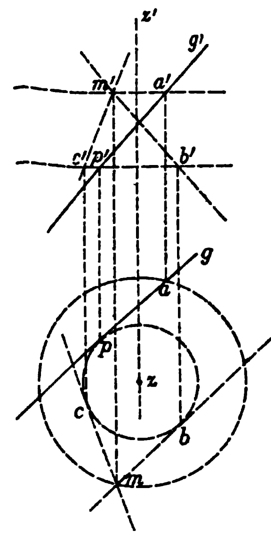
Supposons, par exemple, l'axe (nz, $n'z'$) de front et soit (g, g') la

méridienne principale. Soit (m, m') un point de la surface situé sur le parallèle du point (a, a') de la méridienne, parallèle qui a été rabattu sur le plan de front de l'axe. La tangente en (a, a') à la méridienne est projetée verticalement suivant la tangente $a's'$ à g' et rencontre l'axe au point (s, s'). La tangente en (m, m') au parallèle est rabattue en m_1t' et projetée en $(mt, m't')$. Il en résulte que le plan tangent au point (m, m') est déterminé par cette tangente et par le point (s, s').



La normale au point (a, a') est projetée verticalement suivant la normale $a'n'$ à g' et rencontre l'axe au point (n, n') ; il en résulte que la normale au point (m, m') est $(mn, m'n')$.

340. Exemple III. — *Déterminer le plan tangent en un point d'une surface gauche de révolution à axe vertical.*

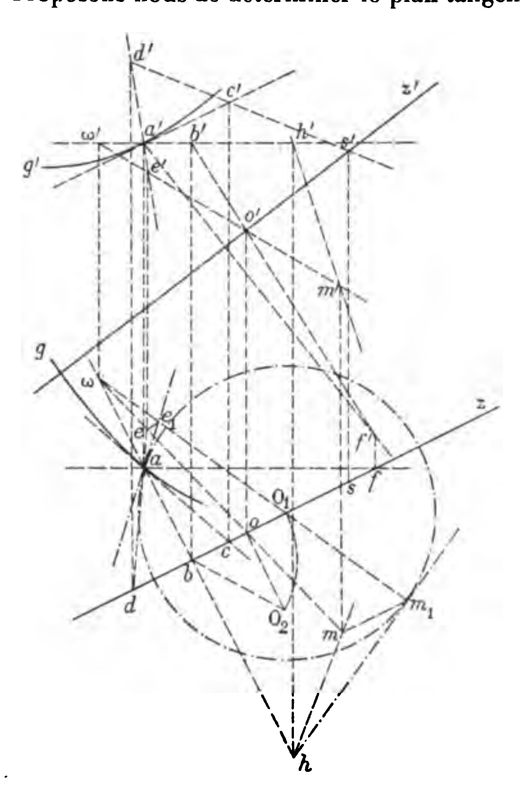


Soient (z, z') l'axe de la surface et (g, g') une génératrice. Considérons le parallèle d'un point (a, a') de cette droite et proposons-nous de déterminer le plan tangent à la surface en un point quelconque (m, m') de ce parallèle.

Il suffit, pour cela, de construire les projections des génératrices qui passent par le point (m, m'). Ces génératrices sont projetées horizontalement suivant les tangentes mb, mc à la projection horizontale du cercle de gorge. Elles rencontrent le cercle de gorge en des points dont on a les projections horizontales b et c, et dont on déduit, par suite, les projections verticales b' et c'. Il en résulte que les projections des deux génératrices cherchées sont $(mb, m'b')$ et $(mc, m'c')$.

341. Exemple IV. — *Déterminer le plan tangent en un point d'une surface de révolution à axe quelconque connaissant les projections de la génératrice.*

Soit (z, z') l'axe d'une surface de révolution engendrée par (g, g'). Proposons-nous de déterminer le plan tangent en un point (m, m') de la surface. Pour trouver les projections du point (m, m'), prenons le parallèle d'un point (a, a') de la génératrice et rabattons ce parallèle autour de l'horizontale $(ah, a'h')$ de son plan sur le plan horizontal passant par cette droite. Le centre (o, o') du parallèle, intersection de l'axe et du plan perpendiculaire à l'axe mené par (a, a'), est rabattu en O_1 ; le parallèle est donc rabattu suivant la circonférence décrite du point O_1 comme centre avec la distance du point O_1 au point a comme rayon. Prenant alors un point m_1 de cette circonférence et relevant la droite O_1m_1 qui rencontre la charnière en (ω, ω'), on a en (m, m') un point de la surface.



Pour avoir le plan tangent en (m, m'), il suffit d'avoir la tangente au parallèle en ce point et le sommet du cône circonscrit le long de ce parallèle. La tangente est rabattue en m_1h ; par suite, elle est projetée en mh et en $m'h'$.

Quant au sommet du cône, il est à l'intersection de l'axe et du plan tangent au point (a, a'). Ce plan tangent est déterminé par la tangente $(ac, a'c')$ à la génératrice et par la tangente $(ae, a'e')$ au parallèle, tangente dont les projections ont été construites en partant du rabattement ae_1.

Enfin, le plan vertical mené par l'axe coupe le plan tangent en

(a, a') suivant la droite $(dc, d'c')$ qui rencontre l'axe au point (s, s'), sommet du cône circonscrit le long du parallèle.

En résumé, le plan tangent est déterminé par le point (s, s') et par la droite $(mh, m'h')$.

342. **Détermination de certains éléments remarquables d'une méridienne d'une surface de révolution.** — Quand on sait déterminer le plan tangent en un point d'une surface de révolution à axe quelconque, on sait construire, par cela même, la tangente en ce point à la méridienne qui y passe : il suffit, pour cela, de joindre ce point au point de rencontre du plan tangent avec l'axe.

Lorsque la méridienne est dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, la projection, sur ce plan, de la tangente en un quelconque de ses points, coïncide évidemment avec la trace de même nom du plan tangent à la surface au point considéré ; car le plan tangent en ce point contient la tangente à la méridienne et est perpendiculaire au plan de cette méridienne, c'est-à-dire au plan de projection auquel celui de la méridienne est parallèle. En particulier, si la surface est une surface gauche de révolution à axe horizontal ou de front, la tangente en un point de la méridienne principale coïncide avec la projection, sur le plan de projection qui est parallèle à celui de la méridienne, des deux génératrices rectilignes qui passent par le point considéré.

Cela posé, supposons qu'une surface de révolution à axe quelconque soit engendrée par une ligne quelconque et proposons-nous de déterminer les éléments remarquables d'une méridienne. On appelle ainsi : 1° les points doubles de la méridienne ; 2° les points à l'infini ; 3° les points de rencontre de la génératrice avec le plan de cette méridienne ; 4° les points où la tangente est perpendiculaire à l'axe ; 5° les points où la tangente est parallèle à l'axe ; 6° les tangentes en ces points.

1° *Tangentes aux points doubles.* — Nous avons vu plus haut (275) qu'il y a deux espèces de points doubles sur une méridienne : les points doubles proprement dits et les points de rencontre de la méridienne et de l'axe de révolution ; on appelle ces derniers points des *sommets*.

La construction des tangentes en un point double proprement dit ne diffère pas de la construction de la tangente en un point ordinaire de la méridienne. La seule différence consiste en ce qu'il y a deux cônes

circonscrits le long du parallèle double, ce qui fournit les deux tangentes demandées.

Si le point double est un sommet, le lieu des tangentes à la surface en ce point est un cône de révolution autour de l'axe et ayant pour sommet ce même point. Les tangentes à la méridienne sont alors les génératrices déterminées dans ce cône par le plan de la méridienne. D'ailleurs un sommet est aussi un point de rencontre de la génératrice et de l'axe; de sorte que le cône des tangentes est engendré par la révolution, autour de l'axe, de la tangente en ce point à la génératrice.

2° *Asymptotes de la méridienne.* — Un point de la méridienne ne peut être à l'infini que si le point de la génératrice situé sur le même parallèle est lui-même à l'infini. Supposons alors que la génératrice ait un point à l'infini, et voyons comment on pourra déterminer le sommet du cône circonscrit le long du parallèle de ce point. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le point est à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe, ou il est à l'infini dans une direction quelconque. Dans le premier cas, le plan tangent est lui-même perpendiculaire à l'axe et contient la tangente à la génératrice au point à l'infini considéré, s'il y en a une. Le cône circonscrit se réduit alors à ce plan tangent, et la détermination du sommet de ce cône est évidente : c'est le point de rencontre de l'axe et du plan perpendiculaire à l'axe mené par l'asymptote à la branche de la génératrice qui passe par le point à l'infini considéré. L'intersection de ce plan et du plan du méridien donne l'asymptote correspondante de la méridienne.

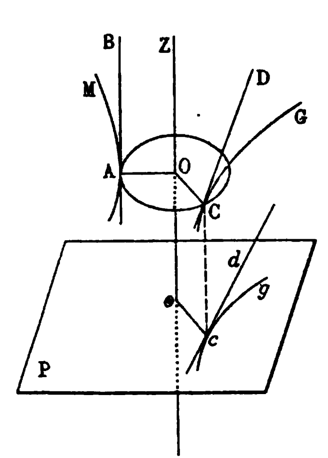
Dans le deuxième cas, si l'on appelle M le point à l'infini sur la génératrice, le plan tangent en M est perpendiculaire au plan du méridien du point M et contient la tangente en M à la génératrice, c'est-à-dire l'asymptote de cette génératrice. Ce plan tangent à distance finie ou infinie coupe l'axe en un point à distance finie ou infinie qui est le sommet du cône circonscrit le long du parallèle du point M. En joignant ce sommet aux points de rencontre du parallèle du point M avec le plan de la méridienne, on aura les asymptotes à distance finie ou infinie de cette méridienne. On a vu d'ailleurs (276) comment on détermine les points de rencontre du plan méridien avec le parallèle du point M.

3° *Tangentes à la méridienne aux points où elle est rencontrée par*

la génératrice. — Appelons A l'un quelconque de ces points. La tangente en A à la méridienne est l'intersection du plan tangent en A et du plan du méridien de ce point. Ce plan tangent est perpendiculaire au plan du méridien et contient la tangente en A à la génératrice. La tangente en A à la méridienne est donc la projection, sur le plan de cette méridienne, de la tangente en A à la génératrice.

4° *Points où la tangente à la méridienne est perpendiculaire à l'axe.* — Appelons encore A l'un quelconque de ces points. Le plan tangent en A est alors lui-même perpendiculaire à l'axe et contient par suite le parallèle du point A. Ce parallèle rencontre la génératrice en un point B où le plan tangent est aussi perpendiculaire à l'axe puisque ce plan est le cône circonscrit dégénéré; dès lors la tangente en B à la génératrice est perpendiculaire à l'axe. Ainsi, les points de la méridienne en lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe sont situés sur les parallèles des points de la génératrice en lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe. On ne pourra déterminer les premiers que si l'on sait déterminer les seconds.

5° *Points de la méridienne en lesquels la tangente est parallèle à l'axe.* — Soit A un point d'une méridienne AM en lequel la tangente AB est parallèle à l'axe OZ. Si l'on mène à la méridienne la normale en A située dans le même plan que la méridienne, le point O où cette normale rencontre OZ est le sommet du cône des normales relatif au parallèle du point A; de sorte que si ce parallèle rencontre au point C la génératrice G de la surface, OC est la normale à la surface au point C. Or, le plan tangent au point C est perpendiculaire à OC; donc il est parallèle à OZ, et le point C est aussi défini par la condition que le plan tangent en ce point à la surface est parallèle à l'axe.



Une fois le point C déterminé, on en déduit facilement le point A.

Soit CD la tangente en C à la génératrice. Si l'on projette sur un plan P perpendiculaire à l'axe et rencontrant celui-ci en o, l'angle droit OCD se projette suivant un angle droit ocd; par suite le point c,

projection du point C, est le point d'incidence d'une des normales menées par le point o à la projection g de la génératrice G. La réciproque étant évidemment vraie, on voit que la détermination des points C se ramène à celle des points c. Donc, en résumé, on mènera les normales à g par le point o, ce qui fera connaître les points c, par suite les parallèles qui passent par les points cherchés, et finalement ces points eux-mêmes.

En particulier, si G est une droite, le point C est le pied de la perpendiculaire commune à l'axe et à cette droite.

§ II. — *Plans tangents passant par un point donné; cônes circonscrits aux surfaces de révolution.*

343. **Problème.** — ***Mener à une surface de révolution les plans tangents qui passent par un point donné à distance finie.***

Le problème ainsi posé est indéterminé : on peut en effet mener par le point donné une infinité de plans tangents enveloppant le cône circonscrit à la surface par ce point. Pour déterminer le problème, il suffit d'assujettir le plan tangent à une autre condition. On peut l'assujettir, par exemple, à avoir son point de contact soit sur un parallèle donné, soit sur un méridien donné. Ce sont là les conditions en général les plus simples auxquelles on puisse assujettir les plans tangents assujettis déjà à passer par un point donné; mais il peut y en avoir d'autres. Par exemple si la surface est une surface gauche de révolution, on peut assujettir le point de contact à être sur une génératrice donnée. Quoi qu'il en soit, nous allons indiquer les solutions de quelques-uns de ces problèmes.

344. **Problème.** — ***Mener à une surface de révolution un plan tangent passant par un point donné et ayant son point de contact sur un parallèle donné.***

Pour résoudre ce problème, on substitue à la surface le cône circonscrit le long du parallèle considéré et l'on mène par le point donné les plans tangents à ce cône. Ces plans tangents sont les plans tangents demandés et leurs points de contact respectifs sont les points où ils touchent le parallèle donné. D'ailleurs, si l'on se reporte au numéro 290, pour mener par le point donné les plans tangents au cône

circonscrit, on joint ce point au sommet du cône et, par la trace de cette droite sur le plan de base du cône, on mène les tangentes à cette base. En d'autres termes, on mène les plans tangents au cône circonscrit par la droite qui joint le sommet de ce cône au point donné. Il suit de là qu'il y aura, 0, 1 ou 2 solutions suivant que cette droite est intérieure au cône circonscrit, sur la surface de ce cône, ou extérieure à cette surface.

En tous cas, la seule difficulté du problème réside dans la détermination du sommet du cône circonscrit le long du parallèle considéré, et ce problème a été résolu dans tous les cas (337).

Au lieu de substituer à la surface le cône circonscrit le long du parallèle donné, on peut encore lui substituer la sphère inscrite le long de ce parallèle. Dans ce cas on construit la courbe de contact du cône circonscrit à cette sphère par le point donné, et l'on prend les points de rencontre de cette courbe avec le parallèle donné ; ces points sont évidemment les points de contact des plans tangents cherchés et, une fois qu'ils ont été déterminés, le problème est ramené à un autre déjà résolu : mener le plan tangent en un point de la surface.

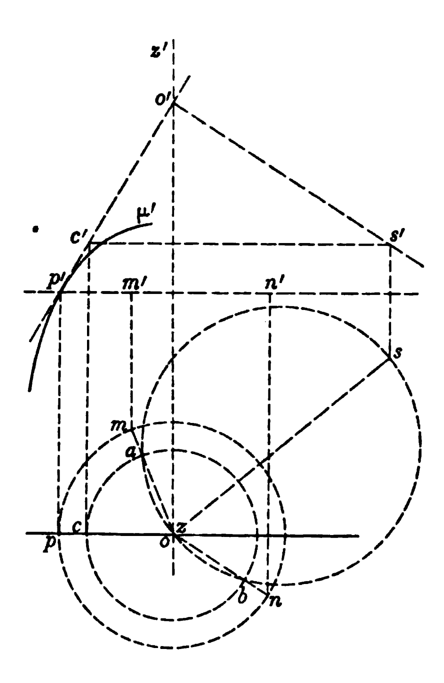
Ajoutons que l'emploi de la sphère inscrite peut n'être réellement avantageux que si le méridien qui passe par le point donné est horizontal ou de front.

Traitons quelques exemples.

345. **Exemple I.** — *Mener à une surface de révolution à axe vertical définie par sa méridienne principale, les plans tangents qui passent par un point donné et qui ont leurs points de contact sur un parallèle donné.*

Soient $(oz, o'z')$ l'axe de la surface, μ' la projection verticale de la méridienne principale et (s, s') le point donné. Considérons le parallèle du point (p, p') et proposons-nous de mener à la surface, par le point (s, s'), les plans tangents dont les points de contact sont sur le parallèle du point (p, p'). Le sommet du cône circonscrit à la surface le long de ce parallèle est le point de rencontre (o, o') de l'axe et de la tangente à la méridienne au point (p, p'). Prenons comme base de ce cône la section obtenue en le coupant par le plan horizontal du point (s, s') : cette section est une circonférence projetée horizontalement suivant la circonférence de centre o et de rayon oc. Les tangentes menées à cette circonférence par le point (s, s') sont projetées

horizontalement suivant les tangentes menées du point *s* à la circonférence *oc* ; leurs points de contact sont donc projetés horizontalement aux points de rencontre de la circonférence *oc* et de la circonférence décrite sur *os* comme diamètre. Si *a* et *b* sont ces derniers points, *oa*



et *ob* sont les projections horizontales des génératrices de contact des plans tangents cherchés et du cône circonscrit. Il en résulte que (*m*, *m'*) et (*n*, *n'*) sont les points de contact de ces plans tangents eux-mêmes.

Le problème admet 2, 1 ou 0 solutions suivant que *s* est extérieur à la circonférenée *oc*, sur cette circonférence ou intérieur à cette ligne.

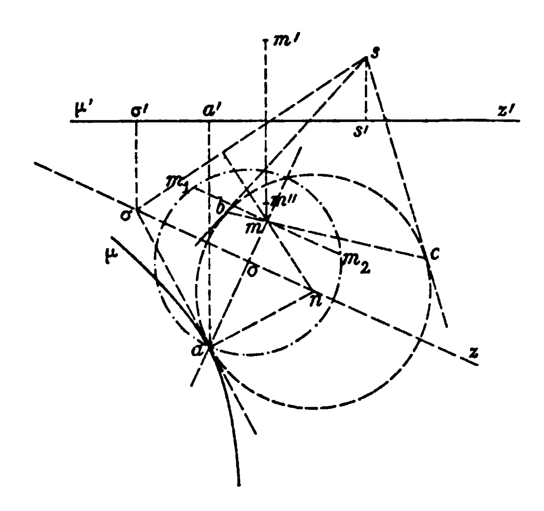
Remarquons d'ailleurs qu'il n'est pas indispensable de supposer connue la méridienne principale, qui n'intervient dans la solution que pour faciliter la construction du point (*o*, *o'*).

346. **Exemple II.** — *Une surface de révolution à axe horizontal étant définie par son axe et par sa méridienne principale, mener à cette surface les plans tangents passant par un point donné dans le plan du méridien principal et ayant leurs points de contact sur un parallèle donné.*

Nous allons employer la méthode de la sphère inscrite.

Alors la méridienne principale n'intervient que pour simplifier la construction du centre de cette sphère, comme on va le voir.

Soient, en effet, (z, z') l'axe de la surface, (μ, μ') la méridienne principale, (s, s') le point donné et oa la projection horizontale du parallèle donné. En menant la normale en a à la projection horizontale μ de la méridienne, on a en n la projection horizontale du centre de la



sphère inscrite le long du parallèle. On en déduit le contour apparent de cette sphère sur le plan horizontal. Comme le point (s, s') est dans le plan horizontal du centre de la sphère, en menant du point s les tangentes au contour apparent horizontal de cette sphère, on obtient en bc la trace horizontale du plan de la courbe de contact du cône qui lui est circonscrit par le point (s, s'). Le point de rencontre m de bc et de oa est ainsi la projection horizontale des points de contact des plans tangents demandés (344). Pour en avoir les projections verticales m' et m'', il suffit d'en avoir les cotes au-dessus du plan horizontal de l'axe. Ces cotes ont été obtenues en rabattant le parallèle oa et les points de contact sur le plan horizontal de l'axe ; on a obtenu ainsi les points m_1 et m_2, et, par suite, les projections verticales cherchées m' et m''.

En combinant cette méthode avec celle du cône circonscrit, on peut

se dispenser de tracer la circonférence de rayon *na* et la droite *bc*. Soit en effet (σ, σ') le sommet du cône circonscrit le long du parallèle *oa*. Les plans tangents demandés passent par la ligne (σs, $\sigma' s'$), qui est horizontale. Leurs points de contact sont donc sur le plan perpendiculaire à cette ligne mené par le centre de la sphère inscrite. Or, ce plan est vertical et sa trace horizontale n'est autre chose que la perpendiculaire à $s\sigma$ menée par le point *n*. Cette trace horizontale contenant le point *m* détermine ce point, et l'on achève comme plus haut.

347. **Problème.** — *Mener à une surface de révolution un plan tangent passant par un point donné et ayant son point de contact sur un méridien donné.*

Pour résoudre ce problème, on substitue à la surface de révolution le cylindre circonscrit le long du méridien donné, et l'on mène par le point donné les plans tangents à ce cylindre. Pour cela, on mène par le point donné (**291**) la perpendiculaire au plan du méridien donné, et par la trace de cette droite sur ce plan, on mène les tangentes au méridien : les points de contact de ces tangentes sont les points de contact des plans tangents demandés, et il n'y a plus qu'à mener le plan tangent en chacun de ces points.

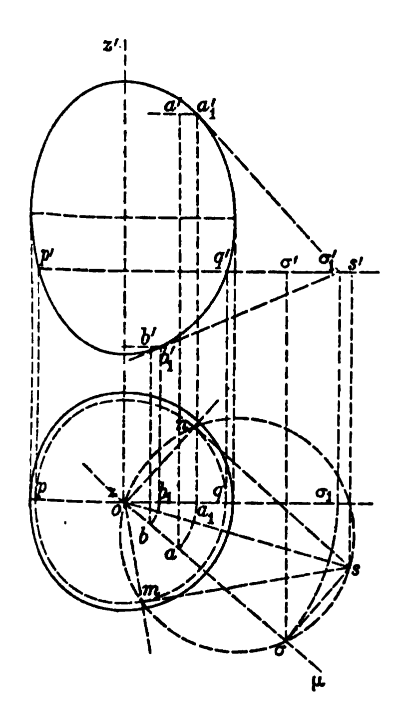
Il est bon d'observer que la solution suppose essentiellement que l'on connaisse la méridienne de la surface de révolution. D'ailleurs, pour que le problème soit possible, il faut que l'on puisse, du point donné, mener des plans tangents au cylindre circonscrit le long du méridien donné.

348. **Cas d'une surface gauche de révolution.** — Quand la surface est une surface gauche de révolution, on peut résoudre ce problème sans tracer la méridienne. Soient en effet S le point donné et P le plan du méridien donné. Si l'on mène du point S la perpendiculaire Δ au plan P, les plans tangents demandés sont les plans tangents à la surface gauche de révolution menés par Δ. Comme on le verra (**379**), ce problème se ramène à celui de la détermination des points de rencontre de la surface avec la droite Δ, et, pour traiter ce dernier problème, il est inutile de tracer la méridienne, ainsi qu'on le montrera plus loin.

349. **Exemple.** — *Étant donné un ellipsoïde de révolution à axe ver-*

tical, mener à cette surface un plan tangent passant par un point donné et ayant son point de contact sur un méridien donné.

Soient (s, s') le point donné et $o\mu$ la trace horizontale du méridien donné. Si l'on mène du point (s, s') la perpendiculaire au plan de ce méridien, le pied de cette perpendiculaire est le point (σ, σ'), et il faut mener par ce point les tangentes à la méridienne située dans le plan $o\mu$. Pour cela, amenons ce plan à coïncider avec le plan du méridien principal par une rotation autour de l'axe de révolution. Le point (σ, σ') venant ainsi en (σ_1, σ'_1), les tangentes à la méridienne, après la rotation, sont projetées verticalement suivant les tangentes $\sigma'_1 a'_1$ et $\sigma'_1 b'_1$ à la méridienne principale ; de sorte que a'_1 et b'_1 sont les projections verticales des points de contact des plans tangents cherchés après la rotation. On en déduit les projections (a, a') et (b, b') des points eux-mêmes par une opération inverse.



Pour que le problème soit possible, il faut que le point (σ_1, σ'_1) soit extérieur à la méridienne principale ou, ce qui revient au même, que le point (σ, σ') soit extérieur au parallèle dont le plan passe par le point (s, s'). Ce parallèle est projeté horizontalement suivant la circonférence de diamètre pq, et si l'on observe que le point σ est sur la circonférence décrite sur os comme diamètre, puis que l'on prenne les points m et n où cette circonférence rencontre le parallèle pq, on voit que le problème n'est possible que si $o\mu$ est compris dans l'angle mon.

350. **Problème.** — *Mener à une surface gauche de révolution le plan tangent passant par un point donné et ayant son point de contact sur une génératrice donnée.*

On sait que tout plan passant par une génératrice d'un hyperboloïde est tangent à la surface en un point de cette génératrice. Il suit de là que la génératrice donnée et le point donné définissent le plan tangent cherché. Quant au point de contact de ce plan tangent, nous avons déjà appris à le déterminer (287).

351. **Courbe de contact d'un cône circonscrit à une surface de révolution.** — On détermine cette courbe par points en cherchant ses points de rencontre, soit avec les parallèles, soit avec les méridiens successifs de la surface. On est ainsi conduit à résoudre plusieurs fois deux problèmes déjà résolus (344 et 347).

Supposons d'abord que l'on cherche les points de rencontre avec les parallèles successifs; nous avons vu (344) qu'il y a en général sur chaque parallèle deux points de rencontre avec la courbe de contact. On appelle *parallèles limites* les parallèles pour lesquels ces deux points sont confondus. En chaque point fourni par un parallèle limite, la tangente à la courbe de contact est la même que la tangente au parallèle limite, puisque celle-ci est la limite d'une sécante joignant deux points de la courbe de contact. La tangente en chacun de ces points est donc perpendiculaire à l'axe de révolution. Si l'on se reporte d'ailleurs à l'exemple traité au nº 345, les deux points situés sur un parallèle sont confondus quand la droite $(so, s'o')$ est située sur le cône circonscrit le long de ce parallèle. Les génératrices de ce cône étant tangentes aux diverses méridiennes, on voit que les parallèles limites passent par les points de contact des tangentes menées, par le sommet du cône circonscrit par le point donné, à la méridienne dont le plan passe par ce point.

Supposons maintenant que l'on cherche les points situés sur les méridiens successifs. Si l'on se reporte alors à l'exemple traité au nº 349, on voit que les méridiens *limites*, s'il y en a, sont *om* et *on*, qu'on obtient évidemment d'après la règle suivante : On mène par le sommet du cône le plan perpendiculaire à l'axe et les tangentes aux parallèles obtenus, s'ils existent; les méridiens limites sont ceux qui passent par les points de contact de ces tangentes.

Traitons un exemple.

352. **Exemple.** — *Construire la courbe de contact du cône de sommet donné circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical.*

Soit (s, s') le sommet du cône circonscrit à l'ellipsoïde. Nous allons

déterminer successivement : 1° un point courant de la courbe de contact; 2° les points sur le contour apparent horizontal; 3° les points sur le contour apparent vertical; 4° les points sur les parallèles limites; 5° les points sur les méridiens limites. Les solutions de ces divers problèmes sont indépendantes de la nature de la surface de révolution, c'est-à-dire qu'elles sont applicables à toutes les surfaces de révolution autour d'un axe vertical. Profitant alors de ce que la surface étant ici du second degré, la courbe de contact est une courbe plane, nous déterminerons aussi la tangente en un point quelconque de cette courbe, ses axes et ses sommets.

Construction d'un point courant. — Cherchons par exemple un point situé sur le parallèle du point (a, a'). Remarquons, pour cela, que le cône circonscrit le long de ce parallèle coupe le plan horizontal mené par le point (s, s') suivant une circonférence dont la projection horizontale a pour centre le point o et pour rayon ob; car une génératrice de ce cône située dans le plan de front mené par l'axe $(oz, o'z')$ coupe le plan horizontal du point (s, s') au point (b, b'). Les points de contact des tangentes menées de s à la circonférence ob sont à l'intersection de cette circonférence et de celle qui est décrite sur os comme diamètre. Ces points sont symétriques par rapport à os, et si c est l'un d'eux, le point de rencontre m de σc avec le parallèle du point (a, a') est la projection horizontale d'un point courant; on en déduit la projection verticale m' par une ligne de rappel. Le second point de rencontre des deux circonférences ob et os donnerait un point dont la projection horizontale serait symétrique de m par rapport à os; d'où il suit que os est un axe de la projection horizontale de la courbe de contact, *quelle que soit d'ailleurs la surface de révolution*, pourvu qu'elle soit à axe vertical.

Il est bon d'observer que m doit être situé par rapport à σ et à c comme a' par rapport à σ' et à b'.

Points sur le contour apparent horizontal. — Ils sont projetés horizontalement aux points de contact des tangentes menées du point s au contour apparent de la surface sur le plan horizontal. Ce contour apparent est ici la projection horizontale du parallèle dont le plan passe par le centre de l'ellipsoïde, et les points de contact sont les points de rencontre e et f de ce parallèle avec la circonférence os; ils sont projetés verticalement en e' et en f'.

Points sur le contour apparent vertical. — Nous verrons que le

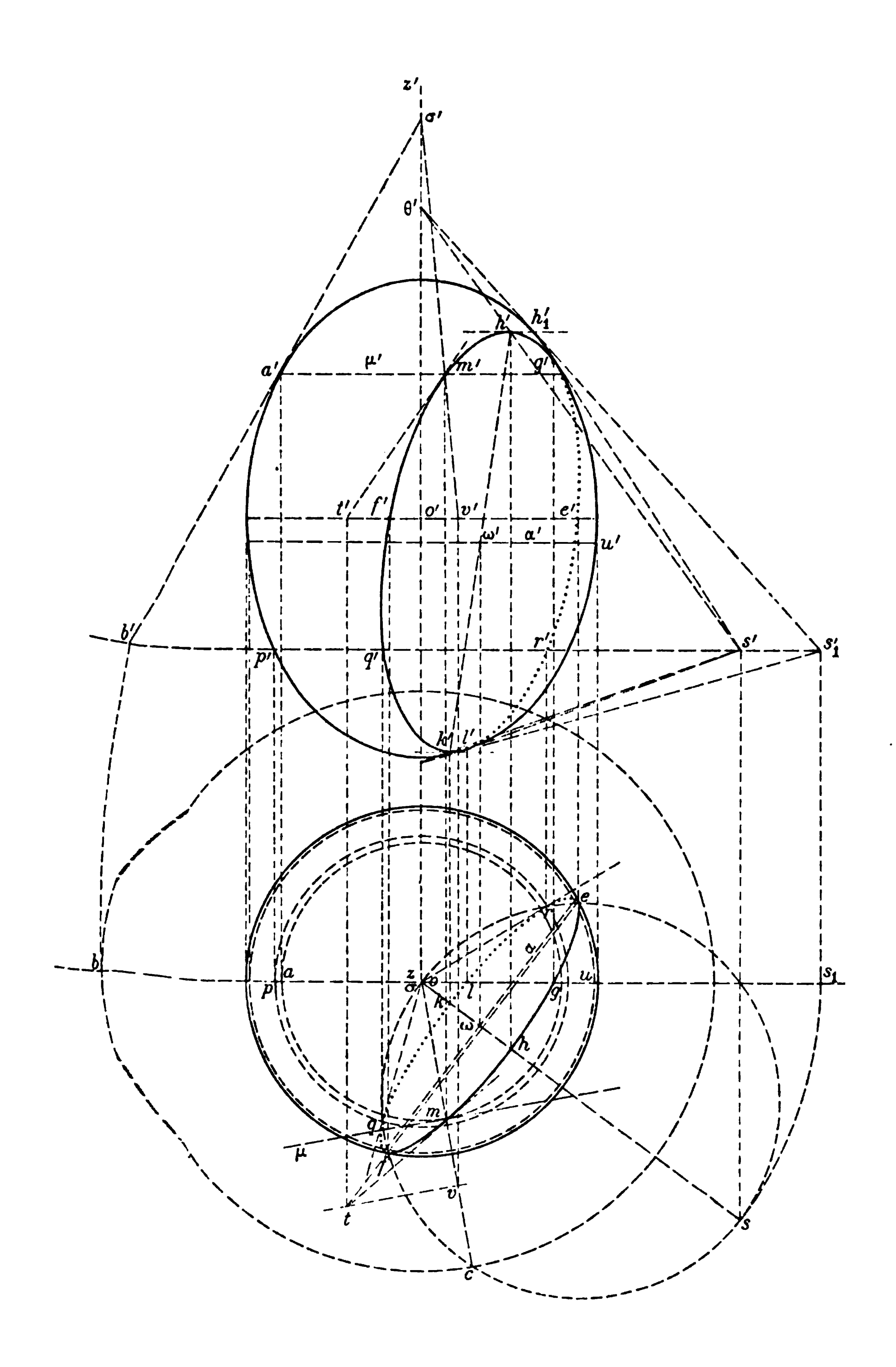
contour apparent, sur le plan vertical, d'une surface de révolution à axe vertical n'est autre chose que la projection verticale de la méridienne principale. En menant alors par le point s' les tangentes à cette projection verticale, on obtient en (l, l') et en (g, g') les points demandés.

Points sur les parallèles limites. — Pour obtenir ces points, il faut mener du point (s, s') les tangentes à la méridienne dont le plan passe par ce point. Faisons alors tourner le point (s, s') autour de l'axe jusqu'à ce qu'il vienne en (s_1, s'_1) dans le plan du méridien principal; puis menons du point s'_1 les tangentes à ce méridien. Si $s'_1h'_1$ est l'une d'elles, rencontrant l'axe en θ', la droite $s'\theta'$ est la projection verticale de l'une des tangentes menées par le point (s, s') à la méridienne dont le plan passe par ce point. Il en résulte que (h, h') est l'un des points cherchés. On détermine de même l'autre point (k, k').

Nous avons vu plus haut (351) qu'en chacun de ces points la tangente à la courbe de contact est confondue avec la tangente au parallèle limite correspondant. Donc, en chacun de ces points, la tangente est horizontale en projection verticale et perpendiculaire à os en projection horizontale.

Points sur les méridiens limites. — Le parallèle de la surface dont le plan passe par (s, s') est projeté horizontalement suivant la circonférence de rayon op. Les points de contact des tangentes menées du point s à cette circonférence sont les points de rencontre q et r de cette même circonférence et de la circonférence os ; donc les méridiens limites ont leurs traces horizontales en oq et en or. Les points situés sur ces méridiens sont (q, q') et (r, r'). Les tangentes aux points q et r à la projection horizontale sont nécessairement oq et or, car les tangentes aux points (q, q') et (r, r') à la courbe de contact sont les mêmes que les tangentes en ces mêmes points aux méridiens limites correspondants.

Tangente en un point courant. — C'est l'intersection du plan tangent en ce point avec le plan de la courbe de contact. Prenons par exemple le point (m, m'). Si l'on coupe le plan tangent en ce point et le plan de la courbe de contact par le plan horizontal du centre de l'ellipsoïde, on obtient deux droites dont les projections horizontales sont respectivement ef et vt, celle-ci parallèle à la tangente $m\mu$ à la projection horizontale du parallèle du point (m, m'). Le point (t, t') est


z′
σ′
θ′
h′
h′1
a′
μ′
m′
q′
t′
f′
o′
v′
e′
ω′
α′
u′
b′
p′
q′
r′
s′
s′1
k′
l′
e
b
p
a
z
σ
o
l
g
u
s1
k
ω
α
h
q
m
μ
t
v
s
c

évidemment un point de la tangente demandée, dont les projections sont par suite mt et $m't'$.

Axes et sommets de la courbe de contact. — La droite $(ef, e'f')$ est une horizontale du plan de la courbe de contact ; comme cette droite est perpendiculaire au plan vertical os, celui-ci est perpendiculaire au plan de la courbe de contact. Il en résulte que le plan du méridien qui passe par le point (s, s') est un plan de symétrie pour la courbe de contact, puisqu'il est perpendiculaire au plan de cette courbe et que de plus il est plan de symétrie pour la surface de révolution. L'intersection $(hk, h'k')$ du plan de ce méridien avec le plan de la courbe de contact est donc un axe de symétrie de celle-ci ; les sommets situés sur cet axe sont par suite (h, h') et (k, k'). Comme d'ailleurs os est un axe de symétrie de la projection horizontale, h et k sont deux sommets de cette projection.

Il reste à trouver le deuxième axe et les deux autres sommets de la courbe de contact. Nous observerons, pour cela, que le deuxième axe est perpendiculaire au premier et passe par le point (ω, ω') milieu de $(hk, h'k')$. Or, le premier axe étant perpendiculaire à l'horizontale $(ef, e'f')$ du plan de la courbe de contact est une ligne de plus grande pente de ce plan ; donc le second axe est horizontal et l'on a alors immédiatement ses projections $(\omega\alpha, \omega'\alpha')$. Les points de rencontre de cette droite avec la surface seront les deux autres sommets. On les obtient en prenant les points de rencontre de cette même droite avec le parallèle dont le plan passe par (ω, ω'). Les projections horizontales de ces points sont les deux autres sommets de la projection horizontale de la courbe de contact.

Ajoutons que, si au lieu d'un ellipsoïde de révolution, on avait une quadrique quelconque de révolution, le nombre des sommets ainsi déterminés permettrait de reconnaître si la courbe de contact est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Le problème suivant permettrait du reste d'arriver au même résultat.

353. **Problème.** — *Trouver les points à l'infini de la courbe de contact du cône de sommet donné circonscrit à une surface de révolution.*

Appelons S le sommet de ce cône et M un point à l'infini de la courbe de contact. Ce point à l'infini se trouvant sur un parallèle qui est à l'infini, le cône circonscrit le long de ce parallèle n'est autre qu'un cône asymptote. En se reportant alors au problème du n° **344**,

on voit que l'on obtiendra les points à l'infini de la courbe de contact en menant par le point S les plans tangents aux cônes asymptotes de la surface. Les génératrices de contact de ces plans tangents avec les cônes asymptotes correspondants donnent les directions des points à l'infini. Si la surface de révolution est du second degré, le nombre des points à l'infini fera connaitre la nature de la courbe de contact. On pourra même, dans ce cas, construire les asymptotes, s'il y en a. Il n'y a, pour cela, qu'à appliquer la construction de la tangente en un point donnée plus haut (352) ; car l'asymptote peut être considérée comme la tangente en un point à l'infini.

354. **Remarque sur les ombres.** — Rappelons, avant d'abandonner ce sujet, que les divers problèmes que nous venons de résoudre sont les mêmes que ceux qu'on aurait à résoudre si l'on voulait déterminer le contour de l'ombre propre d'une surface éclairée par un point lumineux.

§ III. — *Plans tangents parallèles à une direction donnée ; cylindres circonscrits aux surfaces de révolution.*

355. **Problème.** — *Mener à une surface de révolution les plans tangents parallèles à une direction donnée.*

Ce problème est un cas particulier de celui qui a été résolu au nº 343. Il s'en déduit en supposant que le point donné s'éloigne indéfiniment dans la direction donnée. Il est d'ailleurs indéterminé, et tous les plans tangents cherchés enveloppent le cylindre circonscrit parallèlement à cette direction. Pour le déterminer, on peut assujettir les plans tangents cherchés à avoir leurs points de contact, soit sur un parallèle donné, soit sur un méridien donné, soit sur une génératrice donnée quand la surface est une surface gauche de révolution.

356. **Problème.** — *Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une direction donnée et ayant son point de contact sur un parallèle donné.*

Comme dans le problème résolu au nº 344, on substitue à la surface le cône circonscrit le long du parallèle donné et l'on mène à ce cône les plans tangents parallèles à la direction donnée. Ces plans tangents

sont les plans tangents demandés, et leurs points de contact respectifs sont les points où ils touchent le parallèle donné.

Si, par le sommet du cône circonscrit le long du parallèle considéré, on mène la parallèle à la direction donnée, le problème admet 0, 1 ou 2 solutions suivant que cette parallèle est intérieure au cône, située sur ce cône ou extérieure à cette surface.

Au lieu de substituer à la surface le cône circonscrit le long du parallèle donné, on peut lui substituer la sphère inscrite le long de ce parallèle. Dans ce cas on construit la courbe de contact du cylindre circonscrit à cette sphère parallèlement à la direction donnée, et l'on détermine les points de rencontre du parallèle donné avec la courbe de contact de ce cylindre et de la sphère ; ces points sont les points de contact des plans tangents cherchés.

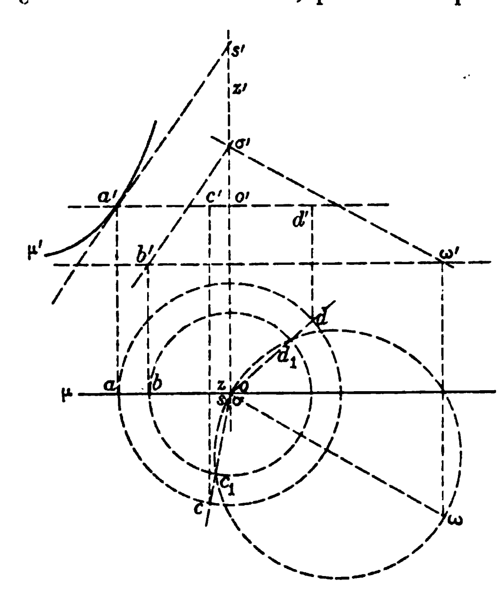
Il n'y a du reste, en général, avantage à employer la sphère inscrite que si le méridien parallèle à la direction donnée est horizontal ou de front.

357. **Exemple I.** — ***Mener à une surface de révolution à axe vertical définie par sa méridienne principale les plans tangents parallèles à une direction donnée et ayant leurs points de contact sur un parallèle donné.***

Soient (μ, μ') la méridienne principale et $(oa, o'a')$ le parallèle donné. En menant la tangente en a' à la projection verticale μ' de la méridienne principale, on a en s' la projection verticale du sommet du cône circonscrit le long du parallèle $(oa, o'a')$. Pour des raisons qui seront données ultérieurement, il y a avantage à substituer à ce cône un cône homothétique ayant pour sommet un point quelconque de l'axe. Les génératrices des deux cônes sont respectivement parallèles et, de plus, en vertu de ce que la ligne des sommets est verticale, les projections horizontales de deux génératrices parallèles sont confondues. On obtient donc une génératrice du cône (σ, σ') en menant $(\sigma b, \sigma' b')$ parallèle à $(sa, s'a')$, de sorte que si l'on coupe le cône (σ, σ') par un plan horizontal de trace verticale $b'\omega'$, la projection horizontale de la section est une circonférence de centre o et de rayon ob.

Cela posé, menons par (σ, σ') la parallèle $(\sigma\omega, \sigma'\omega')$ à la direction donnée, et, par cette parallèle, les plans tangents au cône (σ, σ'). Ces plans tangents sont parallèles à ceux que l'on cherche, de sorte que les projections horizontales de leurs génératrices de contact sont aussi

les projections horizontales des génératrices de contact des plans tangents cherchés. D'ailleurs, pour mener par $(\sigma\omega, \sigma'\omega')$ les plans tangents au cône (σ, σ'), on cherche la trace (ω, ω') de $(\sigma\omega, \sigma'\omega')$ sur le plan de base et, par le point ω, on mène les tangentes à la base. Les points de contact de ces tangentes sont les points de rencontre c_1 et d_1 de la circonférence ob et de la circonférence décrite sur $o\omega$ comme diamètre ; de sorte que oc_1 et od_1 sont les projections horizontales des génératrices de contact des plans tangents au cône (σ, σ') menés par $(\sigma\omega, \sigma'\omega')$ et par suite aussi des plans tangents cherchés. Elles rencontrent la circonférence oa aux points c et d, qui sont les projections horizontales des points de contact de ces plans tangents ; on en déduit les projections verticales c' et d' par des lignes de rappel.



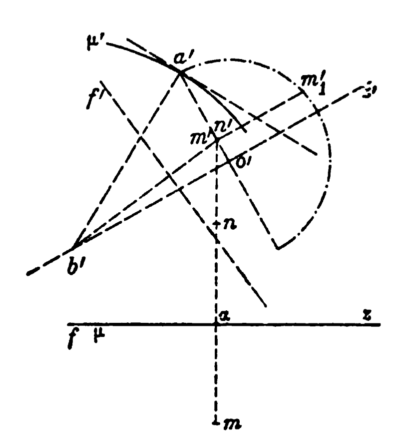
On voit maintenant pourquoi il y a avantage à substituer le cône (σ, σ') au cône (s, s') ; car : 1° le point (σ, σ') est toujours dans les limites du dessin ; 2° si l'on avait à résoudre plusieurs fois le même problème en faisant varier le parallèle, la circonférence $o\omega$ serait invariable.

Ajoutons que les points c et d sont, quel que soit le parallèle, symétriques par rapport à $o\omega$.

358. Exemple II. — *Une surface de révolution à axe de front est définie par son axe et par sa méridienne principale ; mener à cette surface les plans tangents ayant leurs points de contact sur un parallèle donné et parallèles à une ligne de front donnée.*

Soient (z, z') l'axe de révolution, (μ, μ') la méridienne, (f, f') la direction donnée et $o'a'$ la projection verticale du parallèle donné.

Nous allons nous servir ici de la sphère inscrite dont la projection verticale du centre est le point de rencontre b' de z' avec la normale en a' à la projection verticale de la méridienne principale. Comme la direction donnée (f, f') est de front, la courbe de contact de la sphère inscrite et du cylindre qui lui est circonscrit parallèlement à (f, f') est dans un plan de bout perpendiculaire à (f, f'). Ce plan passant par le centre de la sphère, a pour trace verticale la perpendiculaire à f' menée par le point b'. Il en résulte que le point m' où cette perpendiculaire rencontre $o'a'$ est la projection verticale des points de contact des plans tangents cherchés. Pour en obtenir les projections horizontales, il n'y a qu'à rabattre le parallèle sur le plan de front de l'axe. Un point du parallèle projeté en m' se rabat alors en m'_1, et, si l'on observe que les points sont symétriques par rapport au plan du méridien principal, on obtient les projections horizontales m et n des points de contact en prenant $\alpha m = \alpha n = m'm'_1$ sur la ligne de rappel du point m'.



359. **Problème.** — *Mener à une surface de révolution un plan tangent parallèle à une direction donnée et ayant son point de contact sur un méridien donné.*

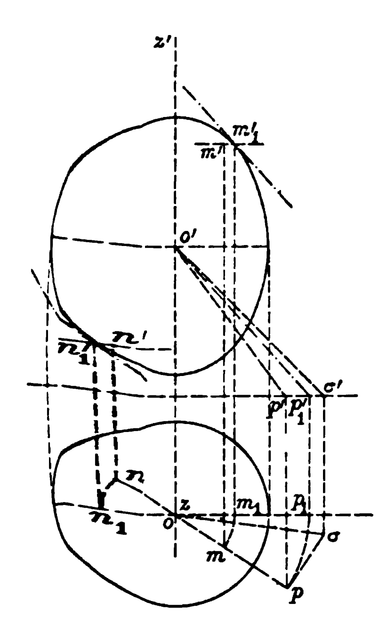
Comme pour le problème correspondant résolu plus haut (347), on substitue à la surface de révolution le cylindre circonscrit le long du méridien donné, et l'on mène à ce cylindre les plans tangents parallèles à la direction donnée. Pour cela, on mène par cette direction le plan perpendiculaire au plan du méridien donné et l'on prend la trace de ce plan sur le plan du méridien ; on mène ensuite à la méridienne les tangentes parallèles à cette trace : les points de contact de ces tangentes sont les points de contact des plans tangents demandés.

Cette solution suppose que l'on connaisse la méridienne de la surface de révolution, et l'on obtient sans difficulté les conditions de possibilité du problème.

360. Cas d'une surface gauche de révolution. — On peut encore résoudre ce problème sans tracer la méridienne quand la surface est une surface gauche de révolution. Appelons en effet D la direction donnée et P le plan du méridien donné. Si l'on mène, par un point quelconque de l'espace, la parallèle à la direction donnée et la perpendiculaire au plan P, les plans tangents cherchés sont parallèles au plan déterminé par ces deux droites. On est ainsi ramené à mener, à une surface gauche de révolution, les plans tangents parallèles à un plan donné. Ce problème sera résolu ultérieurement (381).

361. Exemple. — *Mener à une surface de révolution à axe vertical, définie par sa méridienne principale, les plans tangents parallèles à une direction donnée et ayant leurs points de contact sur un méridien donné.*

Soient ($o\sigma$, $o'\sigma'$) la direction donnée, que nous supposerons menée par un point de l'axe, et op la trace horizontale du méridien donné.



La trace, sur le plan de ce méridien, du plan qui lui est perpendiculaire et qui passe par ($o\sigma$, $o'\sigma'$) est (op, $o'p'$). Pour mener à la méridienne les tangentes parallèles à cette droite, amenons celle-ci à être dans le plan du méridien principal par une rotation autour de l'axe vertical (oz, $o'z'$), c'est-à-dire autour de l'axe de la surface. Les projections de (op, $o'p'$), après cette rotation, sont op_1 et $o'p'_1$, de sorte que si l'on mène à la méridienne les tangentes parallèles à $o'p'_1$ on obtient en m'_1 et en n'_1 les projections verticales des points de contact des plans tangents cherchés, après la rotation. Les projections horizontales étant en m_1 et en n_1 sur op_1, on en déduit les projections anciennes (m, m') et (n, n') par une opération inverse.

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que l'on puisse mener à la méridienne des tangentes parallèles à $o'p'_1$. Ici la méri-

dienne étant une ellipse, le problème est toujours possible et admet deux solutions.

362. **Problème.** — *Mener à une surface gauche de révolution le plan tangent parallèle à une direction donnée et ayant son point de contact sur une génératrice donnée.*

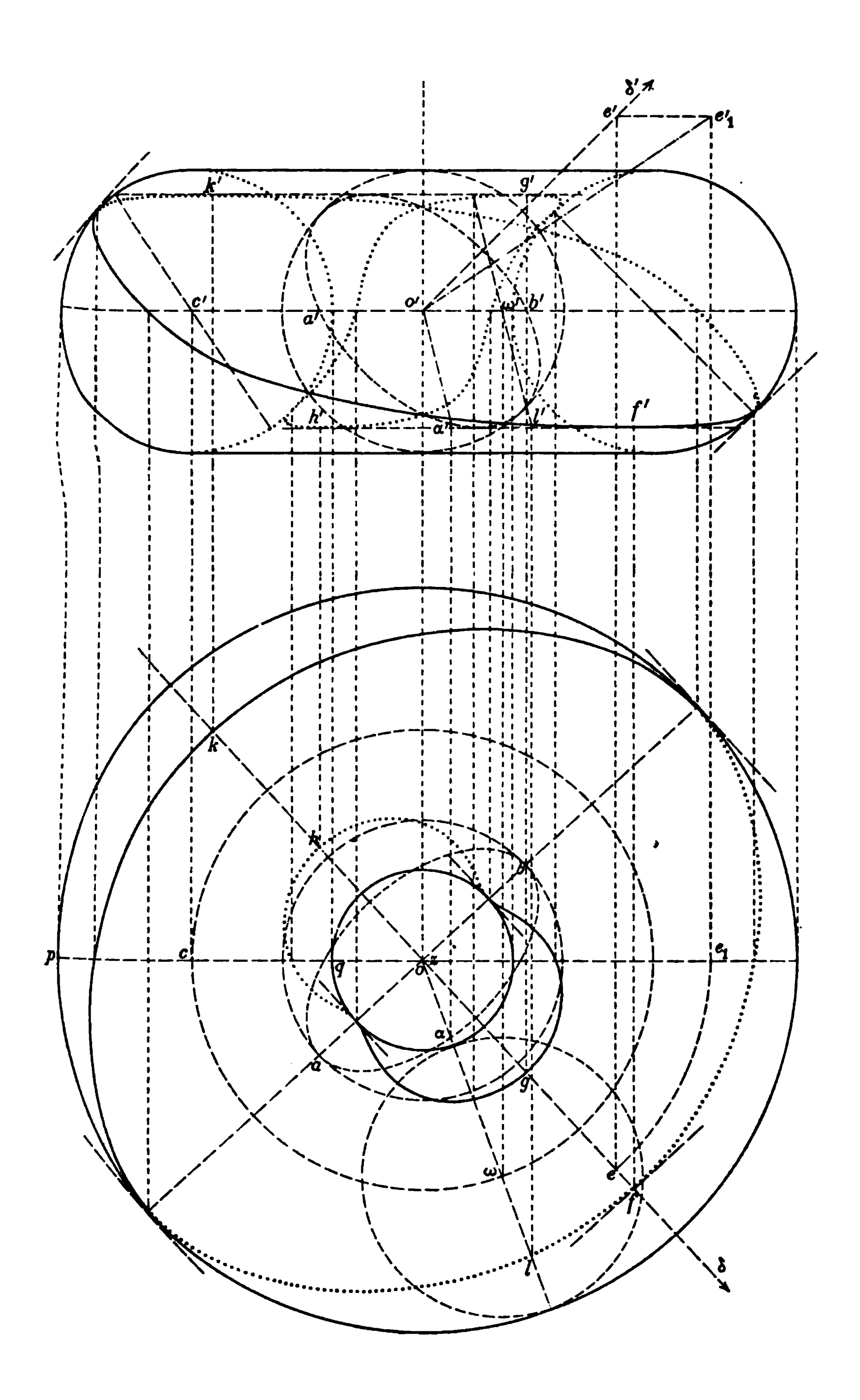
Le plan mené par cette génératrice parallèlement à la direction donnée est le plan tangent cherché. Quant à son point de contact, nous avons déjà appris à le déterminer (287).

363. **Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface de révolution.** — Comme pour le cône circonscrit (351), on détermine cette courbe par points en cherchant ses points de rencontre, soit avec les parallèles, soit avec les méridiens successifs de la surface ; ce qui conduit à résoudre plusieurs fois deux problèmes déjà résolus (356 et 359).

Supposons que l'on cherche les points de rencontre avec les parallèles successifs. Nous avons vu (356) qu'il y a en général deux points sur chaque parallèle ; on appelle alors *parallèles limites* ceux pour lesquels ces deux points sont confondus. En chaque point fourni par un parallèle limite la tangente à la courbe de contact est la même que la tangente au parallèle limite : on le voit comme pour le cône circonscrit (351). La tangente en chacun de ces points est donc perpendiculaire à l'axe de révolution. Si l'on se reporte d'ailleurs à ce qui a été dit dans le cas du cône (351), on voit que les parallèles limites passent par les points de contact des tangentes, menées parallèlement à la direction donnée, à la méridienne dont le plan est parallèle à cette direction ; car la direction donnée équivaut à un point donné mais donné à l'infini dans cette direction.

364. **Exemple.** — *Construire la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un tore à axe vertical.*

Comme pour la courbe de contact d'un cône circonscrit à un ellipsoïde (352), nous aurons à déterminer : 1° un point courant de la courbe de contact ; 2° les points sur le contour apparent horizontal ; 3° le points sur le contour apparent vertical ; 4° les points sur les parallèles limites (points où les tangentes sont horizontales). Il n'y a pas de méridiens limites.


δ'
e'
e'$_1$
k'
g'
c'
a'
o'
ω'
b'
h'
α'
l'
f'
k
h
g
p
c
q
o
e$_1$
α
a
g
ω
e
f
l
δ

Construction d'un point courant. — On peut construire un point soit au moyen d'un parallèle, soit au moyen d'un méridien. Nous emploierons de préférence ici la méthode du méridien et, au lieu de substituer à la surface le cylindre circonscrit le long de ce méridien (359), nous lui substituerons la sphère ayant pour grand cercle la demi-méridienne; car cette sphère est tangente à la surface tout le long de la demi-méridienne. Soient donc (c, c') le centre de la demi-méridienne principale et $o\omega$ la trace horizontale d'un demi-méridien. Le contour apparent sur le plan horizontal de la sphère inscrite le long de ce demi-méridien est une circonférence égale à la demi-méridienne principale ayant pour centre le point de rencontre de $o\omega$ avec la circonférence oc. Il faut circonscrire à cette sphère un cylindre parallèle à la direction donnée $(o\delta, o'\delta')$ et prendre les points de rencontre de la courbe de contact avec la demi-méridienne projetée horizontalement en $o\omega$. Or, si l'on imagine les sphères inscrites le long des demi-méridiennes successives, les courbes de contact de ces sphères avec les cylindres circonscrits parallèlement à $(o\delta, o'\delta')$ sont évidemment égales et homothétiques. Pour éviter la construction de toutes ces courbes de contact, nous remplacerons toutes ces sphères par une sphère égale ayant pour centre le point (o, o') et nous construirons la courbe de contact $(ab, a'b')$ de cette sphère avec le cylindre qui lui est circonscrit parallèlement à $(o\delta, o'\delta')$. Cette courbe de contact rencontre le plan vertical $o\omega$ en deux points dont l'un est projeté horizontalement en α; son plan n'est autre que le plan de la courbe de contact du cylindre circonscrit à la sphère auxiliaire de centre (ω, ω') après qu'on l'a transporté parallèlement à lui-même au point (o, o'). Si donc on porte $\omega l = o\alpha$, le point l sera la projection horizontale de l'un des points cherchés. Sa projection verticale l' se trouve sur la ligne de rappel du point l et sur la parallèle menée par ω' au rayon $o'\alpha'$ de l'ellipse $a'b'$ projeté horizontalement en $o\alpha$.

Si nous revenons maintenant au point l, nous voyons que l'égalité $\omega l = o\alpha$ entraîne $o\omega = \alpha l$; comme $o\omega$ est une longueur constante, nous en concluons que *la projection horizontale de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un tore à axe vertical est une conchoïde d'ellipse.* Cette remarque facilite la construction de tous les points de la courbe de contact.

Points sur le contour apparent horizontal. — On obtient leurs projections horizontales en menant au contour apparent du tore sur le

plan horizontal les tangentes parallèles à $o\delta$. Les projections verticales s'en déduisent par des lignes de rappel. Nous verrons d'ailleurs bientôt, et cela est du reste évident, que le contour apparent horizontal du tore se compose de deux cercles concentriques op et oq.

Points sur le contour apparent vertical. — On peut les obtenir, soit en menant au contour apparent sur le plan vertical les tangentes parallèles à $o'\delta'$, soit en cherchant, comme pour un point quelconque, les points situés sur le méridien principal.

Points sur les parallèles limites. — Ces points sont situés dans le plan du méridien dont la trace horizontale est $o\delta$; on peut donc les obtenir comme les points ordinaires au moyen de ce méridien. On peut encore les obtenir en menant à la méridienne $o\delta$ les tangentes parallèles à $(o\delta, o'\delta')$. Dans l'épure, pour mener ces tangentes, on a amené $(o\delta, o'\delta')$ dans le plan du méridien principal en $(oe_1, o'e_1)$; on a mené, ensuite, à la méridienne principale les tangentes parallèles à oe_1, puis on a effectué une opération inverse. On a obtenu ainsi les quatre points (f, f'), (g, g'), (h, h') et (k, k').

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, il suffit d'observer que (k, k') par exemple est vu en projection horizontale, caché en projection verticale; de même (g, g') est vu en projection horizontale et caché en projection verticale; (h, h') étant caché partout, on en conclut aisément la ponctuation indiquée sur l'épure.

Il est évident que les axes de l'ellipse ab sont des axes de symétrie de la projection horizontale, et que le point o' est centre de la projection verticale.

365. REMARQUE I. — Si la surface de révolution, au lieu d'être un tore, était une quadrique, la courbe de contact serait plane et l'on pourrait construire aisément la tangente en un point quelconque en procédant comme au n° 352. On pourrait aussi déterminer les axes et les sommets.

366. REMARQUE II. — Si la méridienne avait des branches infinies, il serait aisé de déterminer les points à l'infini de la courbe de contact. Pour cela, on mènerait aux cônes asymptotes les plans tangents parallèles à la direction donnée, et on achèverait ensuite comme pour la courbe de contact d'un cône circonscrit (353). Si de plus la surface était une quadrique, on pourrait aussi obtenir les asymptotes en considérant une asymptote comme la tangente en un point à l'infini.

367. **Remarque sur les ombres.** — Ajoutons que le problème de la détermination du contour de l'ombre propre d'une surface de révolution, quand le point lumineux est à l'infini dans une direction donnée (*ombre au soleil*), est un problème de cylindres circonscrits à ces surfaces, ainsi que cela a d'ailleurs déjà été remarqué (296).

368. **Problème.** — *Mener à une surface de révolution les plans tangents perpendiculaires à un plan donné.*

Cela revient évidemment à mener à la surface considérée les plans tangents parallèles à une droite perpendiculaire au plan donné, c'est-à-dire à une direction donnée. Le problème ainsi énoncé a donc été résolu (355).

369. Remarque. — C'est au problème dont nous venons d'indiquer la solution (368) que se ramène la détermination dont nous allons maintenant nous occuper des contours apparents des surfaces de révolution.

§ IV. — *Contours apparents d'une surface de révolution.*

370. **Rappel de la définition.** — Par définition, le contour apparent horizontal d'une surface de révolution est la courbe de contact du cylindre vertical circonscrit à la surface; la trace horizontale de ce cylindre est le contour apparent de la surface sur le plan horizontal.

Pareillement, le contour apparent vertical est la courbe de contact du cylindre de bout circonscrit à la surface, et la trace verticale de ce cylindre s'appelle le contour apparent sur le plan vertical. Le problème de la détermination des contours apparents d'une surface de révolution a donc été, en fait, déjà résolu (363). Nous nous bornerons actuellement à donner des exemples et nous examinerons trois cas.

371. **Premier cas.** — *Axe vertical ou de bout.*

Pour fixer les idées, supposons l'axe vertical et occupons-nous successivement de la détermination du contour apparent horizontal et du contour apparent vertical.

Contour apparent horizontal. — Il s'agit en somme de trouver le lieu des points de contact des plans tangents verticaux. Or, si le plan

tangent en un point est vertical, il rencontre l'axe à l'infini; mais alors les plans tangents en tous les points situés sur le même parallèle que le point considéré rencontrent aussi l'axe à l'infini et sont verticaux. Il suit de là que le contour apparent horizontal se compose de parallèles; par suite le contour apparent sur le plan horizontal est un système de circonférences concentriques, projections horizontales de ces parallèles.

D'ailleurs, si le plan tangent en un point est vertical, la normale en ce point est horizontale, par suite la tangente à la méridienne est verticale. Si l'on observe que le parallèle d'un point est déterminé quand on connaît ce point, on voit alors que la détermination du contour apparent horizontal se ramène à la détermination, déjà faite (342), des points de la méridienne en lesquels la tangente à cette ligne est verticale.

Contour apparent vertical. — En vertu de la propriété du plan tangent (328), tous les points de la méridienne principale appartiennent au contour apparent vertical.

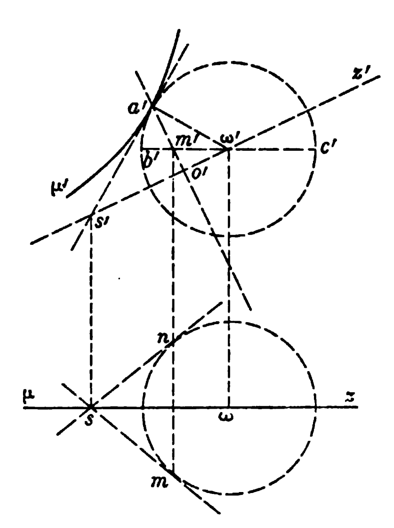
Inversement, considérons un point en lequel le plan tangent est de bout. Si ce plan n'est pas perpendiculaire à l'axe, la normale est de front et le point est sur la méridienne principale. Si le même plan est perpendiculaire à l'axe, il est tangent tout le long d'un parallèle, qui fait par suite partie du contour apparent vertical. Le contour apparent vertical se compose, d'après cela, de la méridienne principale et des parallèles extrêmes qui passent (342) par les points de la méridienne en lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe. Il en résulte que le contour apparent sur le plan vertical se compose : 1° de la projection verticale de la méridienne principale; 2° des portions des tangentes à cette ligne perpendiculaires à l'axe et comprises entre les points de contact. C'est d'après cette règle que nous avons dessiné les contours apparents d'un tore à axe vertical (364).

Ajoutons que, pour passer du cas que nous venons d'examiner au cas où l'axe est de bout, il n'y a qu'à échanger entre eux les mots horizontal et vertical.

372. **Deuxième cas.** — *Axe horizontal ou de front.*

Pour fixer les idées, supposons l'axe de front. On voit comme plus haut (371) que le contour apparent sur le plan vertical se compose de la méridienne principale et des portions des tangentes à cette ligne

perpendiculaires à l'axe et comprises entre les points de contact. Montrons sur un exemple comment on peut déterminer le contour apparent horizontal. Pour cela, supposons connue la méridienne principale (μ, μ') de la surface et rappelons encore une fois qu'il s'agit de construire la courbe de contact du cylindre vertical circonscrit à la surface. Nous pourrons donc construire cette courbe par points en cherchant ses points de rencontre avec les parallèles successifs de la surface (363). Cherchons par exemple les points situés sur le parallèle projeté verticalement en $o'a'$. Considérons pour cela la sphère (ω, ω') inscrite le long de ce parallèle. La courbe de contact du cylindre vertical circonscrit à cette sphère est projetée verticalement en $b'c'$. Cette courbe de contact et le parallèle se rencontrent en deux points dont les projections verticales sont en m' et dont les projections horizontales sont des points m et n du contour apparent de la sphère sur le plan horizontal. En m et en n les tangentes au contour apparent de la surface sont les mêmes que les tangentes au contour apparent de la sphère (298).

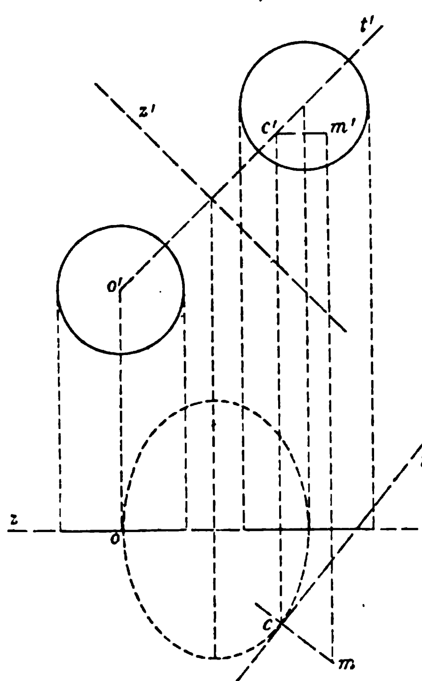


Au lieu d'employer la sphère inscrite le long du parallèle, on aurait pu se servir du cône circonscrit le long de ce parallèle. En menant à ce cône les plans tangents verticaux, on aurait obtenu des points du contour apparent cherché en prenant les points de rencontre du parallèle projeté en $o'a'$ avec les génératrices de contact. Si (s, s') est le sommet de ce cône, il est clair que son contour apparent sur le plan horizontal est l'ensemble des tangentes sm et sn menées du point s à la circonférence ω.

Supposons que la surface soit un tore, et cherchons son contour apparent sur le plan horizontal. On peut alors, sans restreindre la question, supposer l'axe de révolution de front, et si l'on considère la circonférence décrite par le centre de la demi-méridienne en tournant autour de l'axe, il est aisé de prouver que le contour apparent sur le

plan horizontal est une courbe *parallèle* à la projection horizontale de cette circonférence.

Soient, en effet, (z, z') l'axe de la surface, (o, o') le centre de la méridienne principale et (c, c') un point de la circonférence décrite par (o, o') en tournant autour de (z, z'). Au point (c, c') la tangente $(ct, c't')$ à cette circonférence est perpendiculaire au plan du méridien du point (c, c'), par suite à toutes les droites situées dans ce plan. Or, si (m, m') est un point du contour apparent horizontal situé sur la demi-méridienne dont le plan passe par (c, c'), le rayon $(cm, c'm')$ de cette demi-méridienne est horizontal, puisqu'il est perpendiculaire au plan tangent en (m, m'). Ce rayon étant situé dans le



plan de la demi-méridienne est perpendiculaire à $(ct, c't')$ et forme avec cette droite un angle droit projeté horizontalement suivant un angle droit. Ainsi, le point m est situé sur la normale au point c à l'ellipse projection horizontale de la circonférence décrite par le point (o, o') en tournant autour de l'axe. D'ailleurs, le rayon $(cm, c'm')$ étant horizontal, se projette horizontalement suivant une droite de même longueur; de sorte que cm est égal au rayon de la demi-méridienne de la surface. Par conséquent, on obtient le contour apparent de la surface sur le plan horizontal en portant sur les normales à l'ellipse décrite par le point c, et à partir des points d'incidence, de part et d'autre de ces points, une longueur constante égale au rayon de la circonférence méridienne du tore. Le lieu des points ainsi obtenus est, par définition, une courbe *parallèle* à l'ellipse décrite par le point c, c'est-à-dire une courbe parallèle à la projection horizontale de la circonférence que décrit le point (o, o') en tournant autour de l'axe (z, z').

373. Troisième cas. — *Axe quelconque.*

Nous nous bornerons ici à quelques indications.

Pour avoir le contour horizontal, on détermine ses points de rencontre avec les parallèles successifs, soit au moyen des cônes circonscrits le long de ces parallèles, soit au moyen des sphères inscrites. On opère de même pour le contour apparent vertical.

En vertu d'une proposition démontrée plus haut (298), le contour apparent sur le plan horizontal est soit l'enveloppe des contours apparents sur ce plan des cônes circonscrits le long des divers parallèles, soit l'enveloppe des contours apparents sur ce même plan des sphères inscrites. Même remarque pour le contour apparent en projection verticale.

Quand on emploie les cônes circonscrits le long des divers parallèles, si l'on suppose qu'un parallèle s'éloigne indéfiniment, le cône correspondant devient le cône asymptote. Il suit de là que les asymptotes du contour apparent sur le plan horizontal sont confondues avec les contours apparents des cônes asymptotes sur le plan horizontal. On obtient d'une manière analogue les asymptotes du contour apparent sur le plan vertical.

374. Remarques relatives à la représentation des surfaces. — Nous avons vu (202) qu'on représente un polyèdre, en géométrie descriptive, par les projections de ses arêtes. Ce mode de représentation ne pouvant être adopté pour les surfaces, on *convient* de représenter une surface quelconque par ses contours apparents. On représente donc une surface par son contour apparent horizontal et par son contour apparent vertical. Dans le tracé à l'encre, on ne trace à l'encre noire que la projection horizontale du contour apparent horizontal et la projection verticale du contour apparent vertical. On considère, d'ailleurs, les lignes doubles d'une surface comme faisant partie des contours apparents. Par exemple, les parallèles doubles d'une surface de révolution, quand elle en a, font partie du contour apparent horizontal et du contour apparent vertical. Dans tous les cas, quand on veut représenter une surface, il ne faut jamais perdre de vue que le contour apparent sur le plan horizontal est le lieu des traces horizontales des verticales qui rencontrent la surface en deux points confondus ; observation analogue pour le contour apparent sur le plan vertical.

§ V. — *Plans tangents passant par une droite ou parallèles à un plan donné.*

375. **Méthodes générales.** — Comme pour toutes les surfaces (voir sphère), pour mener par une droite les plans tangents à une surface de révolution, il suffit de mener par cette droite les plans tangents à un cône ayant son sommet sur la droite et circonscrit à la surface.

On peut encore circonscrire à la surface deux cônes ayant leurs sommets sur la droite et prendre les points communs aux deux courbes de contact, ce qui donne les points de contact des plans tangents cherchés.

On peut aussi opérer de la manière suivante : Appelons D la droite donnée et P l'un des plans tangents cherchés. Si l'on imagine l'hyperboloïde de révolution engendré par la droite D en tournant autour de l'axe de la surface, le plan P est aussi tangent à cet hyperboloïde ; c'est donc un plan tangent commun aux deux surfaces : hyperboloïde et surface donnée. Dès lors il est tangent à un cône de révolution circonscrit à la fois à ces deux surfaces.

Mais ce cône est connu en même temps que son sommet, qui est un point de l'axe de révolution ; enfin ce sommet s'obtient en prenant le point de rencontre de l'axe avec une tangente commune aux méridiennes des deux surfaces situées dans le même plan méridien.

En résumé, après avoir déterminé, comme il vient d'être dit, les sommets de tous les cônes de révolution circonscrits à la fois aux deux surfaces, on détermine chacun de ces cônes et l'on mène à chacun d'eux les plans tangents qui passent par la droite D : ce sont les plans tangents demandés.

Comme on le voit, le problème des plans tangents menés par une droite à une surface de révolution est un problème en général compliqué, et nous allons nous borner à le résoudre dans quelques cas particuliers.

376. **Premier cas.** — *La droite rencontre l'axe de révolution.*

Appelons D la droite et S son point de rencontre avec l'axe de révolution. Si l'on imagine les cônes de sommet S circonscrits à la surface de révolution, cônes qui sont de révolution, les plans tangents

cherchés sont ceux qui sont tangents à l'un quelconque de ces cônes et qui passent par D.

377. **Deuxième cas.** — *La droite est perpendiculaire à l'axe.*

Il suffit alors de mener par la droite les plans tangents au cylindre circonscrit à la surface le long de la méridienne dont le plan est perpendiculaire à la droite ; ce qui revient à prendre comme sommet du cône circonscrit à la surface le point à l'infini dans la direction de la droite.

378. **Troisième cas.** — *La surface de révolution est une quadrique.*

Le principe de la méthode est alors le même que celui d'une méthode indiquée pour la sphère (320, 3e méthode). On imagine le cylindre C circonscrit à la surface parallèlement à l'axe et un cône S ayant son sommet sur la droite et circonscrit à la surface. Le cylindre C et le cône S se coupant suivant deux courbes planes, on prend l'une de ces courbes comme directrice du cône et l'on mène, à celui-ci, les plans tangents qui passent par la droite.

Le problème est particulièrement simple quand l'axe de révolution est vertical ou de bout et que l'on prend pour sommet du cône S le point de rencontre de la droite avec le plan du méridien principal. Dans ce cas, l'épure est de tout point pareille à celle que nous avons exécutée pour la sphère (320, 3e méthode).

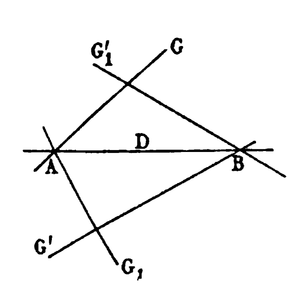
Supposons en particulier que la surface soit un ellipsoïde de révolution à axe vertical, et coupons cet ellipsoïde par un plan quelconque P passant par la droite. Le cône qui a pour base la section et dont le sommet coïncide avec l'un des sommets, Σ, de l'ellipsoïde situé sur l'axe de révolution, est coupé suivant un cercle par le plan horizontal ; en effet ce cône et l'ellipsoïde ont deux courbes planes communes et le plan de l'une de ces courbes passe par le point Σ ; ce plan coupant alors le cône suivant deux droites, il doit aussi couper l'ellipsoïde suivant deux droites, c'est-à-dire qu'il doit être tangent à l'ellipsoïde ; mais alors la section dans l'ellipsoïde étant un cercle, il en est de même de la section dans le cône, ce qui revient à dire que cette surface admet le plan horizontal comme plan cyclique.

Quand le plan P varie, tous ces cercles passent par deux points fixes, qui sont les traces horizontales des droites joignant le point Σ

aux points de rencontre de l'ellipsoïde et de la droite donnée. Tous ces cercles ont donc deux points communs, c'est-à-dire forment un faisceau. Quand le plan P devient tangent, le cercle correspondant se réduit à un point ; ce point n'est autre que l'un des points limites du faisceau. On déterminera donc ces points limites au moyen de deux cercles du faisceau, on les joindra au point Σ, et les points de rencontre de ces droites avec l'ellipsoïde seront les points de contact des plans tangents cherchés.

379. **Quatrième cas.** — *La surface est un hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Appelons A et B les points de rencontre de la surface avec la droite. Par le point A il passe deux génératrices AG et AG_1 de systèmes différents ; par le point B il passe une génératrice BG′ de même système que AG et une génératrice BG'_1 de même système que AG_1. Les génératrices de systèmes différents AG et BG'_1 définissent un plan tangent passant par la droite D ; de même AG_1 et BG′ définissent un second plan tangent répondant à la question.



La réciproque étant presque évidente, on voit que le problème proposé se ramène à celui de la détermination des points de rencontre d'une droite et d'une surface gauche de révolution. Ce dernier problème sera résolu ultérieurement (514 et 524).

380. **Problème.** — *Mener à une surface de révolution les plans tangents parallèles à un plan donné.*

C'est encore un cas particulier du problème des plans tangents menés par une droite, celui où la droite est à l'infini dans un plan donné.

Pour le résoudre, il suffit d'avoir le point de contact de l'un quelconque des plans tangents cherchés. Or, si l'on appelle P le plan donné et Q l'un des plans tangents cherchés touchant la surface en un point M, les plans P et Q sont perpendiculaires au plan du méridien qui passe par M et coupent ce dernier plan suivant deux droites parallèles. Celle de ces droites qui est située dans le plan Q

est d'ailleurs tangente en M à la méridienne de ce point, et de là résulte évidemment la solution du problème : on mène le plan méridien qui est perpendiculaire au plan P et l'on détermine l'intersection Δ de ces deux plans; on mène ensuite à la méridienne située dans le même plan que Δ les tangentes parallèles à Δ. Les points de contact de ces tangentes sont les points de contact des plans tangents demandés. Il ne reste plus qu'à mener le plan tangent à la surface en chacun de ces points.

On voit que la solution revient à remplacer la surface par le cylindre circonscrit le long de la méridienne dont le plan est perpendiculaire au plan P. On voit de plus que cette solution suppose que l'on connaisse une méridienne de la surface. Toutefois ceci n'est pas nécessaire quand la surface est un hyperboloïde de révolution à une nappe, comme nous allons le montrer en résolvant le problème suivant :

381. **Problème.** — *Mener à une surface gauche de révolution les plans tangents parallèles à un plan donné.*

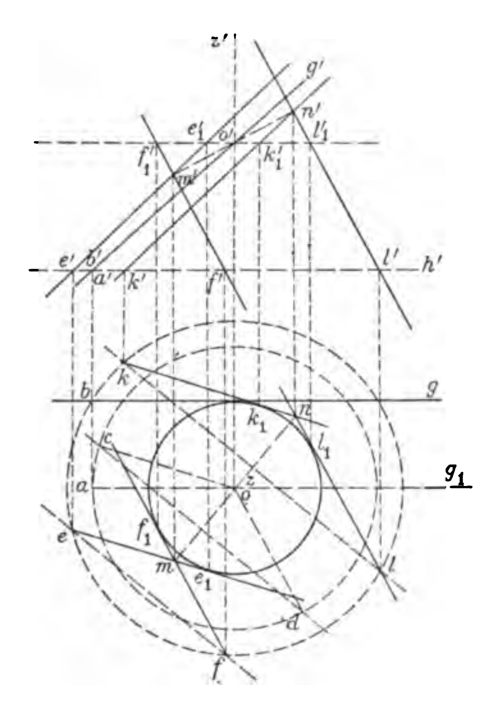
Appelons P le plan donné et Q l'un des plans tangents cherchés. Le plan Q coupe la surface suivant deux droites D et Δ qui sont parallèles à deux génératrices du cône asymptote. Si donc on coupe ce cône par un plan parallèle au plan P mené par le sommet du cône, on obtient deux droites D_1 et Δ_1 qui sont respectivement parallèles à D et à Δ. La question est alors ramenée à la suivante :

Trouver sur la surface gauche deux génératrices respectivement parallèles à D_1 *et à* Δ_1 *et situées dans le même plan.*

Pour montrer sur un exemple la manière de procéder, supposons que l'axe de révolution soit vertical et que l'on connaisse, ce qui est permis, une génératrice de front de la surface. Soient $(oz, o'z')$ l'axe et (g, g') la génératrice. Le plan du méridien principal rencontre (g, g') en un point à l'infini, ce qui donne un point à l'infini sur la méridienne principale. Le plan tangent en ce point à l'infini passe par (g, g') et est perpendiculaire au plan du méridien principal, c'est-à-dire au plan vertical ; il en résulte que $(og_1, o'g')$ est une asymptote de la méridienne principale, par suite une génératrice du cône asymptote. Celui-ci a donc pour sommet le point (o, o') centre du cercle de gorge.

Cela posé, on peut toujours transporter le plan donné parallèlement

à lui-même au sommet du cône asymptote et supposer le plan défini alors par le sommet du cône asymptote et par une droite ; supposons que cette droite soit la trace du plan sur un plan horizontal h' et figurons les circonférences de rayons oc et ob, traces respectives du cône



asymptote et de la surface sur le même plan horizontal h'. Soit d'ailleurs cd la projection horizontale de la trace du plan donné sur le plan horizontal h'. La droite cd rencontre la circonférence de rayon oc en c et en d; il en résulte que le plan mené par le sommet du cône asymptote parallèlement au plan donné coupe le cône asymptote suivant deux droites projetées horizontalement en oc et en od. Les projections horizontales des génératrices de l'hyperboloïde parallèles à ces deux droites sont les tangentes menées à la projection horizontale du cercle de gorge parallèlement à oc et à od. Si alors on observe qu'en allant du point C au point O sur la droite CO on se déplace du plan h' au plan du cercle de gorge, on voit que les génératrices de la surface parallèles à CO sont projetées horizontalement en kk_1 et en ee_1 ; pareillement, les génératrices parallèles à DO sont projetées horizon-

talement en ff_1 et en ll_1. Il en résulte immédiatement que pour définir les plans tangents demandés il faut associer ee_1 avec ff_1 et kk_1 avec ll_1 ; car les traces de ces plans sur le plan h' doivent être parallèles à cd. En rappelant les points e, e_1, f, f_1, etc. sur le plan vertical, on obtient les projections verticales des génératrices cherchées.

En résumé, les plans tangents cherchés sont définis : le premier, par les deux droites $(ee_1, e'e'_1)$ et $(ff_1, f'f'_1)$; le deuxième par les deux droites $(kk_1, k'k_1)$ et $(ll_1, l'l'_1)$. Comme vérification, leurs points de contact (m, m') et (n, n') doivent être symétriques par rapport au point (o, o').

§ VI. — *Quelques problèmes sur les normales aux surfaces de révolution.*

382. **Remarques générales.** — Les problèmes sur les normales aux surfaces de révolution sont généralement des conséquences des problèmes sur les plans tangents. C'est ainsi, par exemple, que pour mener la normale en un point on mène en ce point la perpendiculaire au plan tangent. Toutefois, la propriété de la normale permet souvent d'éviter la construction du plan tangent. Si l'on connait en effet une tangente en un point, en menant par ce point le plan perpendiculaire à cette tangente, le point de rencontre de ce plan avec l'axe donne un second point de la normale, et il n'y a plus qu'à le joindre au premier. Pour pouvoir appliquer cette construction, il est, bien entendu, nécessaire que la tangente connue ne soit pas perpendiculaire à l'axe.

Nous allons passer rapidement en revue les principaux problèmes sur les normales.

383. **Normales passant par un point donné.** — Toutes les normales rencontrent l'axe de révolution ; si donc A est le point donné, toutes les normales qui passent par le point A sont situées dans le plan déterminé par l'axe et par le point A. Ce plan coupe la surface suivant une méridienne, et il est clair que les normales demandées sont les normales à cette méridienne menées par le point A. Par suite, si l'on connait une méridienne de la surface, on amènera le point A en A_1 dans le plan de cette méridienne par une rotation autour de l'axe ; du point A_1 on mènera les normales à la méridienne connue et l'on effec-

tuera une opération inverse pour amener ces normales à passer par le point A.

On voit, d'après cela, que le problème n'admet en général qu'un nombre limité de solutions. Toutefois il n'en est plus ainsi quand le point A est sur l'axe : il y a alors une infinité de normales situées sur les cônes des normales relatifs à ce point. Au point A sur l'axe il correspond d'ailleurs plusieurs cônes de normales ; car on peut mener du point A plusieurs normales à une demi-méridienne, et à chacune de ces normales il correspond un cône de normales ayant pour sommet le point A.

384. **Normales parallèles à une direction donnée.** — Ce problème se déduit du précédent en supposant que le point donné A s'est éloigné à l'infini dans la direction donnée. Pour le résoudre, on mènera donc le plan méridien parallèle à la direction donnée et les normales à la méridienne correspondante parallèles à la même direction.

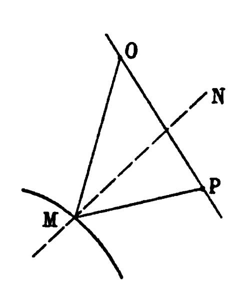
Si la direction donnée est celle de l'axe, le problème est évidemment équivalent à celui de la détermination des points de la méridienne en lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe (342, 4°).

Enfin, quand la direction donnée est quelconque, si l'on appelle P un plan perpendiculaire à cette direction, les points d'incidence des normales cherchées sont les points de contact des plans tangents parallèles au plan P, ce qui ramène le problème à un autre déjà résolu (380) et présentant d'ailleurs les mêmes difficultés.

385. **Normales rencontrant une ligne donnée.** — Appelons L cette ligne donnée. Il est aisé de voir que le problème est indéterminé. Considérons en effet un parallèle quelconque de la surface, et soit S le sommet du cône des normales relatif à ce parallèle. Ce cône et le cône de même sommet qui a pour directrice la ligne L ont en commun un certain nombre de génératrices (intersection de deux cônes) qui sont des normales remplissant les conditions voulues. En faisant varier le parallèle, on en obtient ainsi autant qu'on veut, et le lieu de leurs points d'incidence est une ligne tracée sur la surface de révolution.

Lorsque L est une droite, le plan déterminé par le point S et par cette droite coupe le cône des normales suivant deux droites, de sorte qu'alors il y a deux normales s'appuyant à la fois sur la droite L et sur un parallèle donné.

386. **Points brillants.** — Une application de ce problème consiste dans la détermination des points *brillants* d'une surface de révolution.



Supposons qu'une telle surface soit éclairée par un point lumineux P et soit vue d'un point O. On appelle alors points *brillants* relatifs au point lumineux P et au point de vue O, les points M tels que le rayon incident PM se réfléchisse suivant le rayon PO après avoir fait un angle d'incidence égal à l'angle de réflexion, d'après la loi de réflexion de la lumière. Il suit de cette définition que les normales à la surface aux points brillants s'appuient sur la droite PO, ce qui donne une propriété permettant d'aborder la recherche des points brillants sans cependant résoudre cette question.

Le problème se simplifie si les points P et O sont à l'infini dans des directions données ; car alors la normale MN est parallèle à la bissectrice de l'angle de ces deux directions et a, par suite, une direction donnée, ce qui ramène la détermination des points brillants à une question déjà résolue (384).

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

1. Une surface de révolution est engendrée par une courbe donnée tournant autour d'un axe quelconque. Trouver les projections d'un point de la surface et mener la normale et le plan tangent à la surface en ce point.

2. Mener à la même surface de révolution les plans tangents passant par un point donné et ayant leurs points de contact sur le parallèle d'un point donné de la génératrice.

3. Un cercle situé dans le plan horizontal tourne autour d'un axe quelconque; trouver les contours apparents de la surface engendrée.

4. Une droite quelconque A tourne autour d'une autre droite quelconque B. Déterminer par points et par tangentes le contour apparent sur le plan horizontal de la surface engendrée.

5. On donne un cercle situé dans un plan de bout et un axe vertical dans le plan de profil du centre du cercle. Construire les contours apparents de la surface engendrée par le cercle en tournant autour de l'axe vertical.

6. Mener par une droite les plans tangents à un paraboloïde de révolution à axe vertical.

7. Construire les contours apparents de la surface de révolution engendrée par un cercle situé dans un plan de bout et tournant autour d'un axe vertical quelconque.

8. On donne une droite de front et une courbe située dans le plan de front de cette droite. Cette courbe est la génératrice d'une surface de révolution autour de la droite : mener à cette surface les plans tangents passant par un point donné et ayant leurs points de contact sur un méridien défini par son angle avec le plan de front qui passe par l'axe.

9. Un cercle situé dans le plan horizontal tourne autour d'un axe de front; construire le plan tangent en un point de la surface engendrée.

10. On donne une génératrice d'une surface gauche de révolution à axe vertical. Mener à cette surface les plans tangents passant par un point donné et ayant leurs points de contact sur un parallèle donné.

11. On donne un paraboloïde de révolution à axe vertical et un point A. Trouver les contours apparents et la courbe de contact du cône de sommet A circonscrit au paraboloïde.

12. Quel est le contour apparent sur le plan horizontal d'un hyperboloïde de révolution à une nappe qui a une génératrice verticale ?

13. Une droite quelconque A tourne autour d'une droite quelconque B; mener à la surface engendrée les plans tangents qui passent par un point donné et qui ont leurs points de contact sur un parallèle donné.

14. Construire les contours apparents de la surface engendrée par un cercle situé dans un plan de front et tournant autour d'un axe quelconque.

15. Une droite horizontale tourne autour d'une droite de front; construire les contours apparents de la surface engendrée.

16. Un ellipsoïde de révolution à axe vertical étant donné, construire son contour apparent sur un plan donné.

17. Une ellipse située dans le plan horizontal tourne autour de son grand axe. On donne la trace horizontale d'une droite, sa projection horizontale et son angle avec le plan horizontal. Mener par la droite les plans tangents à l'ellipsoïde engendré par l'ellipse.

18. Trouver les contours de l'ombre propre d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, à axe vertical, éclairé par un point lumineux. Déterminer les points remarquables.

19. Déterminer l'ombre propre d'une sphère éclairée par un point lumineux. Trouver le rayon lumineux qui, après réflexion sur la sphère, est vertical.

20. On donne une génératrice principale d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical; construire la courbe lieu des points d'incidence des normales à cette surface qui rencontrent la ligne de terre.

21. Un cercle situé dans un plan de front tourne autour d'une droite située dans le même plan; mener par un point donné les normales à la surface ainsi obtenue.

22. Mener à une surface gauche de révolution à axe vertical les plans tangents faisant un angle donné avec le plan horizontal et passant par un point donné.

23. *Cône circonscrit à un ellipsoïde de révolution à axe vertical et dont un sommet est dans le plan horizontal.*

La ligne de terre est dirigée suivant le petit axe de la feuille, et les coordonnées du centre de l'ellipsoïde, exprimées en millimètres, sont — 10, 90, 96. Le demi-petit axe de la méridienne est égal à 53^{mm}, et les coordonnées du sommet du cône circonscrit, exprimées en millimètres, sont 86, 190, 58.

Représenter l'ellipsoïde duquel on enlève la calotte tournée du côté du sommet du cône.

Nota. — Quand nous définissons un point par ses coordonnées, α, β, γ, en géométrie descriptive, le premier de ces trois nombres doit être porté sur la ligne de terre, à partir de son milieu, et vers la droite ou vers la gauche, suivant qu'il est positif ou négatif; le second représente l'éloignement positif ou négatif, et le troisième, la cote positive ou négative.

24. *Courbe de contact d'un cylindre circonscrit à un tore à axe vertical.*

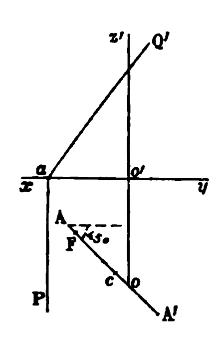
Ligne de terre à 3^{cm} 1/2 au-dessus du petit axe de la feuille; axe du tore suivant le grand axe de la feuille.

Coordonnées du centre du tore en millimètres : 0, 100, 40. Le centre du cercle générateur est à une distance de l'axe égale à 57^{mm}, et le rayon de

ce cercle est égal à 35^{mm}. La direction des génératrices du cylindre est (δ, δ') et est ainsi définie : δ fait un angle de 38° avec la ligne de terre, vers la droite, et δ' un angle de 48°, vers la droite également.

On représentera la courbe de contact tracée sur la surface du tore supposée opaque.

25. Une ellipse est située dans un plan de bout PαQ' faisant un angle de 53° avec le plan horizontal et tourne autour d'un axe vertical (o, $o'z'$), qui rencontre en o le grand axe de la projection verticale. Représenter la surface engendrée et l'ellipse génératrice en tenant compte des parties cachées par la surface. Construire, en particulier, les points doubles de la méridienne et les tangentes en ces points.



On prendra la ligne de terre à 2^{cm} au-dessus du petit axe de la feuille, et on adoptera les données suivantes : Coordonnées du point (o, o') : 15^{mm}, 11^{cm}, 0. Le grand axe AA' de la projection horizontale de l'ellipse fait un angle de 45° avec la ligne de terre et est égal à 12^{cm}. La distance du sommet A au foyer F est égale à 1^{cm}, et la distance du centre c au point o à 2^{cm}. On a enfin $o'\alpha = 85^{mm}$.

26. Trouver la méridienne principale d'une surface de révolution.

L'axe de révolution passe par les points

(α, α') ayant pour coordonnées : $x = 0$, $y = 10^{cm}$, $z = 7^{cm}$;

(β, β') — — $x = -7$, $y = 10$, $z = 0$.

La courbe qui décrit la surface est une ellipse, contenue dans le plan horizontal $z = 7^{cm}$. Sa projection horizontale a pour sommets opposés les points

a : $x = 0$, $y = 10$;

b : $x = 6$, $y = 16$;

elle passe de plus par le point c : $x = 9$, $y = 10$.

On établira la ponctuation de la surface engendrée, seulement en projection verticale.

Faire les constructions pour un point quelconque, la tangente en ce point, et les points remarquables.

(*Ecole normale, concours de 1890.*)

LIVRE III

SECTIONS PLANES DES SURFACES

CHAPITRE PREMIER

SECTIONS PLANES DES CONES ET DES CYLINDRES

§ I. — *Le plan sécant passe par le sommet du cône ou est parallèle aux génératrices du cylindre.*

387. Nature de la section et manière de l'obtenir. — La section faite dans un cône par un plan passant par le sommet est un système de génératrices. Si, en effet, on appelle M un point de la section, la droite qui joint ce point au sommet du cône est une génératrice du cône située dans le plan sécant. On voit de même que la section d'un cylindre par un plan parallèle aux génératrices se compose d'un système de génératrices.

Cela posé, pour obtenir la section faite dans un cône par un plan passant par le sommet, ou la section faite dans un cylindre par un plan parallèle aux génératrices, on peut déterminer les points de rencontre du plan avec une ligne quelconque tracée sur la surface du cône ou sur celle du cylindre, par exemple avec la directrice. Pour cela, on peut faire passer une surface auxiliaire convenablement choisie par la directrice du cône ou du cylindre, déterminer l'intersection de cette surface et du plan ainsi que les points de rencontre de cette courbe avec la directrice; à chacun de ces points correspond une génératrice du cône ou du cylindre répondant à la question.

Pratiquement, il est préférable de se servir d'une courbe plane obtenue en coupant le cône ou le cylindre ainsi que le plan sécant par un plan auxiliaire. Ce plan auxiliaire coupe le cône ou le cylindre suivant une courbe que nous apprendrons à construire (394) ; il coupe le plan donné suivant une droite, et les génératrices du cône ou du cylindre qui passent par les points communs à la courbe et à la droite sont les génératrices cherchées.

Le problème se simplifie quand la directrice du cône ou du cylindre est une courbe plane. Dans ce cas, en vertu de ce qui précède, on prend le plan de la directrice ou base comme plan auxiliaire, et l'on procède de la manière suivante :

On détermine la trace du plan donné sur le plan de base, ainsi que les points de rencontre de cette droite et de la base. Les génératrices de la surface qui passent par ces points sont les génératrices cherchées.

388. **Points de rencontre d'une droite et d'une surface conique.** — La détermination de ces points est une application immédiate du problème que nous venons de résoudre. Si l'on mène en effet le plan déterminé par la droite et par le sommet du cône, ce plan coupe le cône suivant des génératrices dont les points de rencontre avec la droite sont les points cherchés.

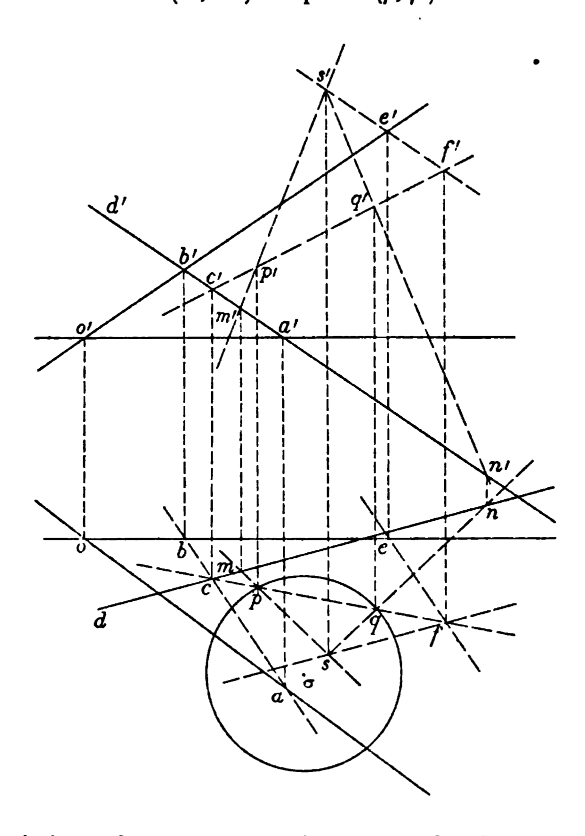
389. **Points de rencontre d'une droite et d'une surface cylindrique.** — On les obtient en menant par la droite le plan parallèle aux génératrices du cylindre. Ce plan coupe le cylindre suivant des génératrices dont les points de rencontre avec la droite sont les points demandés.

390. **Exemple.** — *La base d'un cône située dans un plan donné a pour projection horizontale un cercle. Trouver les points de rencontre de ce cône et d'une droite, connaissant les projections du sommet du cône et celles de la droite.*

Soient (s, s') le sommet du cône et (d, d') la droite donnée. Supposons que la base du cône soit dans un plan défini par une horizontale $(oa, o'a')$ et par une ligne de front $(ob, o'b')$; soit d'ailleurs σ le centre du cercle projection horizontale de la base du cône.

La droite (d, d') et le point (s, s') définissent un plan. Cherchons la trace de ce plan sur le plan de base du cône. Nous en aurons un point en cherchant l'intersection de la droite (d, d') avec le plan de

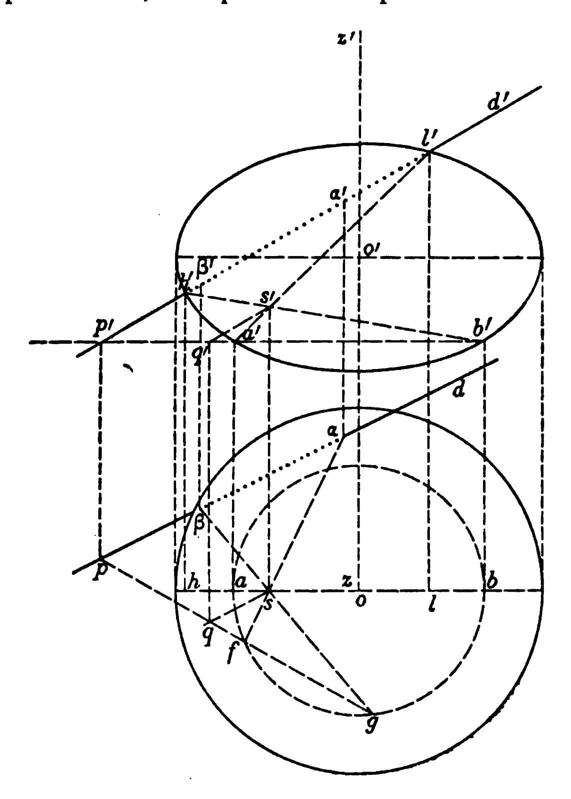
base ; cette intersection (c, c') a été obtenue, dans l'épure, au moyen du plan de bout $a'b'$ qui projette verticalement la droite (d, d'). D'autre part, la parallèle $(sf, s'f')$ à (d, d') menée par le sommet du cône coupe le plan de base au point (f, f') ; ce point (f, f') a été obtenu en coupant le plan de base par le plan de bout $s'e'$ parallèle au plan de bout $a'b'$, ce qui a donné une droite $(ef, e'f')$ parallèle à $(ab, a'b')$ et rencontrant $(se, s'e')$ au point (f, f'). Il suit de là que le



plan déterminé par la droite et par le sommet du cône coupe le plan de base du cône suivant la droite $(cf, c'f')$. La projection horizontale de cette droite rencontre la projection horizontale de la base aux points p et q, qui sont rappelés verticalement en p' et en q'. Le plan déterminé par la droite et par le sommet du cône coupe donc le cône suivant les deux génératrices $(sp, s'p')$, $(sq, s'q')$, qui rencontrent la droite (d, d') aux points cherchés (m, m') et (n, n').

391. Remarque. — Nous avons vu que la détermination des points d'une surface qui ont une projection horizontale ou verticale donnée, se ramène à celle des points de rencontre de la surface avec une verticale ou avec une ligne de bout. Dans le cas particulier où la surface est un cône ou un cylindre, on pourra donc appliquer la méthode indiquée aux numéros 388 et 389. Par conséquent, dans le cas d'un cône ou d'un cylindre de révolution, il y aura avantage à substituer cette méthode à celle dont on a fait usage au nº 268.

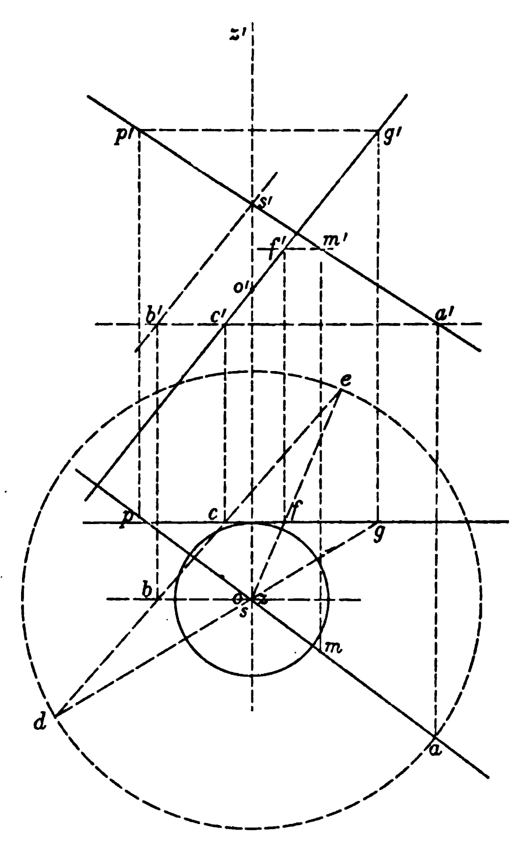
392. **Points de rencontre d'une droite et d'une quadrique de révolution définie par sa méridienne.** — Il y a deux cas à examiner, suivant que la droite rencontre ou ne rencontre pas l'axe de révolution. Dans le premier cas, on opère comme pour une surface de révo-



lution quelconque, en amenant la droite dans le plan de la méridienne connue par une rotation autour de l'axe (278).

Dans le second cas, on peut ramener le problème à celui qui a été résolu au n° 388. Supposons en effet que la surface soit un ellipsoïde de révolution aplati à axe vertical $(oz, o'z')$ et imaginons le plan de bout mené par la droite donnée (d, d'). Ce plan coupe la surface suivant une conique projetée verticalement en $h'l'$, et les points cherchés sont les points communs à cette conique et à la droite. Mais si l'on considère cette conique comme la base d'un cône de sommet donné, on peut dire aussi que les points cherchés sont les points de rencontre de ce cône et de la droite. Cela posé, considérons un parallèle quelconque $(ab, a'b')$ de la surface, et menons les droites $a'l'$ et $b'h'$ qui se coupent en s'. Comme on peut disposer du parallèle $(ab, a'b')$, on peut toujours le choisir de façon que le point s' soit dans les limites du dessin. Supposons que le point s' soit la projection verticale d'un point (s, s') situé dans le plan du méridien principal, et prenons le point (s, s') comme sommet d'un cône ayant pour base le parallèle $(ab, a'b')$. Ce cône et l'ellipsoïde ayant en commun une courbe plane, se coupent suivant le parallèle $(ab, a'b')$ et suivant une deuxième courbe plane qui passe par les points (h, h') et (l, l'). Mais le plan du méridien principal est un plan de symétrie commun à l'ellipsoïde et au cône, de sorte que l'intersection des deux surfaces se projette sur ce plan suivant une conique, ce qui revient à dire que la projection verticale de cette intersection est une conique. Or $a'b'$ fait partie de cette projection verticale ; donc l'intersection de l'ellipsoïde et du cône est projetée verticalement suivant deux droites dont l'une est $a'b'$, et dont l'autre est, par suite, nécessairement $h'l'$. Il en résulte que le plan de la deuxième courbe commune à l'ellipsoïde et au cône est le plan de bout mené par d'. Et comme cette courbe contient les points cherchés, ainsi qu'on l'a vu en commençant, on voit que la détermination de ces points se ramène à celle des points de rencontre de (d, d') et du cône de sommet (s, s'). Le plan mené par (d, d') et par (s, s') coupe le plan de base du cône suivant une droite projetée horizontalement en pq ; la droite pq rencontre le cercle ab en deux points f et g auxquels correspondent deux génératrices du cône projetées horizontalement en $fs\alpha$ et en $gs\beta$. Les points de rencontre de la droite (d, d') et du cône, c'est-à-dire aussi les points de rencontre de la droite (d, d') et de l'ellipsoïde, sont donc projetés en (α, α') et en (β, β').

393. **Points de rencontre d'une surface gauche de révolution et d'une droite rencontrant l'axe de la surface.** — Si l'on fait tourner la droite autour de l'axe de la surface de révolution, elle engendre un cône de révolution ayant pour sommet le point de rencontre de la droite et de l'axe. Ce cône et la surface gauche ont des parallèles communs dont les points de rencontre avec la droite sont les points cherchés. Mais pour trouver ces parallèles communs il suffit de trouver les points de rencontre du cône avec une génératrice de la surface gauche. Le problème est ainsi ramené à la détermination des points de rencontre d'une droite et d'une surface conique.



Dans l'épure ci-dessus, la surface gauche est engendrée par la révolution de la droite (cg, $c'g'$) autour de l'axe vertical (oz, $o'z'$). La droite dont on cherche les points de rencontre avec la surface gauche

est projetée en $(sa, s'a')$, et on a pris comme base du cône engendré par cette droite en tournant autour de $(oz, o'z')$ sa trace sur le plan horizontal $b'c'a'$. Le plan mené par le sommet de ce cône et par la droite $(cg, c'g')$ est déterminé par $(cg, c'g')$ et par la parallèle à cette droite menée par (s, s'). Il coupe le plan de base du cône suivant la droite $(bc, b'c')$, qui rencontre la base du cône en deux points projetés horizontalement en d et en e, auxquels correspondent deux génératrices du cône projetées en se et en sd. On obtient ainsi en (f, f') et en (g, g') les points de rencontre du cône avec $(cg, c'g')$, et on en déduit les projections verticales $f'm'$ et $g'p'$ des parallèles communs à la surface gauche et au cône. Ces projections verticales rencontrent $s'a'$ aux points m' et p', qui sont les projections verticales des points communs à la surface gauche et à la droite $(sa, s'a')$; on en déduit les projections horizontales m et p par des lignes de rappel.

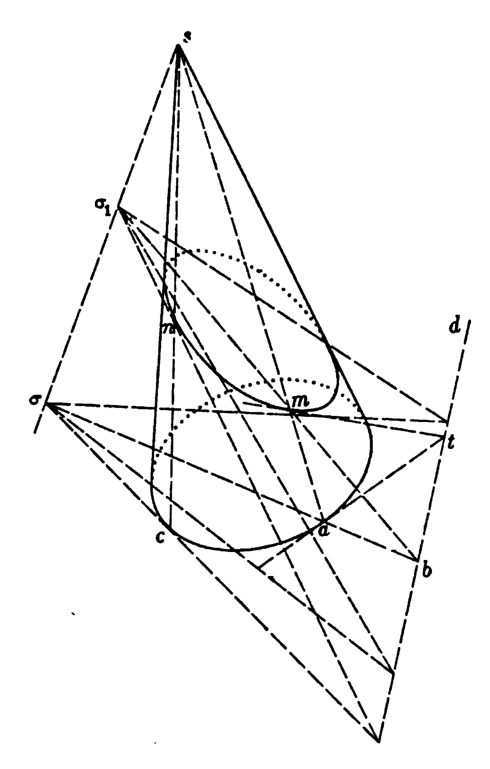
§ II. — *Le plan sécant est quelconque.*

394. **Détermination d'un point quelconque de la section.** — La méthode générale à employer pour déterminer un point quelconque d'une section plane d'un cône ou d'un cylindre, consiste à chercher le point de rencontre d'une génératrice quelconque de la surface avec le plan sécant. Pour procéder méthodiquement, on suppose qu'un point mobile décrive une fois seulement, et dans un sens déterminé, la directrice plane ou gauche de la surface ; on mène la génératrice de la surface qui passe par ce point mobile et l'on détermine le point de rencontre de cette droite avec le plan sécant. On joint enfin les points dans l'ordre où ils ont été obtenus et on obtient ainsi la section demandée.

Lorsque la directrice est plane, voici comment il convient de faire les constructions :

Supposons, pour fixer les idées, que la surface soit un cône et appelons S le sommet de ce cône, P le plan de sa base et Q le plan sécant ; soit d'ailleurs D l'intersection de ces deux plans. Rien n'empêche de supposer que l'on connaisse par exemple les projections horizontales du point S, de la base du cône et de la droite D ; de sorte que toutes les constructions seront indiquées dans l'espace et exécutées en projection horizontale. Les constructions en projection verticale s'en déduiront alors avec la plus grande facilité.

Cela posé, pour obtenir le point de rencontre d'une génératrice SA du cône avec le plan Q, il faut couper par un plan auxiliaire mené par SA. Ce plan auxiliaire étant assujetti à la seule condition de passer par SA, qui est mobile, on peut l'assujettir à une autre condition. Il y a avantage à le faire passer par une droite fixe menée par le sommet du cône. Si nous déterminons alors les traces Σ et Σ_1 de cette droite



sur les plans respectifs P et Q, dès que le point A est donné sur la base, on connait la trace ΣA du plan auxiliaire sur le plan de cette base. Soit σa la projection horizontale de ΣA ; elle coupe d en un point b qui est évidemment la projection horizontale du point d'intersection B de ΣA et de D. Il en résulte que le plan auxiliaire coupe le plan Q suivant une droite Σ_1B projetée horizontalement en $\sigma_1 b$; celle-ci rencontre sa en un point m, qui est la projection horizontale d'un point de la section. On en déduit la projection verticale par des lignes de rappel.

On voit, d'après cela, l'avantage qu'il y a à suivre la méthode que nous venons d'indiquer. Ajoutons que si la surface est un cylindre, la ligne arbitraire SΣ devient une droite arbitraire parallèle aux génératrices de ce cylindre et, pour le reste, il n'y a rien à changer aux développements qui précèdent.

395. **Points sur les contours apparents.** — On les obtient en prenant les points de rencontre du plan sécant avec les génératrices de contour apparent. En ces points les projections de la section sont tangentes au contour apparent sur le plan de projection de même nom.

396. **Points à l'infini.** — Pour qu'un point de la section s'éloigne indéfiniment, il faut que la génératrice correspondante devienne parallèle au plan sécant ou s'éloigne indéfiniment. D'après cela :

1° *La surface est un cylindre.* — Si alors une génératrice est parallèle au plan sécant, celui-ci coupe la surface suivant des génératrices et on retombe sur un problème déjà traité (387).

Si le cylindre a des génératrices à l'infini, le point de rencontre de chacune de ces génératrices avec le plan sécant donne un point à l'infini. La direction de ce point à l'infini est donc l'intersection du plan sécant avec un plan quelconque passant par la génératrice à l'infini. Par exemple, si le cylindre est un cylindre parabolique du second degré, la direction du point à l'infini est l'intersection du plan sécant avec un plan diamétral quelconque ; si le cylindre est un cylindre du second degré à base hyperbolique, la direction d'un point à l'infini est l'intersection d'un plan asymptote avec le plan sécant, etc.

2° *La surface est un cône.* — Dans ce cas, toutes les génératrices passant par le sommet du cône, qui est à distance finie, il ne peut y avoir de génératrices à l'infini ; de sorte qu'il n'y a de points à l'infini que s'il existe des génératrices du cône parallèles au plan sécant. Pour obtenir ces génératrices, on coupe le cône par le plan mené par le sommet parallèlement au plan sécant. Chacune des génératrices obtenues donne la direction d'un point à l'infini.

397. **Tangente en un point.** — La tangente en un point est l'intersection du plan sécant avec le plan tangent à la surface en ce point. Comme on connaît déjà un point de l'intersection, le point de contact, il suffit d'en déterminer un second. Pour cela, il y a avantage à cou-

par le plan tangent et le plan sécant par un plan auxiliaire passant par le sommet du cône.

398. **Asymptotes.** — Quand un point s'éloigne indéfiniment sur la section, la tangente en ce point a pour limite l'asymptote correspondante. On obtient donc l'asymptote qui correspond à un point à l'infini en déterminant l'intersection du plan sécant avec le plan tangent en ce point à l'infini, c'est-à-dire avec le plan tangent suivant la génératrice qui passe par ce point à l'infini.

Lorsque la surface est un cône, l'asymptote peut être à l'infini quand les deux plans qui la fournissent sont parallèles ; la section présente alors une *branche parabolique*.

Quand la surface est un cylindre, l'asymptote est à l'infini quand le plan tangent au cylindre est lui-même à l'infini : il est inutile en effet de parler du cas où le plan sécant est parallèle au plan asymptote, parce que, s'il en était ainsi, comme celui-ci est parallèle aux génératrices, le plan sécant serait lui-même parallèle aux génératrices, et nous ne nous occupons pas actuellement de l'examen de ce cas.

399. **Plans limites.** — Supposons que la directrice soit une courbe plane. Si A est un point de la directrice, pour avoir le point de rencontre de la génératrice SA avec le plan sécant, nous avons coupé (394) par le plan auxiliaire ASΣ dont l'intersection avec le plan de la directrice est la droite ΣA, projetée horizontalement en σa. Cette droite ΣA coupe en général la base de la surface en plusieurs points. Quand elle est tangente à la base, le plan auxiliaire correspondant, c'est-à-dire le plan ASΣ, s'appelle un *plan limite*. Comme on le voit, les plans limites sont variables avec la droite SΣ et ne sont autre chose que les plans tangents à la surface menés par cette ligne. Il en résulte que leurs intersections avec le plan sécant sont tangentes à la section aux points correspondants. Dans l'épure du n° 394, le point n a été déterminé au moyen d'un plan limite.

400. **Tangentes à la section par un point du plan sécant.** — Comme toute tangente se trouve dans un plan tangent, les tangentes demandées sont les droites d'intersection du plan sécant avec les plans tangents à la surface passant par le point considéré.

401. Tangentes parallèles à une direction donnée du plan sécant. — Elles sont évidemment à l'intersection du plan sécant avec les plans tangents parallèles à la direction donnée.

402. Points le plus à droite et le plus à gauche. — On appelle ainsi les points de la section où les projections de la tangente sont perpendiculaires à la ligne de terre. Mais alors les tangentes à la section sont dans un plan de profil, c'est-à-dire sont parallèles à l'intersection du plan sécant avec un plan de profil quelconque. La détermination des points le plus à droite et le plus à gauche n'est donc qu'un cas particulier du problème précédent (401).

403. Points les plus hauts et les plus bas. — Ce sont les points en lesquels les tangentes, en projection, sont parallèles à la ligne de terre. En projection verticale, ce sont les points de contact des tangentes horizontales, c'est-à-dire des tangentes parallèles aux horizontales du plan sécant. En projection horizontale, ce sont les points de contact des tangentes parallèles aux lignes de front du plan sécant.

La détermination des points les plus hauts et des points les plus bas est donc encore une application du problème traité plus haut (401).

404. Grandeur d'une section plane. — On détermine la grandeur d'une section plane au moyen d'un rabattement sur un plan horizontal ou sur un plan de front.

§ III. — *Sections planes des cônes ou des cylindres du second degré.*

405. Nature d'une section plane. — Toute section plane d'un cône ou d'un cylindre du second degré étant une courbe du second degré, on en aura la nature d'après le nombre des points à l'infini. La section est une *ellipse* si elle n'a pas de points à l'infini ; c'est une *hyperbole* si elle a deux points à l'infini ; c'est enfin une *parabole* si elle n'a qu'un point à l'infini, ou plutôt, si les deux points à l'infini sont confondus.

Lorsque la surface est un cylindre et que le plan sécant n'est pas parallèle aux génératrices, la section est, d'après cela :

une ellipse si le cylindre est elliptique ;
une hyperbole si le cylindre est hyperbolique ;
une parabole si le cylindre est parabolique.

Quand la surface est un cône et que le plan sécant ne passe pas par le sommet, en menant par ce point le plan parallèle au plan sécant, pour avoir les points à l'infini de la section (396), on voit que la section est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que ce nouveau plan ne coupe pas le cône, le coupe suivant deux génératrices ou lui est tangent.

406. **Sommets d'une section hyperbolique.** — Lorsque la section est une hyperbole, il est aisé de déterminer soit les sommets de la courbe dans l'espace, soit les sommets de l'une quelconque de ses projections.

Sommets dans l'espace. — On détermine d'abord les asymptotes de la section (398) et on les rabat sur un plan horizontal ou sur un plan de front. On mène ensuite, dans le rabattement, la bissectrice de l'angle des asymptotes qui comprend la courbe, ce qui donne le rabattement de l'axe transverse de la section. On relève enfin cette droite et l'on détermine ses points de rencontre avec la surface (388 et 389), ce qui donne les sommets de la section.

On peut procéder autrement : on peut mener une perpendiculaire au rabattement de l'axe, relever cette droite et mener les tangentes à la section qui lui sont parallèles (401). On obtient ainsi en même temps que les sommets, les tangentes en chacun de ces points.

Sommets en projection. — Soit par exemple à déterminer les sommets de la projection horizontale. Pour cela, on commence d'abord par déterminer les asymptotes dont les projections horizontales sont les asymptotes de la projection horizontale. On mène ensuite la bissectrice de l'angle de ces projections horizontales qui comprend la projection horizontale de la courbe, ce qui donne l'axe transverse de cette projection horizontale. On cherche enfin la droite du plan sécant projetée horizontalement suivant cet axe et on en détermine les points de rencontre avec la surface : les projections horizontales de ces points sont les sommets de la projection horizontale.

Ici aussi on peut procéder autrement : on peut mener la perpendiculaire à l'axe transverse de la projection horizontale, chercher la droite du plan projetée horizontalement suivant cette perpendiculaire et mener enfin à la section les tangentes parallèles à cette droite du plan.

On peut déterminer d'une manière analogue les axes et les sommets de la projection verticale.

407. Sommet et axe d'une section parabolique. — Nous examinerons encore deux cas, suivant qu'il s'agit de la section dans l'espace ou de l'une quelconque de ses projections.

Sommet et axe dans l'espace. — La direction de l'axe étant la direction du point à l'infini, on commence par déterminer la direction de ce point (396). On détermine ensuite la direction perpendiculaire au moyen de deux opérations consécutives : un rabattement et un relèvement. On mène enfin à la section la tangente parallèle à cette direction, ce qui donne la tangente au sommet. Le point de contact de cette tangente est le sommet, et l'on obtient l'axe en menant par le sommet la parallèle à la direction du point à l'infini.

Sommet et axe en projection. — Soit par exemple à déterminer le sommet et l'axe de la projection horizontale. On mène la perpendiculaire δ à la direction du point à l'infini en projection horizontale, on construit la droite Δ du plan sécant projetée horizontalement en δ, et l'on mène à la section la tangente parallèle à Δ. La projection horizontale du point de contact de cette tangente donne le sommet de la projection horizontale, et l'on en déduit l'axe en menant par ce point la parallèle à la direction du point à l'infini.

On opérerait d'une manière analogue pour obtenir le sommet et l'axe de la projection verticale.

408. Sommets d'une section elliptique. — Pour déterminer les sommets et les axes d'une section elliptique, on commence d'abord par déterminer deux diamètres conjugués et l'on est ainsi ramené à un problème classique : *construire les axes d'une ellipse connaissant deux diamètres conjugués en grandeur et position.* Tout se réduit donc à la construction de deux diamètres conjugués. Il y a d'ailleurs encore deux cas à examiner, suivant que l'on veut déterminer les sommets ou deux diamètres conjugués dans l'espace ou en projection.

Construction de deux diamètres conjugués dans l'espace. — On mène à la section : 1° les tangentes parallèles à une direction du plan sécant; 2° les tangentes parallèles au diamètre qui passe par les points de contact des deux premières. Ce diamètre et celui qui joint les

points de contact de deux tangentes qui lui sont parallèles forment un système de deux diamètres conjugués. Par deux opérations consécutives, un rabattement et un relèvement, on en déduit alors les axes et les sommets.

Construction de deux diamètres conjugués d'une projection. — Soit, par exemple, à construire deux diamètres conjugués de la projection horizontale. Pour cela, rappelons que la propriété de deux diamètres d'être conjugués, est une propriété projective. Il en résulte que deux diamètres conjugués dans l'espace se projettent horizontalement suivant deux diamètres conjugués de la projection horizontale. Dès lors on est ramené au premier cas examiné.

On opérerait de même pour la projection verticale.

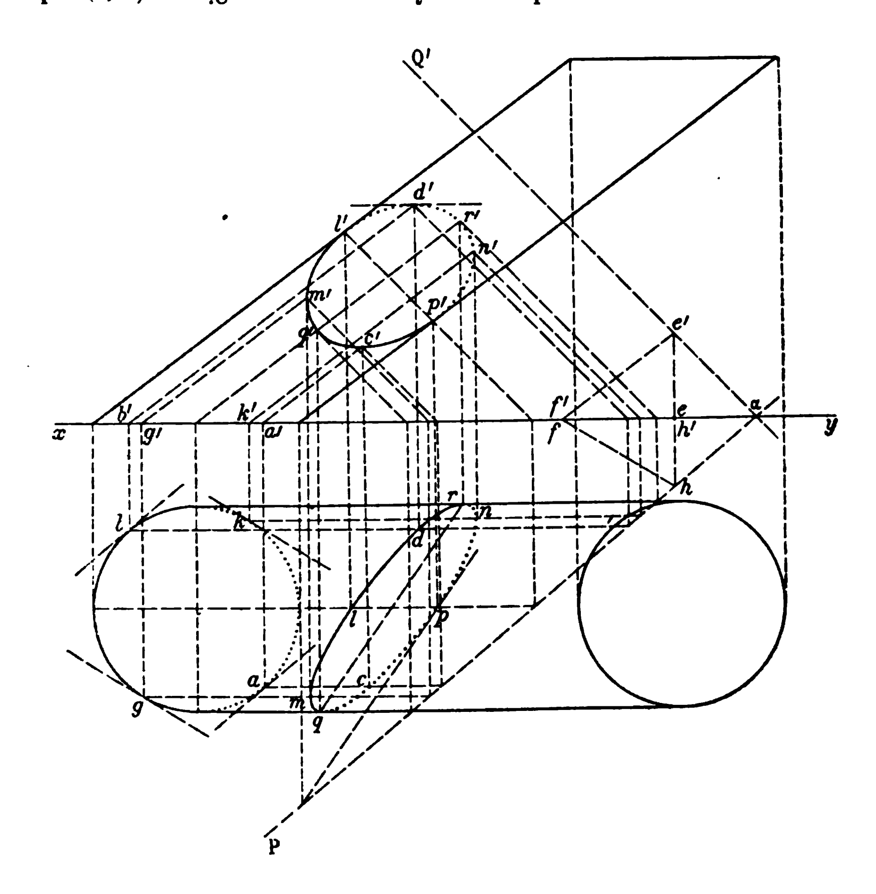
§ IV. — *Exemples de sections planes de cônes ou de cylindres.*

409. **Exemple I.** — *On coupe un cylindre à base circulaire reposant sur le plan horizontal par un plan* PαQ' ; *déterminer les points les plus hauts et les plus bas ainsi que les points le plus à droite et le plus à gauche de la section.*

Supposons que les génératrices du cylindre soient de front. Les points les plus hauts et les plus bas en projection horizontale sont alors confondus avec les points sur le contour apparent horizontal. On les a obtenus en cherchant les points de rencontre des génératrices de contour apparent horizontal avec le plan sécant, au moyen des plans de front qui passent par ces génératrices : ce sont, sur l'épure, les points (q, q') et (r, r').

Cherchons maintenant les points les plus hauts et les plus bas en projection verticale. Les tangentes en ces points étant horizontales, il faudra (403) mener au cylindre les plans tangents parallèles à la trace horizontale du plan sécant. Ces plans tangents coupent la base du cylindre suivant des tangentes parallèles à αP ; soient a et b les points de contact de ces tangentes. Les génératrices du cylindre qui passent par les points (a, a') et (b, b') coupent le plan sécant aux points (c, c') et (d, d'), qui sont les points demandés. En c et en d les tangentes à la projection horizontale n'ont pas été figurées sur l'épure, mais elles sont parallèles à Pα.

Cherchons enfin les points le plus à droite et le plus à gauche. Il faut pour cela (402) mener au cylindre les plans tangents parallèles à l'intersection du plan sécant avec un plan de profil. Si l'on prend, par exemple, le plan de profil qui passe par (e, e'), la droite ainsi obtenue a pour trace horizontale (h, h'). D'autre part, la parallèle menée par (e, e') aux génératrices du cylindre a pour trace horizontale le



point (f, f'). La trace horizontale du plan de ces deux droites étant hf, les plans tangents cherchés coupent la base du cylindre suivant deux tangentes parallèles à hf. Si g et k sont les points de contact de ces tangentes, les génératrices du cylindre qui passent par les points (g, g') et (k, k') coupent le plan sécant aux points demandés, (m, m') et (n, n').

Les diamètres $(lp, l'p')$ et $(qr, q'r')$ sont évidemment deux diamètres

conjugués de la section ; de sorte qu'on pourrait déterminer facilement soit les axes de cette section, soit les axes de ses deux projections (408).

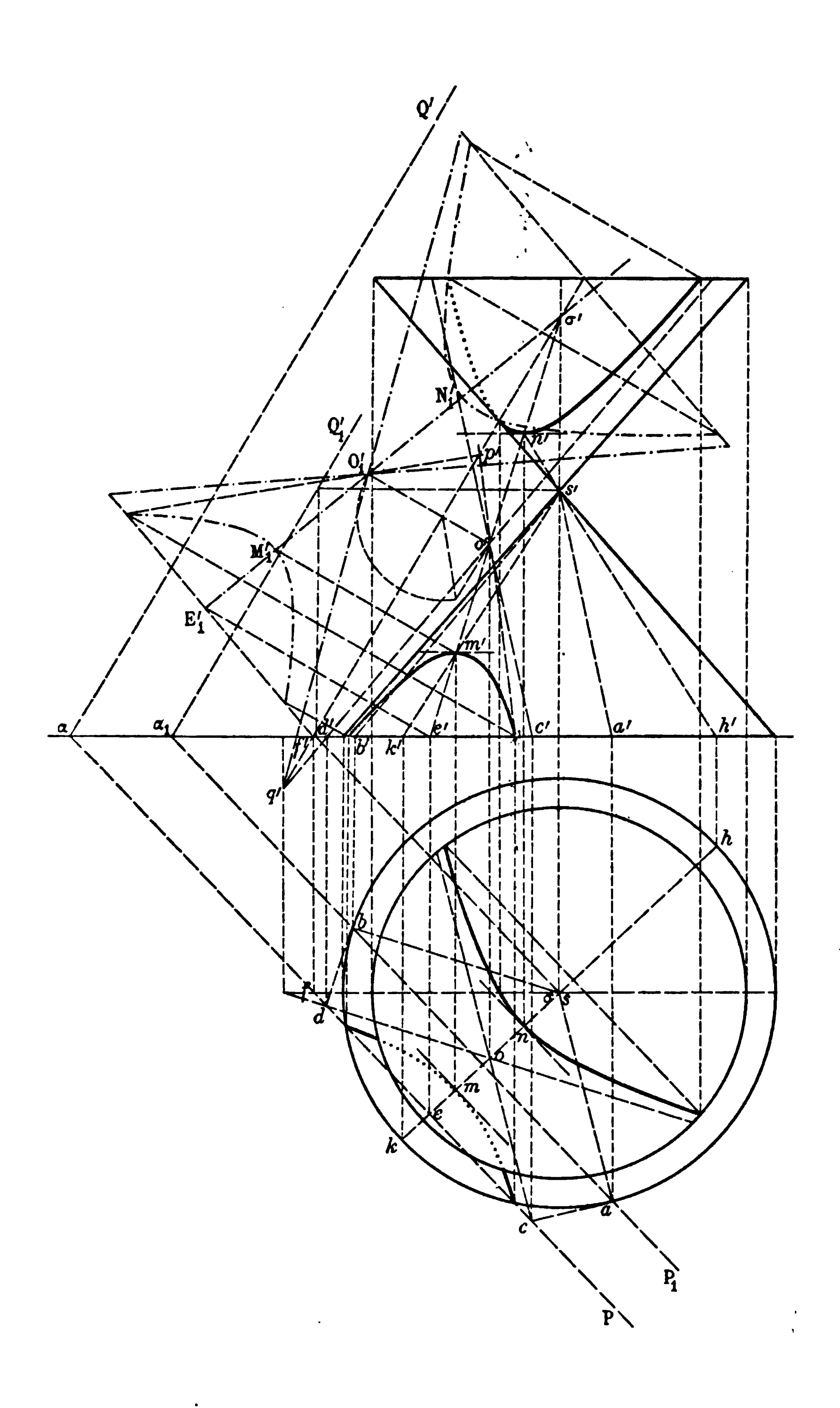
Dans l'épure, on a représenté la section tracée sur le cylindre supposé plein et limité à deux plans horizontaux dont l'un est le plan horizontal de projection.

410. **Exemple II.** — *Un plan* PαQ' *coupe un cône de révolution à axe vertical suivant une hyperbole; déterminer les asymptotes de cette hyperbole, ses axes et sa grandeur.*

Soit (s, s') le sommet du cône. Le plan $P_1\alpha_1Q'_1$ mené par ce point parallèlement au plan sécant coupe la base du cône en deux points a et b et, par suite, coupe le cône suivant deux génératrices $(sa, s'a')$ et $(sb, s'b')$, qui sont les directions asymptotiques de la section. Les asymptotes elles-mêmes sont les intersections du plan sécant avec les plans tangents au cône aux points à l'infini sur ces génératrices, c'est-à-dire avec les plans tangents au cône suivant ces mêmes génératrices. Les traces horizontales de ces plans tangents coupant Pα aux points respectifs (c, c') et (d, d'), en menant par ces points les parallèles aux directions asymptotiques on a les asymptotes de la section, dont le centre est d'ailleurs au point de rencontre (o, o') des asymptotes.

Pour trouver les axes et la grandeur de la section, rabattons-la sur le plan de front qui passe par l'axe du cône, en faisant tourner le plan sécant autour de la ligne de front $(\sigma f, \sigma' f')$. Si O'_1 est le rabattement du point (o, o'), on obtient le rabattement des asymptotes en joignant le point O'_1 aux points de rencontre de la projection verticale de la charnière avec les projections verticales des asymptotes : c'est ainsi qu'on a obtenu l'asymptote $q'O'_1$. Le rabattement de la section est déterminé dès qu'on a le rabattement des asymptotes et le rabattement d'un point.

En menant les bissectrices des asymptotes rabattues, on a le rabattement des axes. Sur l'épure on n'en a figuré qu'une $O'_1E'_1$ qui doit passer par σ'. La perpendiculaire $f'E'_1$ à cette droite menée par f' est le rabattement de la trace horizontale Pα du plan sécant, et, en relevant le point rabattu en E'_1, on obtient en $(\sigma e, \sigma' e')$ les projections de l'axe rabattu en $O'_1E'_1$. Enfin, le plan qui passe par l'axe du cône et par $(\sigma e, \sigma' e')$ coupe le cône suivant deux génératrices $(sk, s'k')$ et $(sh, s'h')$ dont les points de rencontre (m, m') et (n, n') avec $(\sigma e, \sigma' e')$



Q′
σ′
N′₁
n′
Q′₁
O′₁
p′
s′
M′₁
o′
E′₁
m′
α
α₁
d′
b′
k′
e′
c′
a′
h′
q′
h
b
f
d
o
s
n
m
e
k
a
c
P₁
P

sont les sommets de la section dans l'espace. Ces sommets sont rabattus en M'_1 et en N'_1, et, aux points (m, m') et (n, n'), les tangentes sont horizontales.

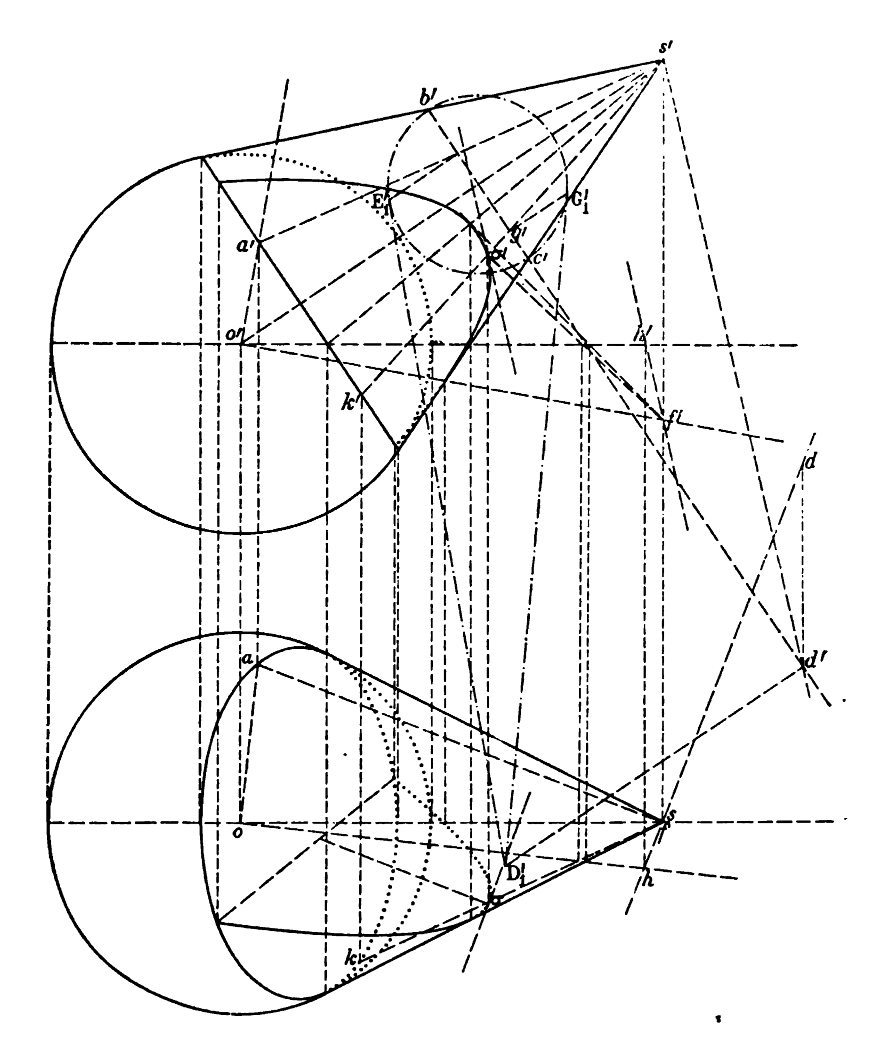
On aurait pu trouver les axes plus facilement en se servant de ce que le cône est de révolution autour d'un axe vertical. Mais nous avons préféré procéder autrement pour donner une application régulière de la méthode indiquée plus haut (406).

L'épure représente la section tracée sur le cône supposé vide et limité à deux plans horizontaux, dont l'un est le plan horizontal de projection.

411. Exemple III. — *On considère le cône circonscrit à une sphère* (o, o') *par un point* (s, s') *situé dans le plan de front du centre de la sphère. Par ce dernier point on mène le plan perpendiculaire au rayon* $(oa, o'a')$ *d'un point de la courbe de contact et l'on demande de déterminer l'axe et le sommet de la projection horizontale de la section ainsi obtenue.*

Le plan sécant est défini par une horizontale $(oh, o'h')$ et par une ligne de front $(of, o'f')$. Il est parallèle au plan tangent au cône au point (a, a') ; par conséquent la section est une parabole dont l'axe est parallèle à la génératrice $(sa, s'a')$. Si nous menons hf perpendiculaire à sa, pour obtenir le sommet de la projection horizontale de cette parabole il faut mener au cône les plans tangents parallèles à la droite du plan sécant projetée horizontalement en hf. La projection verticale de cette droite est $h'f'$, de sorte qu'il faut mener au cône les plans tangents parallèles à $(hf, h'f')$. Pour cela, et afin d'avoir des constructions dans les limites du dessin, prenons comme base du cône sa trace sur le plan de bout $b'c'$, et soit (d, d') l'intersection de ce plan avec la parallèle à $(hf, h'f')$ menée par le sommet du cône. Pour mener de ce point les tangentes à la base du cône, rabattons autour de $b'c'$ sur le plan de front mené par os. Le rabattement de la base est la circonférence décrite sur $b'c'$ comme diamètre, celui du point (d, d') est le point D'_1 ; il en résulte que les tangentes sont rabattues en $D'_1E'_1$ et en $D'_1G'_1$. Le point E'_1 relevé donne un point situé sur la génératrice $(sa, s'a')$, ce qui fournit le sommet de la parabole qui est à l'infini. Le point G'_1 relevé donne un point sur la génératrice $(sk, s'k')$, laquelle rencontre le plan sécant au point (σ, σ') dont la projection horizontale σ est le sommet demandé.

On a représenté, sur l'épure, le système formé par la sphère et le cône circonscrit supposés pleins, le cône étant limité à sa courbe de



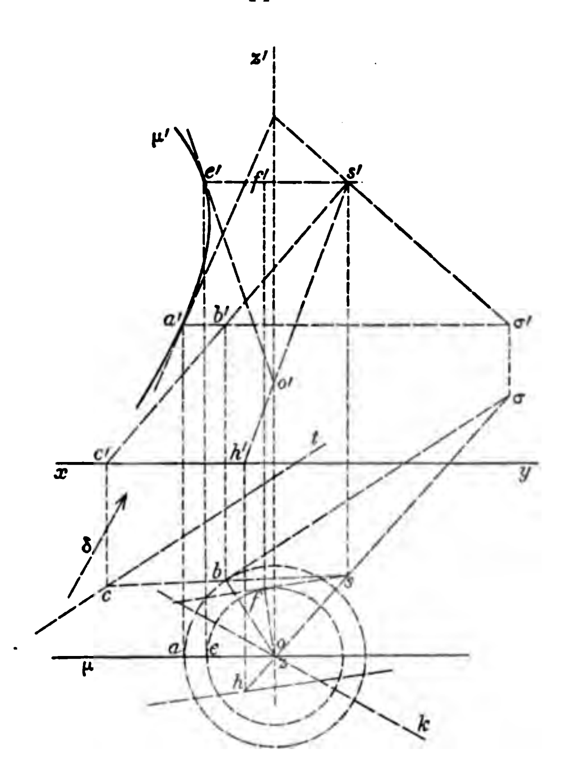
contact avec la sphère. La ponctuation de cette courbe et celle de la section ont été établies d'après ces hypothèses.

412. Traces d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à une surface de révolution ; ombres portées sur les plans de projection. — On peut

rattacher aux sections planes des cônes la détermination des ombres portées par une surface de révolution sur les plans de projection ou, ce qui revient au même, la détermination des traces, sur les plans de projection d'un cône ou d'un cylindre circonscrit à une surface de révolution.

Proposons-nous, par exemple, de construire la trace horizontale d'un cône circonscrit à une surface de révolution à axe vertical. Nous allons montrer comment on peut déterminer successivement : 1° un point quelconque et la tangente en ce point ; 2° les points en lesquels la tangente est parallèle à une direction donnée du plan horizontal ; 3° les points à l'infini et les asymptotes.

Construction d'un point et de la tangente en ce point. — Soit $(oz, o'z')$ l'axe de la surface dont nous supposerons connue la méridienne prin-



cipale (μ, μ'), et soit (s, s') le sommet du cône circonscrit. Construisons d'abord un point (b, b') de la courbe de contact de ce cône et de

la surface au moyen du parallèle du point (a, a'), puis menons la génératrice $(sb, s'b')$ du cône. La trace horizontale (c, c') de cette droite sera un point de la trace horizontale du cône.

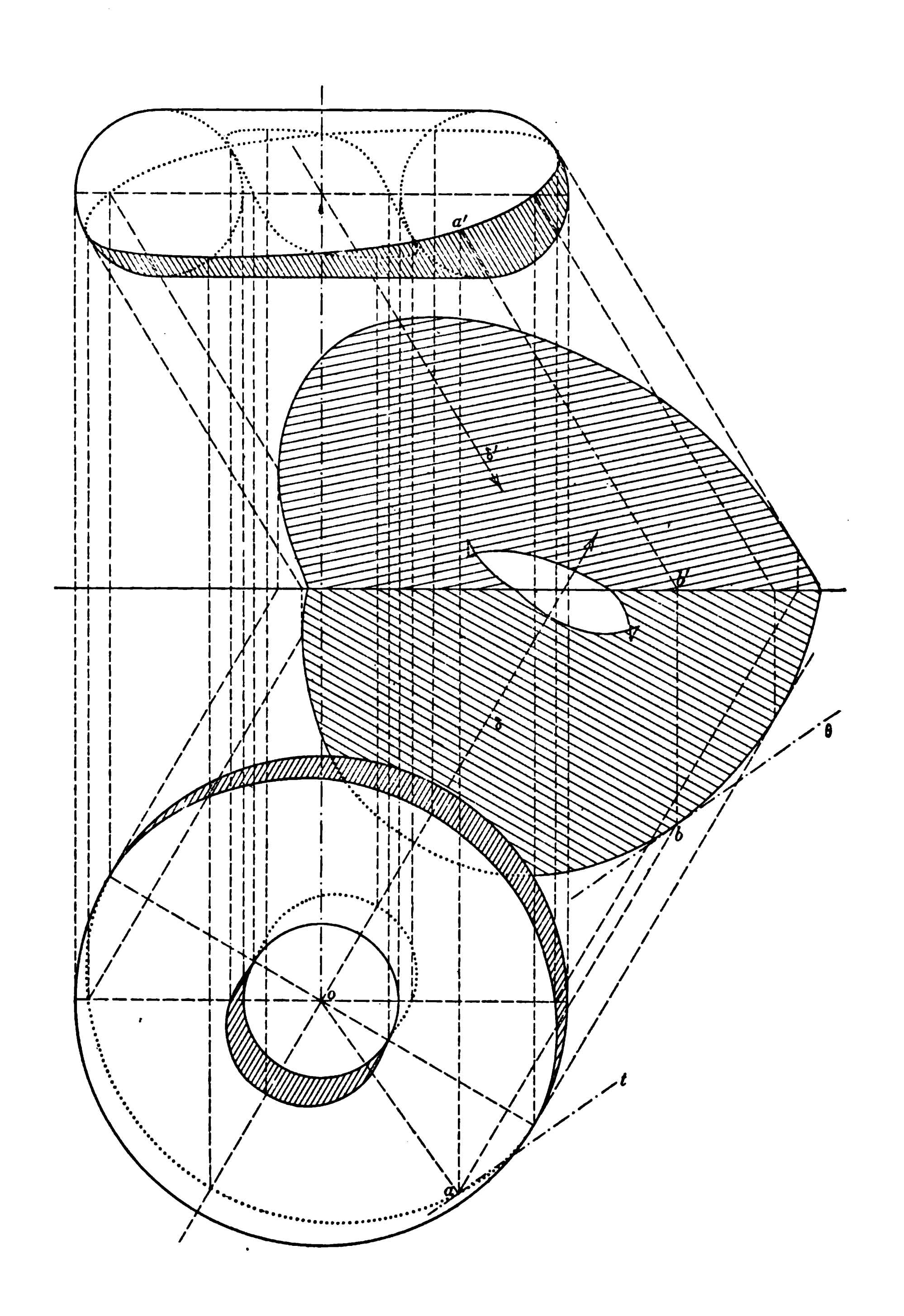
La tangente au point (c, c') à cette courbe est la trace horizontale du plan tangent au cône suivant $(sb, s'b')$, c'est-à-dire la trace horizontale du plan tangent à la surface au point (b, b'). Ce plan tangent étant perpendiculaire au méridien du point de contact, la tangente demandée n'est autre que la parallèle ct à la tangente en b au parallèle du point (a, a').

Points en lesquels la tangente est parallèle à une direction donnée du plan horizontal. — Soit δ cette direction et appelons (m, m') le point cherché. La trace horizontale du plan tangent au cône suivant $(sm, s'm')$ est parallèle à δ. D'autre part, si l'on appelle N le point de contact de ce plan avec la surface, ce même plan est perpendiculaire au plan du méridien qui passe par N. Le plan de ce méridien a donc sa trace horizontale ok perpendiculaire à δ, et les points tels que N sont situés sur ce méridien. Il est dès lors facile de les déterminer (347), et en prenant la trace horizontale de la génératrice SN, on aura l'un des points demandés. On obtiendrait de même les autres.

On peut en particulier obtenir de cette manière les points les plus hauts et les plus bas, ainsi que les points le plus à droite et le plus à gauche.

Points à l'infini et asymptotes. — Un point de la trace horizontale du cône circonscrit passe à l'infini quand la génératrice correspondante est horizontale. Mais les génératrices du cône sont tangentes à la surface; donc les directions asymptotiques sont les tangentes menées du point (s, s') aux parallèles dont le plan passe par ce point. Si oe est la projection horizontale de l'un de ces parallèles, sf est une des directions asymptotiques cherchées. On peut remarquer que le point (f, f') est situé sur un méridien limite.

Pour avoir l'asymptote correspondante, il suffit de prendre la trace horizontale du plan tangent au point (f, f'). Or, le cône des tangentes relatif au parallèle du point (f, f') a son sommet en (o, o'). Comme le plan tangent au point (f, f') passe par (s, s') et par (o, o'), il contient la droite $(so, s'o')$ dont la trace horizontale est (h, h'). On aura donc l'asymptote parallèle à sf en menant du point h la parallèle à cette droite.


a'
s'
b'
s
θ
b
o
t
a

413. Application. — *Ombres portées par un tore à axe vertical sur les plans de projection.*

L'épure ci-contre représente l'ombre propre et les ombres portées sur les plans de projection par un tore à axe vertical éclairé par des rayons parallèles à la direction (δ, δ'). Le contour de l'ombre propre, c'est-à-dire la courbe de contact du cylindre circonscrit parallèlement à la direction (δ, δ'), a été déterminé par la méthode exposée au nº 364. Pour ne pas surcharger le dessin, on a supprimé toutes les constructions qui se rattachent à la détermination de cette courbe, pour ne laisser subsister que celles qui sont relatives à la détermination des ombres portées. Quant à celles-ci, elles ont été déterminées par la méthode exposée au nº précédent. Par exemple, on a obtenu un point (b, b') de l'ombre portée sur le plan horizontal en déterminant la trace horizontale du rayon lumineux qui passe par le point (a, a') de la courbe de contact.

Pour obtenir la tangente au point b, on a observé qu'elle est parallèle à la tangente en a à la projection horizontale du parallèle du point (a, a'). Cette tangente at étant perpendiculaire au rayon oa, la tangente $b\theta$ au point b est perpendiculaire à oa.

Nous n'insisterons pas davantage sur l'exécution de cette épure, les développements du nº précédent nous dispensant de donner de plus longs détails.

Ajoutons seulement que, pour le tracé des contours des ombres portées, on a observé les règles habituelles de la ponctuation.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE PREMIER

1. On considère l'hyperboloïde à une nappe engendré par une droite qui tourne autour d'un axe vertical, et l'on circonscrit un cône de sommet donné à cet hyperboloïde. Trouver la trace du cône sur le plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde, donner la nature de cette trace, et construire la tangente en un point.

2. Deux points sont définis par leurs projections horizontales et par leurs cotes. Mener par l'un d'eux une droite passant à une distance donnée de l'autre et à une distance donnée d'une droite donnée.

3. Une parabole située dans le plan horizontal est la projection horizontale d'une section droite d'un cylindre coupé par un plan de bout ; trouver les projections du sommet de la parabole d'intersection.

4. Mener une horizontale s'appuyant sur deux droites données et faisant un angle donné avec l'une d'elles.

5. On coupe par le premier plan bissecteur le cône de révolution engendré par une droite A tournant autour d'une droite B, qu'elle rencontre. Construire un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point ; trouver les points le plus à droite et le plus à gauche.

6. On donne une sphère et un plan ; construire la section faite par ce plan dans le cône circonscrit à la sphère par un point situé dans le plan de front du centre.

7. Construire la trace d'un cône circonscrit à une sphère sur le plan horizontal passant par le centre de la sphère.

8. La trace horizontale d'un cône de sommet donné est un cercle. On coupe ce cône par un plan déterminé par sa trace horizontale et par l'angle qu'il fait avec le plan horizontal. Trouver en quels points de la section le plan est normal au cône.

9. On donne la projection horizontale et la cote du sommet d'un cône dont la base est une ellipse donnée dans le plan horizontal. On coupe ce cône par un plan passant par une droite AB du plan horizontal et faisant un angle de 30° avec celui-ci ; trouver les points de la section en lesquels la projection horizontale de la tangente passe par un point donné du plan horizontal.

10. Un cylindre a pour base une hyperbole dans le plan horizontal et ses génératrices sont parallèles à une direction donnée. On coupe le cylindre par un plan parallèle à la ligne de terre ; construire un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point ; trouver ensuite les asymptotes.

11. Une sphère étant éclairée par un point lumineux, déterminer les ombres portées sur les deux plans de projection. Construire les axes et les sommets des ombres portées, ainsi que les points où ces ombres rencontrent la ligne de terre.

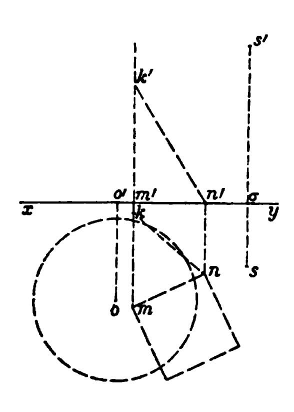
12. Construire une horizontale de longueur donnée s'appuyant sur deux droites données.

13. On donne deux points M et O. Les coordonnées du point M, exprimées en millimètres, sont : 33; 103; 40; les coordonnées du point O sont de même : 0; 75; 0. La verticale du point O est l'axe d'un cône de révolution passant par M et dont le demi-angle au sommet est de 30°. On coupe ce cône : 1° par le plan P qui passe par le milieu de la hauteur du cône et est parallèle au plan tangent en M; 2° par un plan Q qui passe par M, par le milieu de la hauteur et qui fait un angle de 50° avec l'axe du cône. Il y a deux plans Q répondant à ces conditions, et on choisira celui de ces plans dont les horizontales sont le moins inclinées sur le plan vertical.

Représenter la partie solide du cône située au-dessus du plan horizontal, en arrière du plan P et au-dessus du plan Q.

14. On donne dans un plan horizontal un cercle de 50^{mm} de rayon. C'est la base commune à deux cônes droits de 100^{mm} et de 50^{mm} de hauteur. On considère le solide annulaire compris entre les deux cônes, et une droite horizontale passant par le milieu de la hauteur du plus petit cône et inclinée à 45° sur le plan vertical. Par cette droite on fait passer deux plans inclinés à 45° sur le plan horizontal. On demande de représenter la partie du solide compris entre les deux cônes et qui est située en dessus des deux plans sécants.

15. Un cône a pour base dans le plan horizontal une circonférence (o, o') dont le rayon est égal à 90^{mm}; $xo' = 104^{mm}$, $o'o = 108^{mm}$. Le sommet (s, s') du cône est ainsi défini : $x\sigma = 250^{mm}$, $\sigma s' = 175^{mm}$, $\sigma s = 70^{mm}$.



Un prisme a pour base dans le plan horizontal un carré construit sur mn et au-dessous : $xm' = 123^{mm}$, $xn' = 203^{mm}$, $m'm = 116^{mm}$, $n'n = 78^{mm}$.

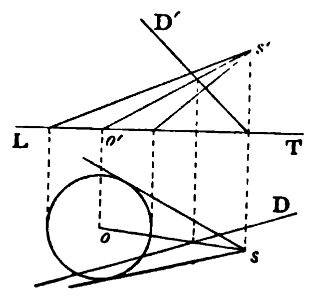
Une arête de ce prisme est la droite $(nk, n'k')$ joignant le point (n, n') au point (k, k') situé dans le même plan de profil que le point (m, m') : $m'k' = 130^{mm}$, $m'k = 10^{mm}$.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du cône et du prisme; 2° de représenter le cône entaillé par le prisme et limité au plan horizontal.

(Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.) (R. Malloizel.)

16. On donne un cube dont une diagonale est verticale et a 120^{mm} de longueur. Une arête AC du cube est inclinée à 53° sur le plan horizontal. Le point A est en arrière et à droite du point C.

Un cylindre de révolution à axe vertical a sa base située sur le plan de front du pied de la diagonale verticale du cube et à 10^{mm} de ce point; son rayon est 35^{mm}.

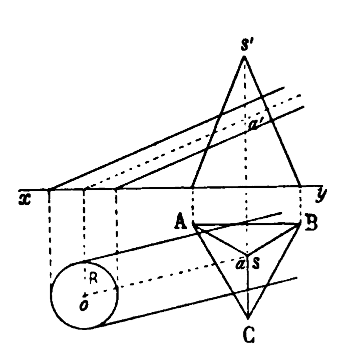


On demande de représenter la partie solide du cube située en dehors du cylindre.

17. Etant donné un cône oblique à base circulaire, on mène par un point de son axe SO une droite D et par cette droite deux plans quelconques.

Construire l'intersection de ces plans avec la surface dudit cône.

(École des mines de Saint-Etienne, concours de 1890.)



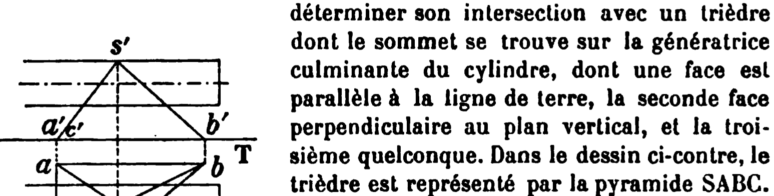
18. $Oa = 5R$, $s'a' = 2R$, $AB = 3R$.

Intersection d'un cylindre oblique à base circulaire avec une pyramide triangulaire droite dont l'axe rencontre celui du cylindre, et dont une face est parallèle à la ligne de terre.

Tracer les ellipses de section plane et déterminer en vraie grandeur celle de la face parallèle à la ligne de terre.

(École des mines de Saint-Étienne, concours de 1891.)

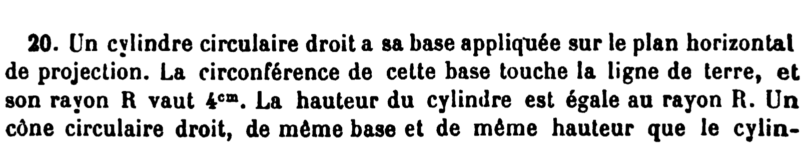
19. Etant donné un cylindre de révolution parallèle à la ligne de terre, déterminer son intersection avec un trièdre dont le sommet se trouve sur la génératrice culminante du cylindre, dont une face est parallèle à la ligne de terre, la seconde face perpendiculaire au plan vertical, et la troisième quelconque. Dans le dessin ci-contre, le trièdre est représenté par la pyramide SABC.



Représenter à part le solide commun, rabattre ses trois faces planes et développer sa face cylindrique.

(École des mines de Saint-Étienne, concours de 1894.)

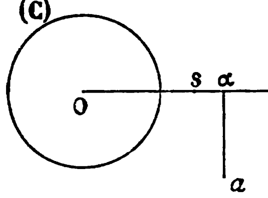
20. Un cylindre circulaire droit a sa base appliquée sur le plan horizontal de projection. La circonférence de cette base touche la ligne de terre, et son rayon R vaut 4^{cm}. La hauteur du cylindre est égale au rayon R. Un cône circulaire droit, de même base et de même hauteur que le cylin-



dre, est superposé à ce dernier de manière que la base du cône coïncide avec la base supérieure du cylindre. L'arête SA du cône, S étant le sommet, est parallèle au plan vertical de projection. Cela posé, on demande de construire: 1° les projections de l'ensemble des deux solides ; 2° les projections et la grandeur de la section faite par un plan perpendiculaire à l'arête SA en son milieu ; 3° les parties du plan horizontal de projection cachées par l'ensemble des deux corps, l'œil étant placé sur la verticale du point A, au-dessus de ce point, et à une distance égale à $\frac{5}{3}$R.

(*École de Saint-Cyr, concours de 1874.*)

21. Un cône oblique à base circulaire a pour base une circonférence (C) de rayon égal à 35mm, située dans le plan horizontal de cote zéro.



Son sommet S est déterminé par sa projection *s* située à une distance OS = 50mm du point O et par sa cote égale à 109mm.

a est la projection horizontale d'un point A de cote égale à 30mm. La distance *aα* au plan vertical OS est égale à 40mm, et la distance Oα à 60mm.

Mener par le point A un plan qui détermine dans le cône donné une section antiparallèle (C′). Construire la projection horizontale de cette section, déterminer ses axes et les points qui se trouvent sur le contour apparent du cône.

Construire les projections des sphères passant : 1° par la base (C) et le sommet S; 2° par la circonférence (C′) et le sommet S; 3° par les deux circonférences (C) et (C′).

Les plans d'intersection de ces trois sphères prises deux à deux se coupent suivant une même droite; la déterminer.

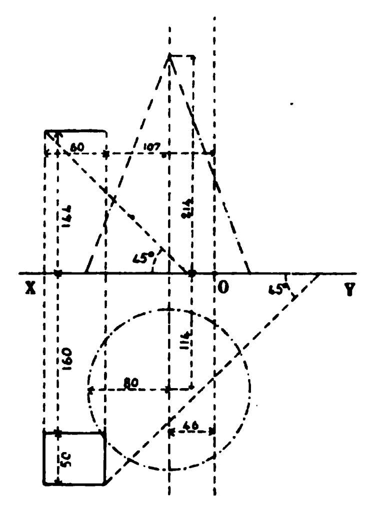
(*École navale, concours de 1894.*)

22. Un tronc de cône droit s'appuie par sa grande base circulaire sur le plan horizontal de projection. Le rayon R de cette grande base vaut 7cm, et son centre C est à une distance de 8cm de la ligne de terre. L'arête latérale du tronc de cône a une longueur égale au rayon R et fait un angle de 45° avec le plan horizontal. Dans l'intérieur de ce tronc de cône, et sur le même axe, est placé un petit cône renversé, dont le sommet est au point C, et dont la base coïncide avec la base supérieure du tronc. Soit AB l'arête latérale du tronc de cône qui est parallèle au plan vertical de projection, le point A étant sur la grande base, et le point B sur la petite base ; on demande : 1° de construire les projections de l'ensemble des deux corps; 2° de construire les projections des sections faites dans les deux corps par un plan perpendiculaire à l'arête AB, au point B ; 3° de mener par le point où la verticale du point A perce le plan sécant, une

tangente à la section faite dans le petit cône ; 4° de trouver le point où cette tangente perce le tronc de cône.

(*Saint-Cyr*, *1875*.)

23. On donne un cône de révolution à axe vertical posé sur le plan horizontal de projection et un parallélépipède défini par une base rectangulaire située dans un plan horizontal et par la direction de ses génératrices. On demande de représenter la portion de ce parallélépipède comprise entre sa base et sa courbe d'entrée dans le cône.



Les cotes sont fournies par le croquis ci-contre, la ligne de terre étant prise parallèlement aux petits côtés de la feuille et à mi-hauteur de cette feuille, et le point O étant le milieu de la ligne de terre limitée aux grands côtés de la feuille.

Les lignes inclinées à 45° sur la ligne de terre figurent la direction des génératrices du parallélépipède.

(*École des Ponts et chaussées*, *Cours préparatoires*, *concours de 1895*.)

24. On donne un point S dans l'espace, situé à 45mm au-dessus du plan horizontal, et à 6cm en avant du plan vertical de projection. Ce point est le sommet de deux cônes droits à base circulaire. Le premier de ces deux cônes repose par sa base sur le plan horizontal de projection : son axe est en conséquence vertical ; le second cône a son axe perpendiculaire au plan vertical de projection, contre lequel il s'appuie par sa base. Le rayon de base de chacun de ces deux cônes est de 36mm. On donne aussi un point O, situé sur l'axe du second cône, entre la base et le sommet S, et à 17mm de ce sommet. Cela posé, on demande : 1° de construire les projections de l'ensemble des deux corps ; 2° de mener par le point O un plan vertical faisant un angle de 45° avec le plan vertical de projection, et de construire les projections des sections faites dans les deux cônes par ce plan ; 3° de mener, par l'un des points où la trace horizontale du plan sécant rencontre la base du premier cône, un plan tangent à ce premier cône ; 4° enfin, de mener un plan tangent au second cône perpendiculairement à ce premier plan tangent.

(*Saint-Cyr*, *1877*.)

25. Construire la pyramide triangulaire SABC dont la base ABC est appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal. Le dièdre AB vaut

69°, le sommet B est sur xy et l'arête AB est perpendiculaire à cette ligne xy. On donne : AB = 11^cm^,1 ; BC = 12^cm^,5 ; AC = 14^cm^,1 ; SB = 11^cm^,8 ; SA = 12^cm^,1.

Un cercle situé sur le plan vertical, dans l'angle $b's'c'$, est tangent aux deux côtés de cet angle et a pour rayon 3^cm^,6 ; ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical ; construire l'intersection de ce cylindre avec la pyramide. On indiquera les tracés effectués pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la pyramide supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le cylindre.

(Saint-Cyr, 1883.)

26. On donne dans le plan vertical de projection un cercle tangent à xy dont le rayon égale 3^cm^,1 ; le pentagone régulier inscrit dans ce cercle et dont un sommet A est sur xy est la base d'un prisme droit. Un cône droit dont le sommet est situé dans le plan de profil du point A, à 8^cm^,4 au-dessus du plan horizontal et à 6^cm^,9 en avant du plan vertical, a pour base, sur le plan horizontal, un cercle dont le rayon égale 6^cm^.

On demande l'intersection du cône et du prisme. On indiquera le tracé des constructions effectuées pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Dans la mise à l'encre, on représentera la portion du prisme qui est contenue dans le cône.

(Saint-Cyr, 1884.)

27. On donne un point A sur xy, un point S distant du plan horizontal de 7^cm^,8, du plan vertical de 5^cm^,1 et du point A de 12^cm^,4. Construire le tétraèdre SABC dont la base ABC est sur le plan horizontal de projection, sachant que le plan SBC est perpendiculaire à l'arête SA, et que les angles dièdres AB et AC valent chacun 68°. On aura soin de placer le point A le plus à gauche possible.

Construire l'intersection de cette pyramide avec le cylindre de révolution qui a SA pour axe, et pour rayon 5^cm^,5.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est seul et que le solide commun au cylindre et à la pyramide est enlevé.

(Saint-Cyr, 1886.)

28. On donne un plan $P\alpha P'$ dont les traces font avec xy (x à gauche, y à droite) deux angles $P\alpha y$ et $P'\alpha y$ égaux chacun à 45° ; sur la trace horizontale un point A, dont l'éloignement est 4^cm^, et sur la trace verticale un point B, dont la cote est 6^cm^,2. La droite AB est le côté d'un carré situé dans le plan $P\alpha P'$, à droite de AB ; ce carré est la base d'un cube situé au-dessus du plan donné.

Déterminer l'intersection du cube avec le cylindre droit ayant pour trace verticale un cercle de $6^{cm},5$ de rayon, situé au-dessus de xy et tangent à cette ligne au point a', projection verticale du point A.

Représenter la partie du solide cubique comprise dans le cylindre.

(*Saint-Cyr, 1889.*)

29. Un cône de révolution a pour base sur le plan horizontal un cercle O de 50^{mm} de rayon, tangent à la ligne de terre, et il a une hauteur de 112^{mm}. On mène : 1° par le milieu A de la génératrice de front (celle de gauche), le plan parallèle au plan tangent au cône suivant la génératrice opposée ; 2° la normale au cône en A qui rencontre le plan horizontal en B, les tangentes BC et BD au cercle O et enfin les plans ABC et ABD.

On demande de représenter par ses projections le solide commun au cône et au tétraèdre que forment le plan horizontal et les trois plans précédents.

(*Saint-Cyr, 1890.*)

30. Une droite oS de l'espace a pour trace horizontale o ; la cote de son point S égale 20^{cm} ; sa pente est 1 ; sa projection os est parallèle au bord inférieur de la feuille ; o est à 14^{cm} du bord inférieur et à 9^{cm} du bord de gauche.

Le point S est le sommet d'un cône ayant pour base dans le plan horizontal le cercle de centre o, de rayon égal à 8^{cm}.

La projection horizontale os de la droite oS coupe la circonférence o en deux points m et n, le point n entre o et s. Par une droite de l'espace de pente 2, ayant sa trace horizontale au milieu de om et coupant la verticale de o au-dessus du plan horizontal, passent deux plans P et P_1 de pente 4. Parallèlement à cette même droite et par les horizontales perpendiculaires à on en o et en n, on mène les deux plans Q et Q_1. Les traces horizontales de ces quatre plans déterminent un trapèze isocèle qui est la base d'un prisme dont les quatre plans forment les faces latérales.

Représenter la projection du corps opaque commun à ce cône et à ce prisme.

Mener à la projection horizontale des sections du cône par les plans P et P_1 les tangentes parallèles aux côtés du trapèze de base du prisme.

Coter à l'encre rouge les points de contact de ces tangentes et les autres points remarquables.

Inutile de tracer à l'encre les lignes de construction d'un point quelconque de la section.

(*Saint-Cyr, 1894.*)

31. Tracer à 18^{cm} du bord inférieur de la feuille une droite sur laquelle on prendra $sa = 10^{cm}$, $sb = 25^{cm}$, $sh = 27^{cm}$, s étant à 1^{cm} du bord de la feuille à droite du dessinateur. s est la projection horizontale du sommet S d'un cône de révolution ; la cote de S égale 14^{cm} ; a et b sont

les traces horizontales des deux génératrices du cône situées dans le plan projetant horizontalement son axe.

Un triangle isocèle *cad* situé dans le plan horizontal a sa base *cd* égale à 5^{cm} ; sa hauteur relative à *cd* est *ah*. Ce triangle *cad* est la base d'un prisme dont les arêtes ont une pente égale à $\frac{10}{27}$, l'arête issue de *a* coupant S*s* entre S et *s*.

Représenter la projection horizontale de la partie du cône solide et opaque extérieure au prisme et comprise entre le plan horizontal et son sommet.

(*Saint-Cyr, 1896.*)

CHAPITRE II

DÉVELOPPEMENT DE LA SURFACE LATÉRALE D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE; TRANSFORMÉE D'UNE SECTION PLANE

---

§ 1. — *Développement de la surface latérale d'un cylindre.*

414. Définition. — Nous avons indiqué plus haut (208) le moyen d'effectuer le développement de la surface latérale d'un prisme. On appelle *développement* de la surface latérale d'un cylindre la limite vers laquelle tend le développement de la surface latérale d'un prisme inscrit dont le nombre des faces augmente indéfiniment, de manière que la distance de deux arêtes consécutives quelconques tende vers zéro.

415. Transformée d'une ligne tracée sur la surface du cylindre. — Considérons, d'après cela, une surface cylindrique, et soit σ (*fig.* 1) une ligne quelconque tracée sur cette surface. Les arêtes d'une surface prismatique inscrite dans le cylindre rencontrent σ en des points α, β, γ, ... qui sont les sommets d'une ligne polygonale tracée sur la surface prismatique et inscrite

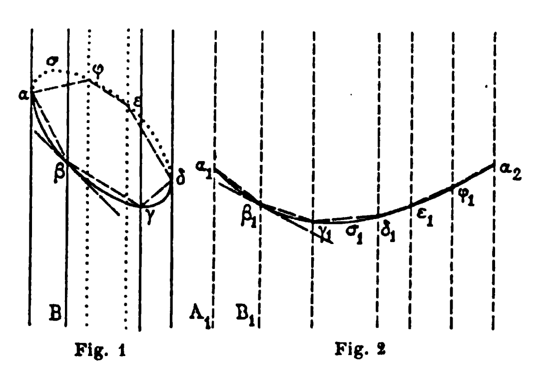


Fig. 1 Fig. 2

dans la ligne σ. Dans le développement, la *transformée* (208) de cette

ligne polygonale est une autre ligne palygonale $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ (*fig.* 2), qui jouit des propriétés suivantes (208) :

1° Elle a le même périmètre que la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$ parce que ses côtés ont des longueurs respectivement égales à celles des côtés du polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$;

2° Ses côtés rencontrent les arêtes $A_1\alpha_1$, $B_1\beta_1$, ... sous des angles respectivement égaux aux angles sous lesquels les côtés correspondants du polygone $\alpha\beta\gamma\ldots$ rencontrent les arêtes du prisme inscrit.

Supposons alors que le nombre des faces du prisme inscrit augmente indéfiniment de manière que la distance de deux arêtes consécutives quelconques tende vers zéro. La ligne polygonale $\alpha\beta\gamma\ldots$ a pour limite la ligne σ et sa transformée $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ a pour limite une ligne σ_1 qu'on appelle la *transformée* de la ligne σ.

416. **Propriétés du développement.** — Si l'on considère deux côtés correspondants quelconques $\beta\gamma$ et $\beta_1\gamma_1$ de la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma\ldots$ et de sa transformée $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$, ils sont égaux ; il en résulte que ces deux lignes polygonales ont des périmètres égaux. Or, par définition, le périmètre de la ligne σ est la limite du périmètre de la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma\ldots$ inscrite quand le nombre des côtés de cette ligne augmente indéfiniment de manière que chaque côté tende vers zéro ; de même, le périmètre de la ligne σ_1 est la limite dans les mêmes conditions du périmètre de la ligne polygonale $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$; donc les deux lignes σ et σ_1 ont le même périmètre.

D'autre part, les angles $B\beta\gamma$ et $B_1\beta_1\gamma_1$ sont égaux quelles que soient les longueurs des deux cordes $\beta\gamma$ et $\beta_1\gamma_1$; il en résulte que les limites de ces angles sont égales. Comme les positions limites des deux droites indéfinies $\beta\gamma$ et $\beta_1\gamma_1$ sont les tangentes respectives aux courbes σ et σ_1 en β et en β_1, on peut en conclure que la tangente en un point quelconque de σ_1 fait avec la direction des génératrices, dans le développement, un angle égal à celui que la tangente à σ, au point correspondant, fait avec la génératrice du cylindre qui passe par ce point.

Nous pouvons donc dire, d'après cela :

1° *Que le développement conserve les longueurs des lignes tracées sur le cylindre ;*

2° *Qu'il conserve les angles de ces lignes avec les génératrices et, par suite, qu'il conserve les angles de ces lignes entre elles.*

En particulier, une section droite du cylindre coupant les généra-

trices sous un angle droit aura pour transformée une ligne droite de même longueur que la section droite.

417. **Marche à suivre pour construire la transformée d'une ligne.** — Pour pouvoir construire la transformée d'une ligne tracée sur la surface d'un cylindre, quand on développe cette surface sur un plan, il faut savoir construire un point quelconque de cette transformée et la tangente en ce point.

Construction d'un point de la transformée. — On construit la section droite du cylindre et on la *rectifie*, c'est-à-dire qu'on en détermine le périmètre. Supposons en premier lieu que l'on puisse trouver le périmètre exact de la section droite. Pour avoir alors le point β_1 de σ_1 (*fig.* 2) qui correspond au point β de σ(*fig.* 1), on trace une droite A_1A_2

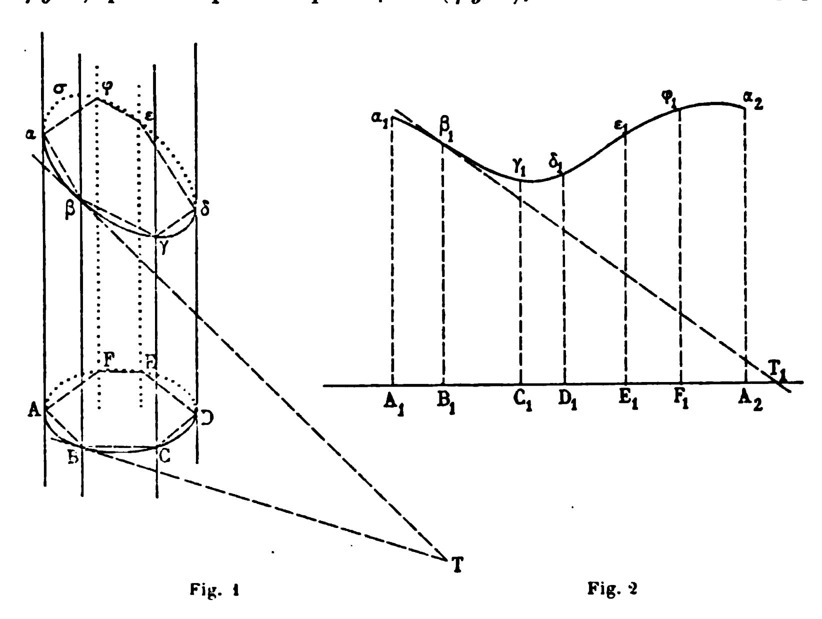


Fig. 1 Fig. 2

ayant pour longueur le périmètre de la section droite; puis, si l'on suppose le cylindre ouvert suivant la génératrice $A\alpha$, et si B est le point de rencontre de la section droite avec la génératrice qui passe par β, on porte une longueur A_1B_1 égale à la longueur de l'arc AB de la section droite, on mène la perpendiculaire $B_1\beta_1$ à A_1A_2 et l'on prend $B_1\beta_1 = B\beta$; on a ainsi le point β_1. On construit de la même manière autant de points que l'on veut de la transformée.

Supposons maintenant, ce qui est le cas général, qu'on ne sache pas trouver le périmètre de la section droite. Alors, en se basant sur la définition de la longueur d'un arc de courbe, on inscrit dans la section droite un polygone ABC... d'un nombre de côtés assez grand pour que chaque côté puisse être considéré, sans erreur sensible, comme égal à l'arc qu'il sous-tend. On porte ensuite sur une droite indéfinie A_1A_2 des longueurs successives A_1B_1, B_1C_1, ... égales respectivement aux côtés AB, BC, ... du polygone ABC... On a ainsi le développement approché de la section droite. Par les points A_1, B_1, C_1, ... on mène les perpendiculaires à A_1A_2, ce qui donne les positions approchées des génératrices $A\alpha$, $B\beta$, ... dans le développement ; on porte ensuite $A_1\alpha_1 = A\alpha$, $B_1\beta_1 = B\beta$, ..., de sorte qu'on a en α_1, β_1, γ_1, ... les positions approchées de α, β, γ, ... dans le développement. On joint enfin les points α_1, β_1, γ_1, ... par un trait continu et l'on obtient la transformée approchée de σ.

Tangente en un point de la transformée. — Proposons-nous, par exemple, de construire la tangente au point β_1 qui correspond au point β. Soient βT la tangente en β à la courbe σ, T le point de rencontre de cette tangente avec la tangente à la section droite au point B situé sur la même génératrice que β : BT est ce qu'on appelle la *sous-tangente* en β. Si l'on suppose le problème résolu, et si l'on appelle β_1T_1 la tangente cherchée, les propriétés du développement (416) montrent que les deux triangles βBT et $\beta_1B_1T_1$ sont égaux. Supposons, pour fixer les idées, que le sens de B vers T soit le même que le sens de B vers C ; en portant alors $B_1T_1 = BT$ dans le sens de B_1 vers C_1, on obtient le point T_1, et il n'y a plus qu'à le joindre au point β_1 pour avoir la tangente à σ_1 en ce point.

418. Remarque. — D'après ce qui précède, pour effectuer le développement d'une surface cylindrique, il faut construire la section droite et la rectifier au moins approximativement, puis déterminer les longueurs des portions de génératrices.

Pour rectifier la section droite, il faut l'avoir en vraie grandeur. Si on l'a par ses projections, on en détermine la vraie grandeur au moyen d'un rabattement.

Pour déterminer facilement les longueurs des portions de génératrices on amène ces génératrices à être parallèles à l'un des plans de projection par un changement de plan.

§ II. — *Développement de la surface latérale d'un cône.*

419. **Définition.** — Nous avons donné plus haut (209) le moyen d'effectuer le développement de la surface latérale d'une pyramide. On appelle *développement* de la surface latérale d'un cône, la limite du développement de la surface latérale d'une pyramide inscrite dont le nombre des faces augmente indéfiniment, de manière que l'angle des deux arêtes situées dans une face quelconque tende vers zéro.

420. **Transformée d'une ligne tracée sur la surface du cône.** — Considérons, d'après cela, une surface conique et soit σ (*fig.* 1) une ligne quelconque tracée sur cette surface. Les arêtes d'une sur-

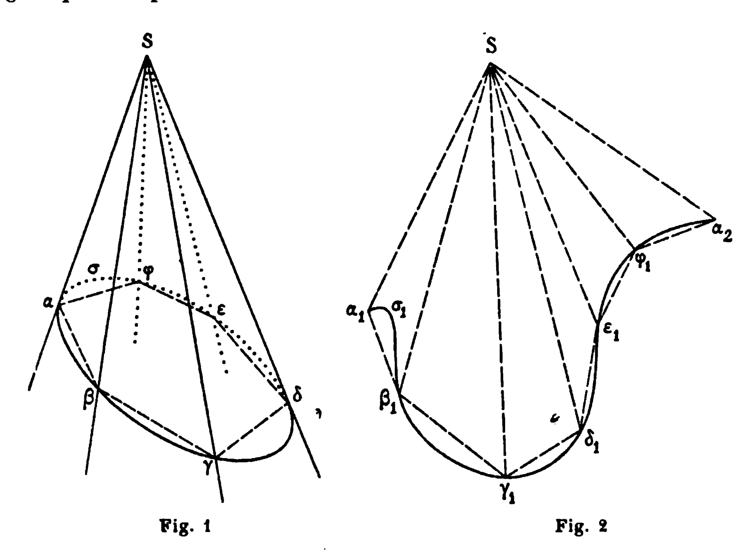


Fig. 1 Fig. 2

face pyramidale inscrite dans le cône rencontrent σ en des points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui sont les sommets d'une ligne polygonale tracée sur le cône et inscrite dans la ligne σ. Dans le développement, la transformée de cette ligne polygonale est une autre ligne polygonale $\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots$ (*fig.* 2), qui jouit des propriétés suivantes (209) :

1° Elle a le même périmètre que la ligne $\alpha\beta\gamma\ldots$, parce que les triangles $S_1\alpha_1\beta_1$, $S_1\beta_1\gamma_1$, ... sont respectivement égaux aux triangles $S\alpha\beta$, $S\beta\gamma$, ... et que, par suite, les côtés $\alpha_1\beta_1$, $\beta_1\gamma_1$, ... sont respectivement égaux aux côtés $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, ...;

2° A cause de l'égalité des mêmes triangles, les côtés de la ligne $\alpha_1\beta_1\gamma_1$... rencontrent les arêtes $S_1\alpha_1$, $S_1\beta_1$, ... sous des angles respectivement égaux à ceux sous lesquels les côtés correspondants du polygone $\alpha\beta\gamma$... rencontrent les arêtes $S\alpha$, $S\beta$, ... de la pyramide inscrite.

Supposons alors que le nombre des faces de la pyramide inscrite augmente indéfiniment d'après la loi indiquée plus haut (419); la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma$... a pour limite la ligne σ et sa transformée $\alpha_1\beta_1\gamma_1$... a pour limite une ligne σ_1 qu'on appelle la *transformée* de la ligne σ.

421. Propriétés du développement. — Nous avons vu que deux côtés correspondants quelconques, $\beta_1\gamma_1$ et $\beta\gamma$ par exemple, sont égaux; il en résulte que les périmètres des deux lignes polygonales $\alpha\beta\gamma$... et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$... sont égaux. Or, par définition, les périmètres de ces deux lignes polygonales ont pour limites respectives les périmètres des lignes σ et σ_1; donc les deux lignes σ et σ_1 ont des périmètres égaux.

D'autre part, les angles $S_1\beta_1\gamma_1$ et $S\beta\gamma$ sont égaux quelles que soient les longueurs des deux cordes $\beta\gamma$ et $\beta_1\gamma_1$; il en résulte que les limites de ces angles sont égales. En poursuivant alors le raisonnement comme pour le cylindre (416), on arrive à conclure :

1° *Que le développement conserve les longueurs des lignes tracées sur le cône ;*

2° *Qu'il conserve les angles de ces lignes avec les génératrices et, par suite, qu'il conserve les angles de ces lignes entre elles.*

En particulier, si l'on considère l'intersection du cône avec une sphère quelconque ayant son centre au sommet du cône, la tangente en chaque point de cette ligne étant perpendiculaire au rayon, la transformée de l'intersection est une ligne dont les normales passent par le point S_1, c'est-à-dire un arc de cercle de centre S_1 et de rayon égal à celui de la sphère.

L'intersection d'un cône avec une sphère ayant son centre au sommet du cône s'appelle une *section droite* de ce cône.

422. Construction de la transformée d'une ligne. — D'après ce qui précède, pour construire la transformée d'une ligne σ (*fig.* 1) tracée sur la surface d'un cône de sommet S, on inscrit dans cette ligne une ligne polygonale d'un nombre de côtés assez grand pour que chaque côté puisse être considéré, sans erreur sensible, comme confondu avec l'arc

qu'il sous-tend; de cette manière le périmètre de la ligne polygonale donne une valeur suffisamment approchée du périmètre de la ligne σ. On joint les sommets α, β, γ, ... de la ligne polygonale ainsi obtenue au point S, ce qui donne une surface pyramidale inscrite dans le cône. On développe la surface latérale de cette pyramide en $S_1\alpha_1\beta_1\gamma_1$... (*fig.* 2), comme cela a été expliqué au n° 209, et l'on joint les points α_1, β_1, γ_1, ... par un trait continu.

On obtient ainsi une ligne σ_1 qui est le développement approché de la ligne σ.

Habituellement, pour obtenir la transformée d'une ligne quelconque σ, on commence par construire, comme il vient d'être dit, la transformée d'une section plane P; soient B un point quelconque de

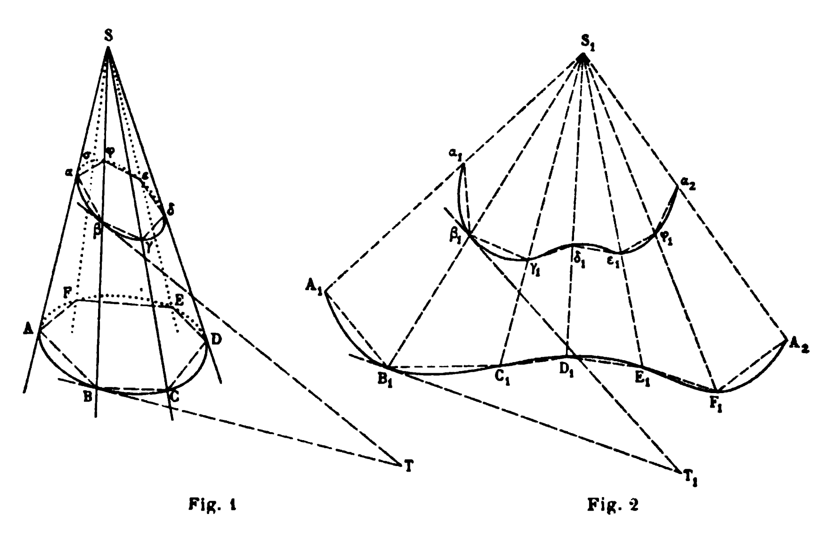


Fig. 1 Fig. 2

cette section, B_1 le point correspondant de sa transformée. La génératrice SB rencontrant σ en un point β, si l'on prend dans le sens convenable $S_1\beta_1 = S\beta$ ou $B_1\beta_1 = B\beta$ on obtient le point β_1 de σ_1 qui correspond au point β de σ. On peut obtenir ainsi successivement tous les points de σ_1.

Si l'on sait construire la tangente en β à la ligne σ, il est aisé de construire la tangente en β_1 à la ligne σ_1 : il suffit, en effet, de mener par β_1 la droite β_1T_1 telle que l'angle $S_1\beta_1T_1$ soit égal à l'angle $S\beta T$ (421).

Supposons construites les tangentes aux points B, β et B_1, aux lignes

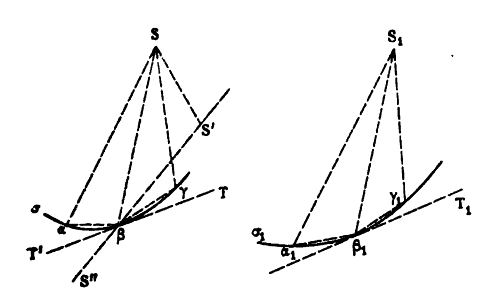
P, σ et P_1, et soit T l'intersection des tangentes en B et en β. Si l'on appelle T_1 le point de rencontre inconnu des tangentes en B_1 et en β_1 aux lignes P_1 et σ_1, en vertu des propriétés du développement (421), les deux triangles βBT et $\beta_1 B_1 T_1$ sont égaux. Par conséquent, si l'on porte sur B_1T_1, à partir du point B_1 et dans le sens convenable, une longueur B_1T_1 égale à BT, on aura le point T_1 et, par suite, on aura la tangente $\beta_1 T_1$ à la ligne σ_1.

Au lieu de construire d'abord la transformée d'une section plane, il est quelquefois plus avantageux de construire la transformée d'une section droite du cône. On obtient immédiatement cette transformée en observant qu'elle est un arc de cercle de centre S_1 et de rayon égal à celui de la sphère qui a fourni la section droite (421). En partant de cette transformée comme on était parti plus haut de la transformée d'une section plane, on peut obtenir successivement les points de σ_1 et les tangentes à cette courbe en chacun de ses points.

§ III. — *Points d'inflexion de la transformée d'une section plane.*

423. Méthode géométrique. — La détermination des points d'inflexion de la transformée par développement d'une section plane d'un cône ou d'un cylindre est une conséquence de l'étude de la concavité et de la convexité de cette transformée. Pour faire cette étude nous indiquerons deux méthodes: une méthode *géométrique* et une méthode *analytique*. Occupons-nous d'abord de la première et examinons successivement le cas du cône et le cas du cylindre.

Cas du cône. — Soit σ une ligne tracée sur la surface d'un cône S, et soit σ_1 sa transformée. Supposons qu'en un point quelconque, β_1, la courbe σ_1 tourne sa concavité vers le point S_1. Si, au point β_1, on mène la tangente β_1T_1 à la courbe σ_1, l'hypothèse que nous venons de faire signifie que, dans le voisinage du point β_1, la courbe et le point S_1 sont du même côté de la tangente; dès lors, si l'on prend deux points α_1 et γ_1 dans le voisinage



du point β_1 et de part et d'autre de ce point, on a

$$\text{angle } S_1\beta_1\alpha_1 + \text{angle } S_1\beta_1\gamma_1 < 2 \text{ dr.},$$

pourvu que les points α_1 et γ_1 soient suffisamment rapprochés du point β_1.

Appelons α, β, γ les points de la courbe σ qui correspondent respectivement aux points α_1, β_1, γ_1 de la courbe σ_1, et imaginons une pyramide inscrite dans le cône S et dont trois arêtes passent respectivement par α, β et γ. Par définition, le développement de la surface latérale du cône est la limite du développement de la surface latérale de cette pyramide. Les angles $S_1\beta_1\alpha_1$ et $S_1\beta_1\gamma_1$ sont donc respectivement égaux aux angles $S\beta\alpha$ et $S\beta\gamma$: ceci résulte d'ailleurs aussi de la manière dont on procède (420) pour effectuer le développement de la surface latérale du cône. Donc, *si au point* β_1 *la courbe* σ_1 *est concave vers le point* S_1, *en prenant les points* α *et* γ *suffisamment voisins du point* β *et de part et d'autre de ce point, on a*

$$\text{angle } S\beta\alpha + \text{angle } S\beta\gamma < 2 \text{ dr.}$$

On voit d'une manière tout à fait analogue que *si au point* β_1 *la courbe* σ_1 *est convexe vers le point* S_1, *on a*

$$\text{angle } S\beta\alpha + \text{angle } S\beta\gamma > 2 \text{ dr.},$$

les points α et γ étant choisis comme tout à l'heure. Ces propositions étant contraires entraînent leurs réciproques.

Cela posé, supposons que la courbe σ soit la section faite dans le cône S par un plan P, et soit S′ la projection du point S sur le plan P. Au point β la courbe σ est concave ou convexe vers le point S′; supposons, pour fixer les idées, qu'elle soit concave, et observons : 1° que l'angle $S\beta S'$ est l'angle minimum de $S\beta$ avec les droites menées par le point β dans le plan P, tandis que l'angle $S\beta S''$ est l'angle maximum de $S\beta$ avec les mêmes droites; 2° que si l'on fait tourner une demi-droite de 360° autour du point β dans le plan P, dans un sens quelconque, en partant de $\beta S'$, l'angle de cette demi-droite avec $S\beta$ est d'abord minimum, va ensuite constamment en croissant jusqu'à ce que la demi-droite ait tourné de 180°, c'est-à-dire soit venue coïncider avec $\beta S''$, et repasse après par les mêmes valeurs dans l'ordre inverse. Si donc on mène la tangente $T'\beta T$ à la courbe σ, au point β, l'hypothèse que la courbe est concave vers le point S′ donne successivement

$$\text{angle } S\beta\gamma < \text{angle } S\beta T$$

$$\text{angle } S\beta\alpha < \text{angle } S\beta T'$$

et

$$\text{angle } S\beta\gamma + \text{angle } S\beta\alpha < 2 \text{ dr.},$$

puisque la somme des angles $S\beta T$ et $S\beta T'$ est égale à 2 droits.

On verrait d'une manière analogue que si la courbe σ est convexe vers le point S', on a

$$\text{angle } S\beta\gamma + \text{angle } S\beta\alpha > 2 \text{ dr.}$$

En rapprochant ce résultat de celui qui a été obtenu au début on voit alors qu'*au point* β_1 *la transformée* σ_1 *est concave ou convexe vers le point* S_1, *suivant qu'au point* β *la courbe* σ *est concave ou convexe vers le point* S'.

D'après cela, le point β_1 sera un point d'inflexion de σ_1 si la concavité au point β change de sens quand on passe du point α au point γ. Or, si l'on remarque qu'il n'y a lieu d'étudier la concavité et la convexité que si le plan P ne passe pas par le sommet du cône, il ne peut y avoir changement dans le sens de la concavité au point β et quand on passe de α à γ situés de part et d'autre de ce point, que dans les deux cas suivants : 1° quand le point β est un point d'inflexion de la courbe σ; 2° quand il est le point de contact d'une tangente menée à cette courbe par le point S'. D'ailleurs, dans ce dernier cas, le plantangent au cône suivant $S\beta$ est perpendiculaire au plan P; donc :

Les points d'inflexion de la transformée d'une section plane d'un cône correspondent, soit aux points d'inflexion de la section, c'est-à-dire aux points de rencontre du plan sécant avec les génératrices d'inflexion, soit aux points de rencontre du plan sécant avec les génératrices de contact des plans tangents au cône perpendiculaires au plan sécant.

Cas du cylindre. — On peut traiter directement le cas du cylindre, comme on a traité le cas du cône. Nous nous bornerons à observer que le raisonnement est tout pareil à celui que nous avons fait dans le cas du cône, et que la seule différence consiste en ce que, si l'on appelle $S'S''$ la projection de $S\beta$ sur le plan P, le point S' doit être remplacé par le point à l'infini sur l'une des demi-droites $\beta S'$ ou $\beta S''$.

Ajoutons cependant qu'il est inutile de parler du cas où la projection de βS se réduirait au point β; car, dans ce cas, σ serait une section droite du cylindre et sa transformation serait une ligne droite.

424. Remarque. — Ces conclusions sont en défaut lorsque la géné-

ratrice Sβ est la génératrice suivant laquelle la surface a été supposée ouverte, pour effectuer le développement, parce qu'alors au point β correspondent deux points de la transformée en lesquels la courbe σ_1 s'arrête.

Elles sont également en défaut, dans le cas du cône, quand le point S′ est confondu avec le point β, c'est-à-dire quand le plan sécant est perpendiculaire à la génératrice Sβ. *Dans ce cas le raisonnement prouve qu'au point* β_1 *la courbe est toujours concave du côté de* S_1.

425. Méthode analytique. — Cette méthode résulte de l'étude de la concavité ou de la convexité d'une courbe en coordonnées polaires.

On démontre en géométrie analytique que si l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires est $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$, le sens de la concavité en un point M de cette courbe de coordonnées r et α résulte, dans le cas général, du signe de la somme $f(\alpha) + f''(\alpha)$. Or, si l'on appelle D la distance du pôle à la tangente en M, on trouve facilement

$$\frac{1}{D^2} = \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{r}\right)'_\alpha\right]^2,$$

et l'on a, en prenant les dérivées des deux membres par rapport à α,

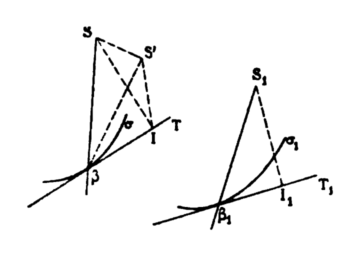
$$-\frac{D'}{D^3} = \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r}\right)'_\alpha + \left(\frac{1}{r}\right)'_\alpha\left(\frac{1}{r}\right)''_{\alpha^2}.$$

Si l'on remplace $\left(\frac{1}{r}\right)'_\alpha$ par $\frac{-r'}{r^2}$, $\frac{1}{r}$ par $f(\alpha)$ et $\left(\frac{1}{r}\right)''_{\alpha^2}$ par $f''(\alpha)$, on déduit de là

$$f(\alpha) + f''(\alpha) = \frac{r^2}{D^3} \cdot \frac{D'}{r'}.$$

Comme $\frac{r^2}{D^3}$ est positif, le signe de $f(\alpha) + f''(\alpha)$ résulte de la comparaison des signes de D′ et de r'; il est donc + ou — suivant que D et r varient dans le même sens ou en sens contraires dans le voisinage du point M. D'ailleurs r pouvant être supposé positif, la courbe, au point M, est concave ou convexe vers le pôle suivant que le signe est + ou est —, c'est-à-dire suivant que D et r varient dans le même sens ou en sens contraires.

Cela posé, reprenons la section σ faite dans un cône S par un plan P et sa transformée σ_1. Soient β et β_1 deux points correspondants de ces deux courbes, βT et $\beta_1 T_1$ les deux tangentes, SI et $S_1 I_1$ les perpendiculaires menées à ces tangentes par les points respectifs S et S_1. En vertu des propriétés du développement, les deux triangles $S\beta I$ et $S_1\beta_1 I_1$ sont égaux, de sorte que l'on a



$$S_1I_1 = SI, \qquad S_1\beta_1 = S\beta.$$

Il en résulte, en vertu de ce qui précède, qu'au point β_1 la courbe σ_1 est concave ou convexe vers le point S_1, suivant que SI et $S\beta$ varient dans le même sens ou en sens contraires.

Mais si l'on appelle S' la projection du point S sur le plan P, les triangles rectangles SS'I et $SS'\beta$ montrent que SI et $S\beta$ varient respectivement dans le même sens que S'I et que $S'\beta$. Il en résulte qu'au point β_1 la courbe σ_1 est concave ou convexe vers le point S_1, suivant qu'au point correspondant β la courbe σ est concave ou convexe vers le point S'.

On arrive ainsi aux mêmes conclusions que par la première méthode, et on achève le raisonnement de la même manière.

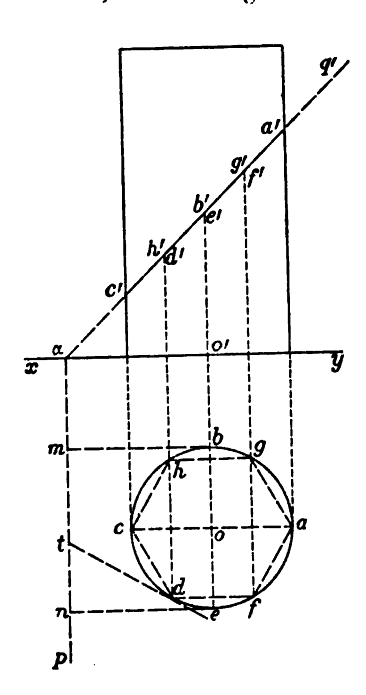
D'ailleurs les résultats trouvés pour le cône s'étendent au cylindre considéré comme cas limite du cône.

§ IV. — *Exemples de développements.*

426. **Exemple I.** — *On coupe un cylindre de révolution à axe vertical par un plan de bout; construire la transformée par développement de la section ainsi obtenue.*

Supposons que le cylindre repose par sa base sur le plan horizontal, et soit *o* le centre de la circonférence de base; soit d'ailleurs $p\alpha q'$ le plan sécant. La section du cylindre par ce plan est projetée horizontalement suivant la circonférence de base, et verticalement suivant la portion $c'a'$ de la trace verticale du plan sécant. En outre il est inutile ici de déterminer la section droite du cylindre, puisqu'elle est confondue avec la base. Pour effectuer le développement de la surface, il ne reste donc plus qu'à chercher la longueur de la section droite.

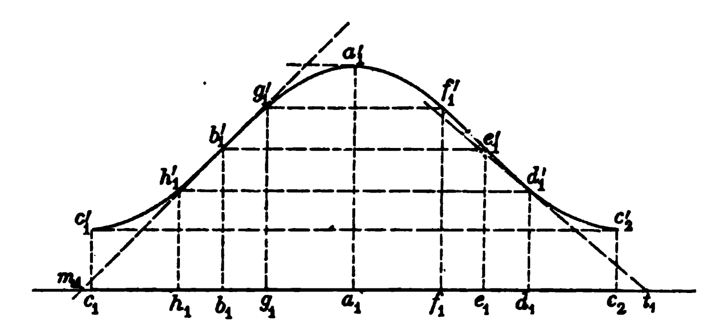
Pour cela, on inscrit dans la circonférence de base un polygone convexe d'un nombre de côtés assez grand pour que l'on puisse, sans erreur sensible, considérer chaque côté de ce polygone comme confondu avec l'arc de la base qu'il sous-tend. On mesure ensuite le périmètre de ce polygone, et l'on a ainsi la longueur approchée de la section droite, et cette longueur est d'autant plus approchée que le nombre des côtés du polygone inscrit est plus grand. Il y a, bien entendu, tout avantage à inscrire un polygone régulier. Dans le cas de la figure on a inscrit un hexagone régulier *aghcdf*, pour indiquer la manière de procéder, mais cela n'est évidemment pas suffisant pour avoir la longueur suffisamment approchée de la section droite. On a alors cherché, par le procédé général, la longueur approchée de l'arc sous-tendu par un côté du polygone, et on a multiplié par 6 la longueur ainsi obtenue. C'est d'ailleurs en cela qu'il y a avantage à inscrire un polygone régulier.



Ajoutons que la section droite étant une circonférence, on peut *calculer* sa longueur en multipliant par 2π la longueur du rayon.

La longueur de la section droite étant ainsi obtenue, on la porte en c_1c_2 sur une droite indéfinie, et l'on obtient ainsi la transformée de la section droite, quand on développe la surface du cylindre sur un plan. Il est aisé d'en déduire la transformée de la section obtenue en coupant par le plan $p\alpha q'$. Supposons en effet que le cylindre ait été ouvert suivant la génératrice du point (c, c') et que l'on fasse le développement sur le plan tangent le long de la génératrice du point (a, a'). Prenons alors le point a_1, milieu de c_1c_2, et portons, à partir du point a_1, les longueurs successives a_1f_1, f_1d_1, ..., a_1g_1, g_1h_1, ..., égales respectivement aux longueurs des arcs af, fd, ..., ag, gh, ..., de la section droite ; menons par ces points les perpendiculaires à c_1c_2 et, sur l'une quelconque,

$f_1f'_1$ par exemple, de ces perpendiculaires, portons $f_1f'_1$ égale à la portion de génératrice du cylindre comprise entre la base et le plan $p\alpha q'$, c'est-à-dire, dans l'exemple actuel, égale à la cote du point (f, f'). Nous obtenons ainsi en f'_1 le point de la transformée qui correspond



au point (f, f') de la section. On obtient de la même manière autant de points que l'on veut de la transformée, et on obtient la transformée elle-même en joignant tous ces points par un trait continu.

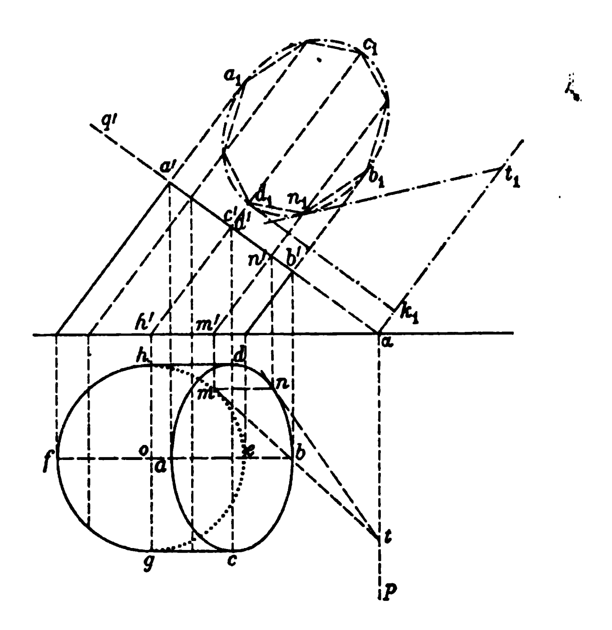
Il nous reste à construire la tangente en un point quelconque de la transformée et à déterminer les points d'inflexion.

Tangente en un point de la transformée. — Cherchons par exemple la tangente au point d'_1 de la transformée. Ce point correspond au point (d, d') de la section, et la sous-tangente (417) est dt. Comme le sens de d vers t est le même que le sens de d vers c, portons dans le sens de d_1 vers c_2 la longueur d_1t_1 égale à dt et joignons le point t_1 au point d'_1. La droite $t_1d'_1$ est la tangente demandée.

Points d'inflexion de la transformée. — Les plans tangents au cylindre perpendiculaires au plan $p\alpha q'$ sont les plans tangents suivant les génératrices des points (e, e') et (b, b'). Les points d'inflexion de la transformée sont donc (423) ceux qui correspondent aux points (e, e') et (b, b') : ce sont les points e'_1 et b'_1. On obtient les tangentes en ces points, comme on a obtenu la tangente en un point quelconque, au moyen des sous-tangentes respectives en et bm.

427. **Exemple II.** — *Un cylindre a pour base un cercle situé dans le plan horizontal de projection. On développe la surface latérale de ce cylindre sur un plan et l'on demande de construire la transformée de la base.*

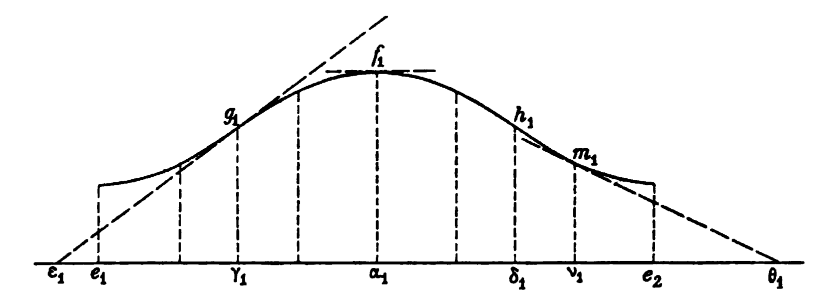
D'après la méthode générale indiquée plus haut (415), pour obtenir le développement demandé il faut d'abord construire et rectifier une section droite du cylindre. Cette section droite a été obtenue en coupant le cylindre par le plan $p\alpha q'$, et elle est projetée horizontalement suivant l'ellipse *abcd*. Pour la rectifier, on l'a d'abord rabattue sur le plan vertical en $a_1b_1c_1d_1$; on a déterminé ensuite le périmètre d'un polygone inscrit d'un nombre de côtés suffisamment grand, puis on a porté ce périmètre sur une droite indéfinie et l'on a obtenu, de cette manière, la transformée de la section droite après le développement.



Cela posé, supposons que le cylindre ait été ouvert suivant la génératrice qui passe par le point *e* de la base, que l'on ait fait le développement sur le plan tangent le long de la génératrice du point *f*, et cherchons à construire un point quelconque de la transformée de la base, la tangente en ce point et les points d'inflexion de la transformée.

Construction d'un point. — Cherchons, par exemple, le point de la transformée qui correspond au point (m, m') de la base. Pour cela, déterminons d'abord le point (n, n') de la section droite situé sur la même génératrice que le point (m, m'), et soit n_1 le rabattement du point (n, n'). Soient d'ailleurs e_1e_2 la transformée de la section droite

et α_1 le milieu de e_1e_2, de sorte que le point α_1 est le point qui correspond au point (a, a'). Portons sur e_1e_2 et à partir du point α_1 la longueur $\alpha_1\nu_1$ égale à la longueur de l'arc $a_1d_1n_1$ de la section droite, et, sur la perpendiculaire à e_1e_2 menée par ν_1, prenons ν_1m_1 égale à la



portion de la génératrice du point (m, m') comprise entre ce point et la section droite; nous obtenons ainsi le point m_1 correspondant au point (m, m') de la base.

Ajoutons que les génératrices du cylindre étant de front, la longueur ν_1m_1 est égale à $n'm'$.

Tangente au point m_1 de la transformée. — Pour obtenir cette tangente, il faut construire le triangle de l'espace projeté horizontalement en mnt (417). Ce triangle est rectangle dans l'espace, et le côté de l'angle droit projeté en nt est rabattu en n_1t_1 : la longueur n_1t_1 est la sous-tangente, et, pour obtenir la tangente cherchée, il n'y a plus qu'à prendre, dans le sens convenable, $\nu_1\theta_1 = n_1t_1$ et à joindre le point m_1 au point θ_1.

Points d'inflexion de la transformée. — Les points d'inflexion correspondent aux points de la base en lesquels le plan tangent au cylindre est perpendiculaire au plan de base, c'est-à-dire est vertical. Ils correspondent donc aux points g et h de la base, c'est-à-dire qu'ils se trouvent sur les génératrices des points (c, c') et (d, d') de la section droite. Pour les obtenir, on portera donc sur e_1e_2 les longueurs $\alpha_1\delta_1$ et $\alpha_1\gamma_1$ égales respectivement aux longueurs des arcs a_1d_1 et a_1c_1 de la section droite, on mènera les perpendiculaires à e_1e_2 par les points δ_1 et γ_1 ainsi obtenus et l'on prendra, sur ces perpendiculaires, δ_1h_1 et γ_1g_1 égales à $h'c'$: on obtient ainsi les points h_1 et g_1.

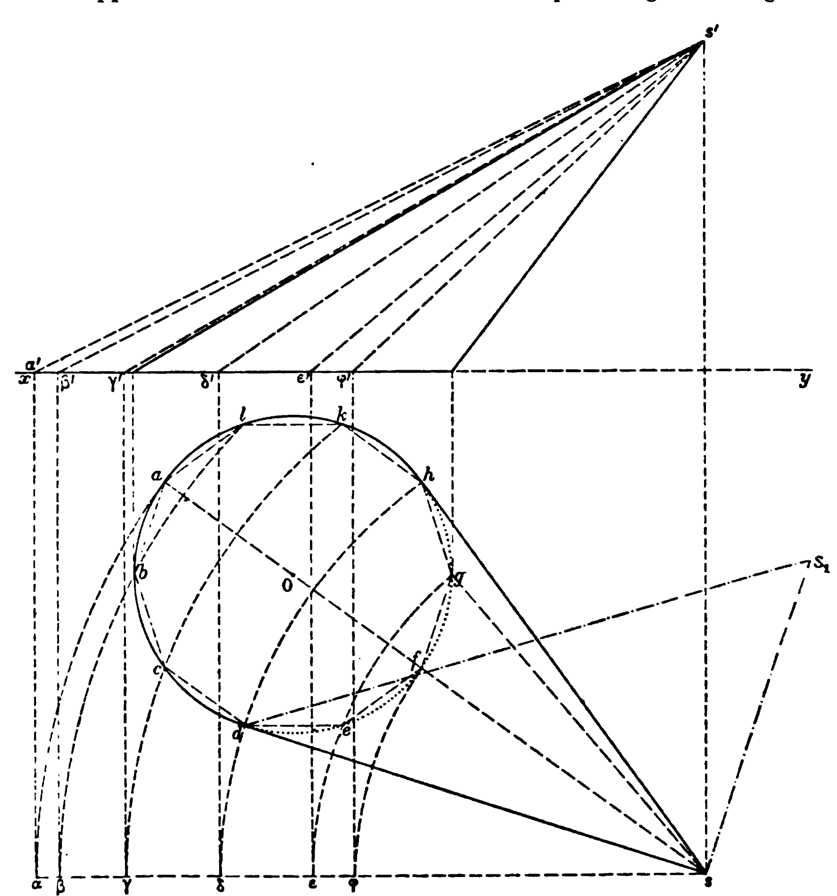
La tangente $g_1\varepsilon_1$ en l'un quelconque de ces deux points s'obtient encore au moyen de la sous-tangente, qui a, ici, la même longueur

pour les deux points; cette longueur, égale à d_1k_1, a été portée en $\gamma_1\varepsilon_1$.

Le développement est symétrique par rapport à α_1f_1, qui correspond à la génératrice du point f.

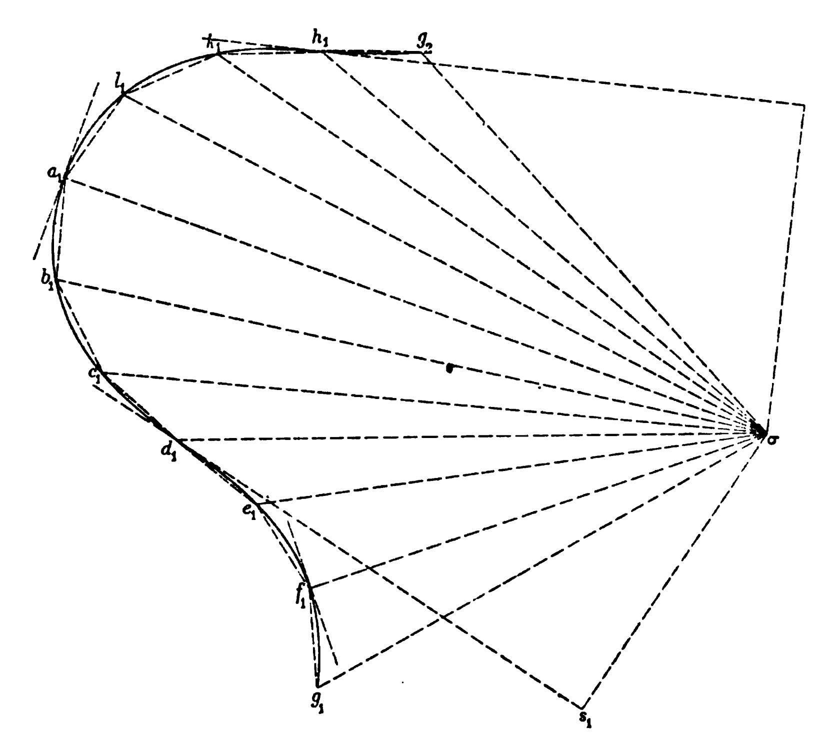
428. Exemple III. — *Développer sur un plan la surface latérale d'un cône oblique à base circulaire reposant sur le plan horizontal de projection.*

Soit (s, s') le sommet du cône dont la base est une circonférence de centre O, située dans le plan horizontal. Supposons que l'on veuille développer la surface latérale de ce cône sur le plan tangent le long de



la génératrice projetée horizontalement en sa, la surface étant d'ailleurs supposée ouverte suivant la génératrice projetée horizontalement

en sg. Appliquons la méthode générale exposée au n° 422. Pour cela, inscrivons une pyramide dans le cône et soit *abcd*... le polygone de base de cette pyramide, polygone qui est inscrit dans la circonférence O et que l'on choisit de telle sorte qu'il ait un sommet en a et un sommet en g. Il est d'ailleurs inutile de figurer les projections des arêtes de la pyramide inscrite, parce qu'elles ne serviraient qu'à compliquer la figure; mais, comme nous le verrons dans un instant, il est indispensable d'en avoir les longueurs. Ces longueurs ont été obtenues en rendant les arêtes de front, au moyen de rotations effectuées autour de la verticale du sommet. On a ainsi obtenu en $s'\alpha'$, $s'\beta'$, $s'\gamma'$, ... les longueurs des arêtes qui aboutissent aux points a, b, c, ... de la base.



Cela posé, construisons, par la méthode exposée au n° 209, le développement de la surface latérale de la pyramide inscrite. Si $\sigma g_1 f_1 e_1 ... h_1 g_2$ est le développement ainsi obtenu, en traçant une ligne continue passant par les points $g_1 f_1 e_1 d_1 ... h_1 g_2$, on a la transformée approchée de la base du cône.

On précise un peu le tracé de cette ligne en construisant les tangentes en quelques-uns de ses points et en déterminant ses points d'inflexion, quand elle en a.

Aux points a et f les tangentes à la base sont perpendiculaires aux génératrices correspondantes; il en résulte qu'aux points correspondants a_1 et f_1 les tangentes à la transformée sont perpendiculaires respectivement à σa_1 et à σf_1.

Déterminons la tangente en un point quelconque, d_1, correspondant au point d. Observons, pour cela, que la tangente cherchée fait avec σd_1 un angle égal à celui que la tangente ds, menée en d à la circonférence O, fait avec la génératrice du cône qui passe par le point d. Cet angle est situé dans le plan tangent le long de la génératrice projetée en sd, et on l'obtient en rabattant ce plan tangent sur un plan horizontal ou sur un plan de front, sur le plan horizontal de projection dans le cas actuel(*). Si S_1 est le rabattement du sommet, l'angle cherché est S_1ds. Pour l'obtenir dans le développement, on a construit le triangle rectangle $\sigma s_1 d_1$ égal au triangle rectangle S_1sd.

Les points d'inflexion de la transformée sont les points qui correspondent aux points de la base en lesquels les plans tangents au cône sont verticaux. Ce sont donc, ici, les points d_1 et h_1, qui correspondent aux points d et h, situés sur les génératrices de contour apparent horizontal. Nous venons d'ailleurs d'indiquer la construction de la tangente au point d_1, et on obtiendrait de la même manière la tangente au point h_1.

Il est bon d'observer qu'aux points g_1 et g_2 les angles de la transformée et des génératrices correspondantes *doivent être supplémentaires*.

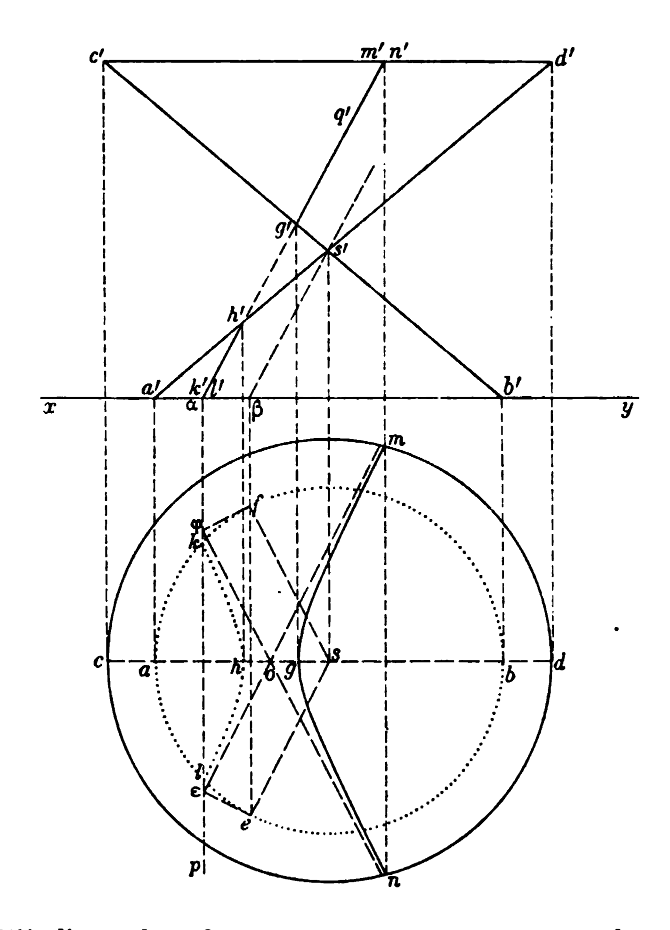
429. Exemple IV. — *Un cône de révolution à axe vertical est limité par le plan horizontal de projection et par un autre plan horizontal. On le coupe par un plan de bout et on développe sa surface latérale sur un plan; construire les transformées des bases et de la section ainsi obtenue.*

L'exemple actuel est destiné à montrer comment on construit les asymptotes d'une transformée par développement.

Supposons que le cône ait son sommet au point (s, s') et soit limité

(*) On pouvait se dispenser de faire ce rabattement en observant que l'angle cherché est égal à $s'\delta'y$.

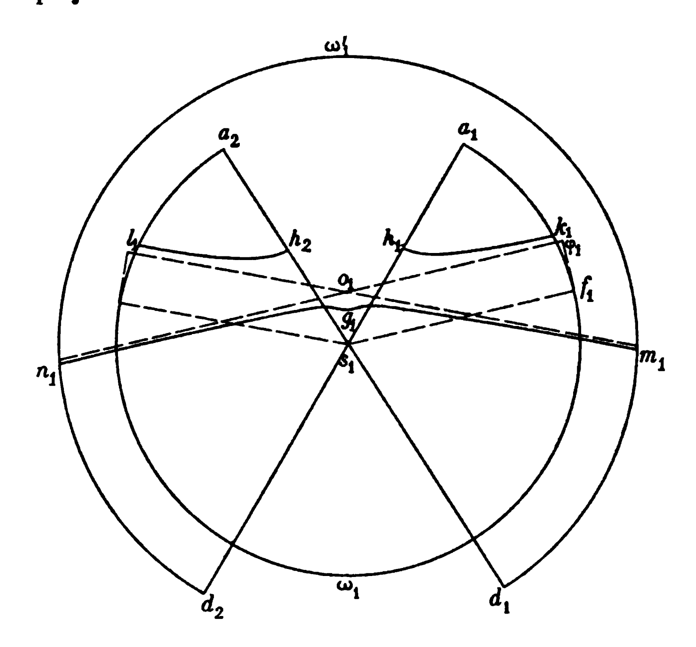
au plan horizontal de projection et au plan horizontal *c'd'*. Soient (*ab*, *a'b'*) et (*cd*, *c'd'*) les deux bases du cône, *pαq'* le plan sécant. Le plan *efβs'* mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant coupe le cône suivant deux génératrices projetées horizontalement en *sf* et en *se*. On en conclut que la section du cône par le plan *pαq'* est une hyperbole dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux deux génératrices projetées en *sf* et en *se*. L'une des branches de cette hyperbole est projetée horizontalement en *lhk* et verticalement



en *l'h'k'*; l'autre branche est, de même, projetée horizontalement en *mgn* et verticalement en *m'g'n'*. Les asymptotes de la projection horizontale, construites comme cela a été expliqué au n° 398, sont *φo*

et εo, et, quant aux asymptotes de la projection verticale, elles sont confondues avec la projection verticale elle-même.

Cela posé, supposons que la surface du cône ait été ouverte suivant l'arête projetée en sa, et développée sur le plan tangent le long de l'arête projetée en sb.



Le développement de la nappe inférieure du cône est le secteur circulaire $a_1\omega_1a_2$, dont le rayon s_1a_1 est égal à $s'a'$, et dont l'arc $a_1\omega_1a_2$ a même longueur que la circonférence ab. De même, le développement de la nappe supérieure du cône est un secteur circulaire $d_1\omega'_1d_2$, dont le rayon s_1d_1 est égal à $s'd'$, et dont l'arc $d_1\omega'_1d_2$ a même longueur que la circonférence cd.

La transformée de la branche lhk est l'ensemble des deux arcs l_1h_2 et h_1k_1; de même, la transformée de la branche mgn est l'arc unique $m_1g_1n_1$. Aux points (g, g') et (h, h') la tangente à la section est perpendiculaire à la génératrice correspondante du cône; donc, aux points g_1, h_1 et h_2 les tangentes sont perpendiculaires aux rayons respectifs s_1g_1, s_1h_1 et s_1h_2.

Construisons les asymptotes de la transformée. Pour obtenir une direction asymptotique de la transformée, il suffit de prendre l'arc a_1f_1

égal en longueur à l'arc af et de joindre le point s_1 au point f_1 ainsi obtenu. Pour obtenir alors l'asymptote correspondante, on observe que l'asymptote est une tangente, et que la sous-tangente correspondante est $f\varphi$, dont le sens est le sens fka. On mène donc au point f_1 la tangente à l'arc $a_1f_1\omega_1$ et, dans le sens $f_1k_1a_1$, on prend $f_1\varphi_1$ égale à $f\varphi$; puis on mène φ_1o_1 parallèle à f_1s_1 et l'on obtient ainsi une des asymptotes de la transformée. On obtient l'autre asymptote par des constructions analogues ou par symétrie.

Ajoutons qu'il est facile de s'assurer que la transformée présente deux points d'inflexion situés sur l'arc $m_1g_1n_1$.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1. On coupe un cylindre de révolution à axe vertical par un plan de bout, et on développe la surface latérale du cylindre sur un plan; trouver en coordonnées rectilignes l'équation de la transformée de la section plane.

2. On coupe un cône de révolution à axe vertical par un plan de bout, et on développe la surface latérale du cône sur un plan; trouver, en coordonnées polaires, l'équation de la transformée de la section plane.

3. La base d'un cylindre est un cercle dans le plan horizontal, et les génératrices du cylindre, inclinées à 45° sur le plan horizontal, sont de front. On coupe ce cylindre par le premier plan bissecteur, et on développe la surface latérale sur un plan; construire la transformée de la section, et déterminer, en particulier, les points d'inflexion du développement de cette section.

4. Une sphère a son centre dans le plan horizontal. On circonscrit à cette sphère un cône ayant son sommet dans le plan de front mené par le centre de la sphère, et on développe la surface latérale de ce cône sur un plan. Construire la transformée de la trace horizontale du cône, la tangente en un point de la transformée et les points d'inflexion.

5. La surface latérale d'un cylindre circulaire droit à axe vertical ayant été développée sur un plan, on propose de construire la projection verticale de la ligne tracée sur le cylindre, et dont la transformée par développement est une circonférence donnée.

6. La surface latérale d'un cône circulaire droit à axe vertical est supposée développée sur un plan. Construire les projections de la ligne tracée sur le cône et dont la transformée par développement est une circonférence donnée.

7. Résoudre la même question quand la circonférence donnée est remplacée par une droite.

CHAPITRE III

SECTIONS PLANES DE LA SPHÈRE

§ I. — *Détermination des points de la section.*

430. **Détermination d'un point quelconque.** — La méthode générale pour obtenir un point quelconque d'une section plane d'une surface consiste à déterminer les points de rencontre des génératrices de la surface avec le plan sécant. Il suit de là qu'à chaque mode de génération de la surface, on peut faire correspondre une méthode pour en déterminer une section plane. Dans le cas général, c'est-à-dire quand on n'a pas un mode simple de génération de la surface, rien n'empêche de supposer la surface engendrée par une série de sections planes définies d'après une loi déterminée, et on détermine alors les points de rencontre du plan sécant avec l'une de ces sections planes quelconque, L. Pour cela, on coupe la surface et le plan sécant par le plan auxiliaire de la section L considérée. Ce plan auxiliaire coupe la surface suivant la ligne L, le plan sécant suivant une droite D dont chaque point de rencontre avec la ligne L est un des points cherchés. A l'aide d'autant de plans auxiliaires que l'on veut, on a donc ainsi autant de points que l'on veut de la section.

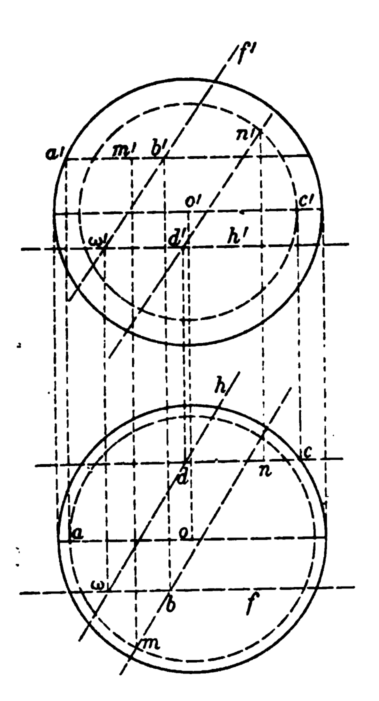
A première vue, il semble que la méthode n'apporte aucune simplification au problème puisque au lieu de déterminer d'un seul coup la section faite dans la surface par le plan sécant, on commence par en déterminer plusieurs autres. Mais en réalité le problème se trouve bien simplifié; car le plan auxiliaire étant arbitraire, on peut généralement le choisir de manière à obtenir sans difficulté la section de la

surface par ce plan, alors qu'il serait généralement impossible d'obtenir cette même section si le plan était quelconque.

Si, en particulier, la surface est une sphère, on peut prendre comme plans auxiliaires, soit des plans horizontaux, soit des plans de front, soit des plans verticaux passant par le centre de la sphère, soit enfin des plans de bout passant également par le centre de la sphère.

1° *Le plan auxiliaire est horizontal ou de front.* — Si l'on coupe d'abord la sphère et le plan sécant par un plan horizontal, la section faite par ce plan dans la sphère est un cercle projeté horizontalement en vraie grandeur suivant un cercle ayant pour centre la projection horizontale du centre de la sphère. De même la section de la sphère par un plan de front est un cercle qui se projette verticalement suivant un cercle de même grandeur ayant pour centre la projection verticale du centre de la sphère.

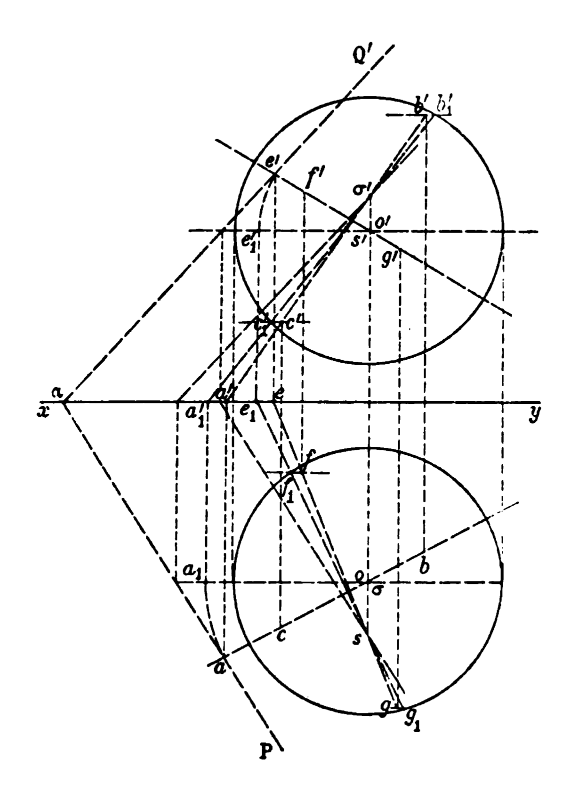
D'après cela, supposons le plan sécant défini par une horizontale (ωh, $\omega'h'$) et par une ligne de front (ωf, $\omega'f'$), et soit (o, o') le centre de la sphère. Le plan horizontal auxiliaire $a'b'$ coupe le cercle de contour apparent vertical de la sphère en deux points, dont l'un est projeté en (a, a'); il coupe donc la sphère suivant un cercle projeté horizontalement suivant une circonférence de centre o et de rayon oa. Le même plan auxiliaire coupe le plan sécant suivant une horizontale projetée horizontalement en bm. Cette droite et la circonférence oa se rencontrent en deux points, et si m est l'un de ces points, le point (m, m') est un point de la section.



En coupant de même par le plan de front cd, on voit, par un raisonnement tout pareil, que le point (n, n') est aussi un point de la section.

2° *Le plan auxiliaire est vertical ou de bout et passe par le centre de la sphère.* — Supposons maintenant que l'on coupe la sphère et le plan

sécant par un plan vertical ou de bout passant par le centre de la sphère. Pour fixer les idées, supposons ce plan auxiliaire vertical. Il coupe la sphère suivant un grand cercle et le plan sécant suivant une droite. Ce cercle et cette droite se projettent horizontalement sur la trace horizontale du plan auxiliaire, mais on n'a pas facilement la projection verticale du cercle. Pour obtenir, dans ce cas, les points de



rencontre de ces deux lignes, on rend le plan auxiliaire qui les a fournies parallèle au plan vertical, en le faisant tourner autour de la verticale du centre de la sphère. Comme après cette rotation la projection verticale du cercle est confondue avec le contour apparent de la sphère sur le plan vertical, on a sans difficulté ses points de rencontre avec la droite, après la rotation. On en déduit les points de rencontre, avant la rotation, par une opération inverse.

On opérerait d'une manière analogue si le plan auxiliaire, au lieu d'être vertical, était de bout. On le rendrait d'ailleurs parallèle au plan horizontal par une rotation autour de la ligne de bout passant par le centre de la sphère.

D'après cela, supposons, par exemple, le plan sécant $P\alpha Q'$ déterminé par ses traces, et soit (o, o') le centre de la sphère. Le plan vertical dont la trace horizontale est oa coupe le plan donné suivant une droite $(\sigma a, \sigma' a')$, qui est projetée verticalement en $\sigma' a'_1$, quand on l'a rendue parallèle au plan vertical par une rotation autour de la verticale du point (o, o'). Le même plan vertical coupe la sphère suivant un grand cercle dont la projection verticale est confondue avec le cercle de contour apparent sur le plan vertical, après la même rotation. La droite $\sigma' a'_1$ coupe ce cercle en deux points b'_1 et c'_1, qui sont les projections verticales des points de rencontre après la rotation. On en conclut que les points (b, b') et (c, c') sont deux points de la section avant la rotation.

Il est bon de remarquer que tous les plans auxiliaires analogues au plan oa passent par la verticale du point (o, o') ; il en résulte que toutes les droites analogues à $(\sigma a, \sigma' a')$ passent par le point de rencontre de cette verticale avec le plan $P\alpha Q'$. Il y a donc tout avantage à déterminer tout de suite ce point (σ, σ'), et c'est ce qui a été fait sur la figure au moyen du plan de front mené par le point (o, o').

Si le plan auxiliaire est de bout au lieu d'être vertical, on voit de même qu'il y a avantage à déterminer tout de suite le point de rencontre (s, s') du plan $P\alpha Q'$ avec la ligne de bout passant par le point (o, o'). On voit d'ailleurs, en raisonnant comme plus haut, dans le cas d'un plan auxiliaire vertical, que le plan de bout $o'e'$ fournit deux points (f, f') et (g, g') de la section.

431. Tangente en un point de la section. — C'est l'intersection du plan tangent à la sphère en ce point avec le plan sécant.

Autrement, si l'on mène par ce point la perpendiculaire au plan et le rayon de la sphère, la tangente est perpendiculaire au plan de ces deux droites.

De toutes façons on l'obtient donc sans aucune difficulté.

432. Points remarquables de la section. — On comprend, sous cette dénomination, les points sur les contours apparents, les points de la

section en lesquels la tangente est horizontale et les points de la section en lesquels la tangente est de front.

Points sur les contours apparents. — On obtient évidemment les points de la section situés sur le contour apparent horizontal en coupant la sphère et le plan sécant par le plan horizontal mené par le centre de la sphère.

On obtient de même les points situés sur le contour apparent vertical en coupant la sphère et le plan sécant par le plan de front mené par le centre de la sphère.

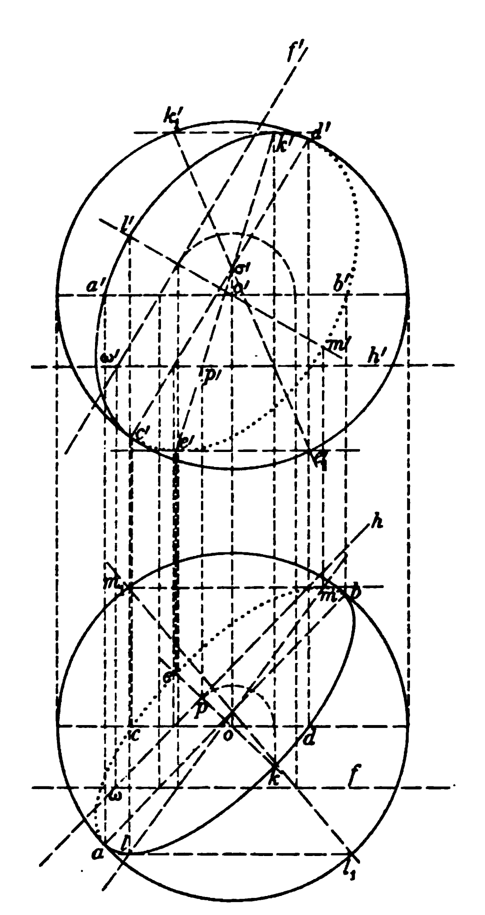
Points en lesquels la tangente est horizontale. — Si la tangente en un point A de la section est horizontale, cela veut dire que le plan tangent en A et le plan sécant se coupent suivant une horizontale. Si donc on mène par le point A le plan perpendiculaire à la tangente en ce point, ce plan est vertical; mais comme il est perpendiculaire à une tangente en son point de contact, il passe par le centre de la sphère; enfin, comme il est perpendiculaire à une droite du plan sécant, il est perpendiculaire au plan sécant.

Ainsi, si en un point A de la section la tangente à cette ligne est horizontale, le plan mené par A perpendiculairement à la tangente est un plan vertical passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan sécant. Il en résulte que les points tels que le point A sont ceux qu'on obtient en coupant la sphère et le plan sécant par le plan auxiliaire vertical passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan sécant. La trace horizontale de ce plan auxiliaire est évidemment la perpendiculaire menée par la projection horizontale du centre de la sphère aux projections horizontales des horizontales du plan.

Points en lesquels la tangente est de front. — Un raisonnement analogue à celui qu'on vient de faire montre que ces points peuvent être obtenus en coupant la sphère et le plan sécant par un plan auxiliaire de bout passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan sécant. La trace verticale de ce plan auxiliaire est la perpendiculaire menée par la projection verticale du centre de la sphère aux projections verticales des lignes de front du plan.

Dans l'épure ci-contre (o, o') est le centre de la sphère et le plan

sécant est déterminé par deux droites qui se coupent : l'horizontale (ωh, $\omega' h'$) et la ligne de front (ωf, $\omega' f'$). Les points sur le contour apparent horizontal, déterminés par la méthode qu'on vient d'exposer, sont (a, a') et (b, b'); pareillement, les points sur le contour apparent vertical sont (c, c') et (d, d'). Les points en lesquels la tangente est horizontale ont été obtenus, comme cela vient d'être expliqué, en coupant par le plan vertical dont la trace horizontale est oe. Ce plan vertical coupe le plan donné suivant une droite qu'on a rendue parallèle au plan vertical par une rotation autour de la verticale du centre de la sphère, et qui est alors projetée verticalement en $e'_1k'_1$ (*). Les anciennes projections étant op et $o'p'$, on en conclut que les points cherchés sont (e, e') et (k, k'). Les tangentes en ces points étant parallèles, la droite (ek, $e'k'$) est un diamètre du cercle section ; de plus, comme ces tangentes sont horizontales, elles sont parallèles à (ωh, $\omega' h'$); donc, aux points e et k, les tangentes sont perpendiculaires à ek, de sorte que cette droite est l'un des axes de la projection horizontale de la section, e et k étant d'ailleurs les sommets situés sur cet axe.



On a déterminé d'une manière analogue les points (l, l') et (m, m')

(*) Accidentellement le point e'_1 se trouve sur la ligne de rappel du point (d, d').

en lesquels la tangente est de front. Les points l' et m' sont deux sommets de la projection verticale de la section.

Pour faire la ponctuation de la projection horizontale, on observe que le point (d, d') étant vu en projection horizontale, parce qu'il est sur l'hémisphère supérieur de la sphère, l'arc adb est vu et l'arc aeb est caché.

On voit d'une manière analogue que l'arc $c'a'd'$ de la projection verticale est vu, tandis que l'arc $c'm'd'$ est caché.

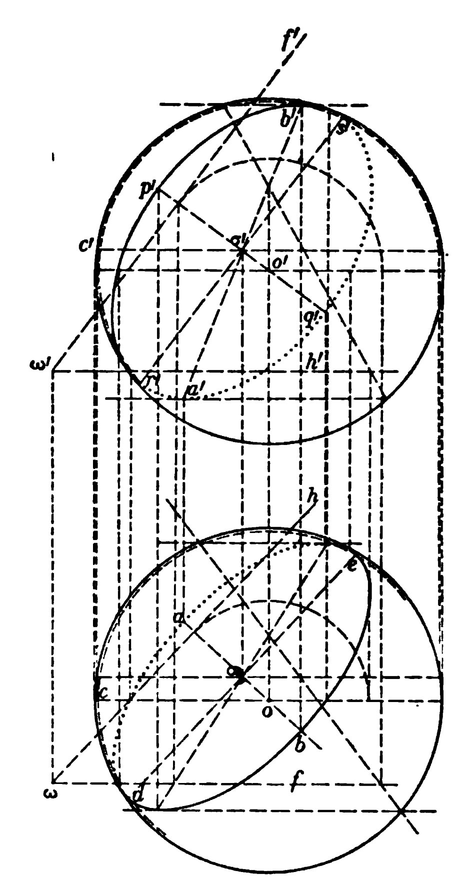
§ II. — *Détermination des axes des projections de la section.*

433. **Première méthode.** — Toute section plane d'une sphère est un cercle dont les projections sont des ellipses. Or on a vu (165) que si l'on projette un cercle sur un plan P, que nous supposons horizontal pour fixer les idées, le grand axe de l'ellipse ainsi obtenue est la projection, sur le plan P, du diamètre horizontal du cercle; quant au petit axe, il est la projection, sur le même plan, du diamètre perpendiculaire au diamètre horizontal, c'est-à-dire du diamètre qui est en même temps une ligne de plus grande pente du plan du cercle. Les tangentes au cercle aux extrémités de ce diamètre de plus grande pente étant perpendiculaires à ce même diamètre sont horizontales.

D'après cela, une première méthode pour déterminer les axes des projections d'une section plane d'une sphère résulte de la méthode suivie (432) pour déterminer les points de la section en lesquels la tangente à cette ligne est horizontale ou de front.

Soit donc (o, o') la sphère considérée coupée par le plan défini par l'horizontale $(\omega h, \omega' h')$ et par la frontale $(\omega f, \omega' f')$. Si l'on détermine, comme au nº 432, les points de la section en lesquels la tangente est horizontale, on obtient les points (a, a') et (b, b'). Nous avons vu (432) que ab est un axe de la projection horizontale, et nous venons de montrer que c'est le petit axe de cette projection. Pour trouver le grand axe, il faut construire la projection horizontale du diamètre horizontal de la section. Or, le centre de la section est projeté au point (σ, σ'), milieu de $(ab, a'b')$; le diamètre horizontal est donc projeté verticalement en $\sigma'c'$ et horizontalement suivant la perpendiculaire à ab menée par σ. Pour avoir ses extrémités, il n'y a donc qu'à couper la sphère par le plan auxiliaire $\sigma'c'$

qui donne un cercle dont la projection horizontale a pour centre le point *o* et pour rayon *oc*. Ce cercle rencontre la perpendiculaire à



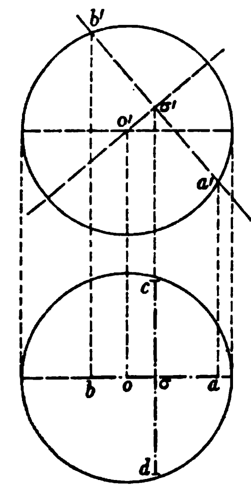
ab menée par *σ* en deux points *d* et *e*, qui sont les extrémités du grand axe de la projection horizontale de la section.

On détermine d'une manière analogue, d'abord le petit axe *p'q'*, et ensuite le grand axe *r's'* de la projection verticale.

434. **Deuxième méthode.** — Supposons que le plan sécant soit vertical ou de bout, par exemple de bout, et soit *a'b'* sa trace verticale. Il n'y a pas lieu, dans ce cas, de déterminer les axes de la projection verticale, puisqu'elle se réduit à la portion de droite *a'b'*.

Pour trouver les axes de la projection horizontale, on observe

que le diamètre horizontal du cercle est de bout, puisque le plan du cercle section est lui-même de bout. Mais le centre de ce cercle est le point (σ, σ'), intersection du plan sécant et de la perpendiculaire à ce plan, menée par le centre de la sphère; il en résulte que le grand axe de la projection horizontale est situé sur la ligne de rappel du point (σ, σ'). Il ne reste donc plus, pour achever de le déterminer, qu'à trouver sa longueur. Pour cela, il suffit de remarquer que la longueur du grand axe est égale à la longueur du diamètre de la section et que, d'autre part, la projection verticale de la section est une portion de droite de même longueur que le diamètre. Si donc on prend $\sigma c = \sigma d = \frac{a'b'}{2}$, on obtiendra en cd le grand axe de la projection horizontale.



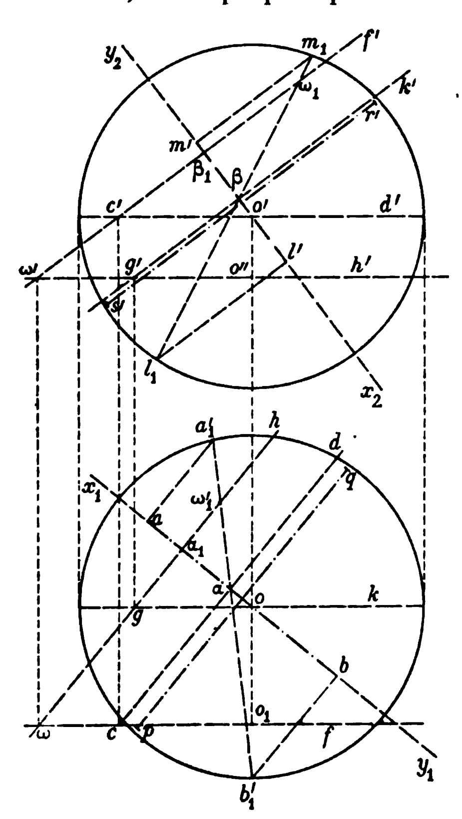
Il faut maintenant trouver le petit axe de cette même projection, c'est-à-dire la projection horizontale du diamètre de plus grande pente. Ce diamètre de plus grande pente est ici de front puisque les horizontales du plan sécant sont des lignes de bout, et ses projections sont ab et $a'b'$. Il est situé dans le plan de front mené par le centre de la sphère et coupe celle-ci en deux points (a, a') et (b, b'). Il en résulte que les points a et b sont les sommets situés sur le petit axe de la projection horizontale.

La construction des axes de la projection horizontale est donc immédiate dans ce cas particulier, et l'on a, bien entendu, par analogie, une construction tout aussi simple des axes de la projection verticale quand le plan sécant est vertical au lieu d'être de bout.

Cela posé, une deuxième méthode pour déterminer les axes des projections d'une section plane d'une sphère consiste à ramener le cas général au cas particulier qu'on vient d'examiner, par des changements de plans de projection.

Soit (o, o') le centre de la sphère et soient (ωh, $\omega' h'$) et (ωf, $\omega' f'$) les deux droites qui déterminent le plan sécant. Pour trouver les axes de la projection horizontale, nous prendrons comme plan vertical de projection le plan vertical mené par le centre de la sphère perpendi-

culairement au plan sécant ; la ligne de terre sera alors la perpendiculaire ab à ωh menée par le point o. Nous prendrons de plus, comme plan horizontal, celui qui passe par le centre de la sphère et qui coupe le plan sécant suivant la droite $(cd, c'd')$. La droite cd est la trace horizontale du plan sécant dans le nouveau système de projections, et, pour avoir la trace verticale, il n'y a qu'à joindre au point α la nouvelle projection verticale d'un point du plan, par exemple du point (ω, ω'). On obtient cette projection verticale nouvelle en prenant $\alpha_1\omega'_1$, égale à la distance du point (ω, ω') au plan horizontal, distance qui est mesurée par $o'o''$. On a donc en $a'_1b'_1$ la trace verticale du plan sécant, et on en déduit les axes ab et pq de la projection horizontale comme cela a été expliqué plus haut.



Pour trouver, de même, les axes de la projection verticale, nous prendrons comme plan horizontal de projection le plan de bout mené par le centre de la sphère perpendiculairement au plan sécant ; la ligne de terre sera alors la perpendiculaire x_2y_2 à $\omega'f'$ menée par le point o'. Nous prendrons de plus, comme plan vertical, le plan de front mené par le centre de la sphère et qui coupe le plan sécant suivant la droite $(gk, g'k')$. La droite $g'k'$ est la trace verticale du plan sécant dans le nouveau système de projection, et, pour obtenir la trace horizontale, il n'y a qu'à joindre au point β la nouvelle projection horizontale d'un point du plan, du point (ω, ω') par exemple. On obtient d'ailleurs cette projection horizontale nouvelle en prenant $\beta_1\omega_1$ égale à la distance du point (ω, ω') au plan vertical, distance qui est mesurée

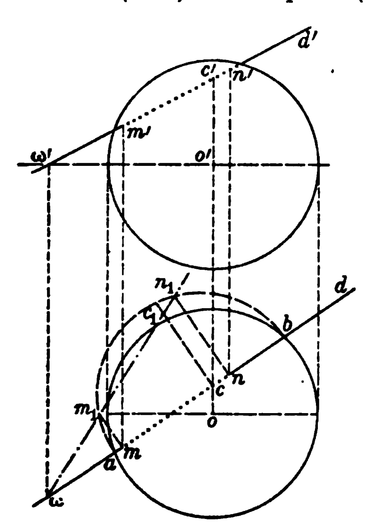
par oo_1. On a donc ainsi en l_1m_1 la trace horizontale du plan sécant dans le système x_2y_2, et on en déduit les axes $l'm'$ et $r's'$ de la projection verticale comme cela a été expliqué plus haut.

§ III. — *Points de rencontre d'une droite et d'une sphère.*

435. **Méthode générale pour trouver les points de rencontre d'une droite et d'une surface.** — La méthode générale pour trouver les points de rencontre d'une droite et d'une surface consiste à couper la surface par un plan auxiliaire passant par la droite et à prendre les points de rencontre de la droite avec la section ainsi obtenue. La simplicité des constructions dépend évidemment du choix du plan mené par la droite.

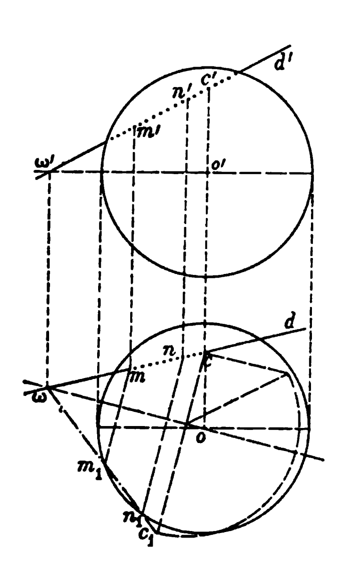
Dans le cas particulier où la surface est une sphère on peut prendre comme plan auxiliaire soit un plan projetant la droite, soit le plan déterminé par la droite et par le centre de la sphère. De là résultent les deux méthodes que nous allons exposer.

436. **Première méthode.** — Soit à trouver les points de rencontre de la droite (d, d') avec la sphère (o, o'). Prenons comme plan auxiliaire le plan projetant horizontalement la droite. Ce plan coupe la sphère suivant un cercle, dont les points de rencontre avec la droite sont les points demandés. Pour obtenir ces points de rencontre, rabattons le plan auxiliaire sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère. Le cercle section se rabat suivant la circonférence décrite sur ab comme diamètre. Le point (ω, ω') où la droite rencontre le plan horizontal mené par (o, o') reste fixe, et, pour obtenir le rabattement de la droite, il suffit d'en rabattre un point quelconque, (c, c') par exemple. Ce point se rabattant d'ailleurs en c_1, on a en ωc_1



le rabattement de la droite : il en résulte que les points de rencontre de la droite et de la sphère sont rabattus en m_1 et en n_1. Par une opération inverse on en déduit les points de rencontre demandés (m, m') et (n, n').

437. **Deuxième méthode.** — Soit encore à trouver les points de rencontre d'une droite (d, d') avec la sphère (o, o'). Prenons maintenant comme plan auxiliaire le plan déterminé par la droite et par le centre de la sphère. Ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle dont les points de rencontre avec la droite sont les points cherchés. Pour les obtenir, on rabat le plan du cercle sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère ou sur le plan de front mené par le même point. Supposons que l'on rabatte sur le plan horizontal mené par le centre de la sphère. Le grand cercle se rabat suivant le grand cercle de contour apparent horizontal, et, pour obtenir le rabattement de la droite, il suffit de joindre le point ω, qui reste fixe, au rabattement c_1 d'un point (c, c'). Les points cherchés sont donc rabattus en m_1 et en n_1 ; on en déduit leurs projections m, m', n, n' en relevant les points m_1 et n_1.

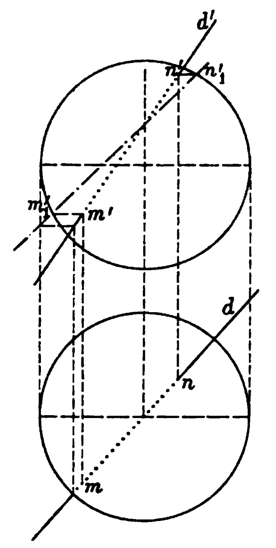


438. Remarque. — Cette méthode suppose que la droite (d, d') ne passe pas par le centre de la sphère. Si la droite passait par le centre de la sphère, il serait préférable d'employer la première méthode ou, mieux encore, d'observer que les points demandés s'obtiennent en portant sur la droite (d, d'), à partir du point (o, o') et de part et d'autre de ce point, une longueur égale au rayon de la sphère.

La méthode suivante serait encore applicable à ce cas particulier.

439. **Cas où la droite rencontre le diamètre vertical ou le diamètre de bout de la sphère.** — Pour fixer les idées, supposons que la droite

rencontre le diamètre vertical de la sphère. Faisons alors tourner la droite autour de ce diamètre jusqu'à ce qu'elle soit de front, et soient m'_1 et n'_1 les points de rencontre de la nouvelle projection verticale de la droite avec le cercle de contour apparent de la sphère sur le plan vertical. Si l'on remarque que la sphère est de révolution autour de son diamètre vertical, comme d'ailleurs autour de tout diamètre, on en conclut que m'_1 et n'_1 sont les projections verticales des points cherchés après la rotation. On en déduit les projections verticales anciennes m' et n', puis les projections horizontales m et n.



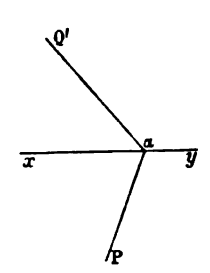
Au fond cette méthode est identique à la deuxième. Mais elle est présentée sous une forme légèrement différente et, sous cette forme, elle s'applique au cas où la droite passe par le centre de la sphère.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1. On coupe une sphère par le plan diamétral qui passe par la ligne de terre, ce qui donne un grand cercle Γ. Dans le plan de profil du centre de la sphère, on mène la tangente inclinée à 45° sur les deux plans de projection, et on coupe la sphère par les deux plans menés par cette tangente et tangents au grand cercle Γ. Représenter le solide qui reste de la sphère quand on enlève la portion qui est intérieure au tétraèdre déterminé par les trois plans.

2. Les coordonnées du centre d'une sphère de 55mm de rayon sont : 0, 90mm, 65mm. On coupe cette sphère : 1° par le plan bissecteur du premier dièdre; 2° par un plan passant par le centre de la sphère, faisant un angle de 60° avec le plan horizontal, et dont les horizontales font un angle de 45° avec le plan vertical. Représenter la partie solide de la sphère comprise dans l'un des dièdres formés par ces deux plans. Ligne de terre suivant le petit axe de la feuille.

3. Par un point α, de coordonnées 120^{mm}, 0, 0, on mène un plan $P\alpha Q$ tel que $\widehat{P\alpha x} = 70°$ et $\widehat{Q'\alpha x} = 50°$. Dans ce plan on prend un point (c, c') de coordonnées 0, 78^{mm} et 80^{mm}. Du point C comme centre on décrit un cercle de 44^{mm} de rayon dans le plan $P\alpha Q'$. Une sphère passant par ce cercle a son centre dans le plan de profil mené par le centre de la feuille. On considère le diamètre de cette sphère qui passe par le point M de coordonnées 60^{mm}, 0, 0, et on coupe la sphère par le plan diamétral perpendiculaire à cette droite. Représenter la partie solide de la sphère comprise entre le plan ainsi mené et le plan $P\alpha Q'$, en conservant le point le plus haut de la sphère.



4. Les coordonnées du centre (o, o') d'une sphère sont x, 60^{mm}, 70^{mm}. La sphère a 50^{mm} de rayon. On coupe cette sphère par un plan $P\alpha Q'$ (*fig.* du problème 3) tel que $\widehat{P\alpha x} = 45°$ et $\widehat{Q'\alpha x} = 60°$. La droite $P\alpha$ passe par le point o, projection horizontale du point (o, o'), ce qui détermine la valeur de x. On coupe aussi la sphère par le plan vertical, P, mené par $P\alpha$ et par le plan de bout, Q', mené par $Q'\alpha$. Représenter : 1° la partie solide de la sphère située au-dessus du plan $P\alpha Q'$, en arrière du plan P et au-dessous du plan Q'; 2° la projection de ce solide sur un plan perpendiculaire à P et à $P\alpha Q'$.

5. Un tétraèdre SABC a sa face ABC horizontale; cette face est un triangle équilatéral de 120^{mm} de côté, et les hauteurs du tétraèdre issues de A, de B et de C sont égales respectivement à 100^{mm}, 90^{mm} et 80^{mm}. Une sphère est concentrique à la sphère inscrite au tétraèdre et est tangente au côté BC. Construire la projection horizontale de la partie du tétraèdre située hors de la sphère.

6. Sphère et pyramide. — Une sphère de 120^{mm} de diamètre a son centre situé à 100^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 90^{mm} en avant du plan vertical de projection.

Une pyramide a son sommet situé sur la ligne de terre à 80^{mm} à gauche de la ligne de rappel du centre de la sphère; sa base est un hexagone régulier inscrit dans le cercle d'équateur de la sphère; un côté de cet hexagone est parallèle à la ligne de terre.

On demande de déterminer l'intersection des deux surfaces et de représenter la sphère seule, avec l'entaille pratiquée dans sa masse par la pyramide.

On indiquera clairement la méthode suivie :

1° Pour trouver un point courant (m, m') de l'intersection et la tangente en ce point (constructions à l'encre rouge);

2° Pour trouver en projection horizontale et verticale les axes des ellipses projections de l'intersection de la sphère par une des faces de la pyramide (constructions à l'encre bleue).

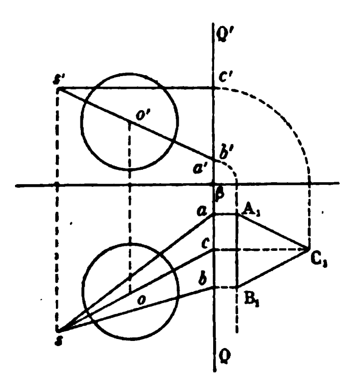
(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1894.*)

7. Intersection d'une sphère de centre (O, O') par une pyramide triangulaire ayant son sommet (S, S') sur la surface de la sphère et une face parallèle à la ligne de terre.

Déterminer complètement la section plane.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours de 1889.*)

8. Pénétration d'une sphère par une pyramide triangulaire, ayant pour base sur le plan de profil $Q\beta Q'$ un triangle isocèle $A_1B_1C_1$. L'arête *sc* en projection horizontale passe par le point *o*, et *s'a'*, *s'b'* passent en projection verticale par *o'*; (*sc*, *s'c'*) est horizontale.



Construire l'intersection des trois arêtes et des trois faces de la pyramide avec la sphère. Mener les tangentes en un des points d'intersection de l'arête horizontale avec la sphère.

Représenter à part le solide commun et développer ses faces planes.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours de 1895.*)

9. Etant donnée une sphère dont le centre se trouve dans le premier dièdre à égale distance du plan horizontal et du plan vertical ($o\omega = o'\omega = 50^{mm}$) et dont le rayon R est égal à la moitié de cette distance ($R = 25^{mm}$), on demande de construire les projections d'un tronc de pyramide triangulaire $ABCA_1B_1C_1$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les plans de base ABC et $A_1B_1C_1$ sont tangents à la sphère, parallèles à la ligne de terre et font un angle de 45° avec la partie postérieure du plan horizontal;

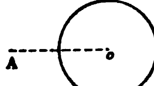
2° Les arêtes AA_1, BB_1, CC_1 prolongées passent par le point ω; elles sont tangentes à la sphère et font entre elles des angles égaux.

On placera l'arête AA_1 dans le plan de profil $o'\omega o$ et de manière à faire avec le plan horizontal le plus grand angle possible.

On indiquera les intersections de la sphère et des faces du tronc de pyramide.

(*Ecole navale, concours de 1885.*)

10. Une sphère de rayon R = 50^{mm} est tangente au plan horizontal de cote zéro au point *o*. D'un point A, situé dans ce plan à une distance OA = 100^{mm}, on mène successivement :



1° Les deux tangentes à la sphère faisant avec la verticale un angle de 40° ;

2° Les deux tangentes à la sphère faisant avec l'horizontale OA un angle de 23°.

Ces quatre tangentes étant considérées comme les arêtes d'une pyramide indéfinie de sommet A, tracer la projection du volume commun à la sphère et à cette pyramide.

(*École navale, concours de 1895.*)

11. Un tétraèdre SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal ; l'angle trièdre S est trirectangle ; les côtés de la base sont

AB = 209^{mm}, BC = 193^{mm} et AC = 149^{mm}.

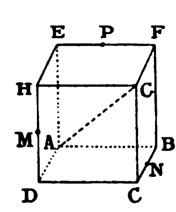
AB est parallèle à la ligne de terre (A à droite) et à une distance de cette ligne de 22^{mm}.

Construire l'intersection de ce tétraèdre et de la sphère qui passe par le point S et par les milieux des côtés du triangle ABC.

Pour la mise à l'encre, on représentera le solide commun à la sphère et au tétraèdre.

(*École de Saint-Cyr, concours de 1892.*)

12. On donne dans le premier dièdre un point A dont la cote $\alpha a'$ est $1^{cm},9$; l'éloignement αa, $2^{cm},2$; et un point G dont la cote $\gamma g'$ est $5^{cm},3$, l'éloignement γg, $4^{cm},8$, et dont la distance au plan de profil de A vers la droite est $5^{cm},2$. La droite AG est une diagonale du parallélépipède rectangle dont une face est horizontale, une autre parallèle au plan vertical ; trouver : 1° les projections du parallélépipède ; 2° celles de la sphère qui lui est circonscrite.



Par les milieux M, N, P des trois arêtes DH, BC, EF on fait passer un plan ; trouver les intersections de ce plan avec le parallélépipède, avec la sphère, et les vraies grandeurs de ces sections.

Pour la mise à l'encre, on supprimera la portion de la sphère située au-dessus du plan sécant, et la portion de parallélépipède située au-dessous.

(*École de Saint-Cyr, concours de 1885.*)

13. Un tétraèdre est placé sur le plan horizontal. Un des côtés de la base *ab* (*a* est à gauche) est parallèle à *xy* et distant de cette ligne de $3^{cm},5$. Sa longueur est de 10^{cm} ; les deux autres côtés ont pour longueurs $ac = 12^{cm},3$, $bc = 11^{cm}$. L'arête $Sa = 13^{cm}$; l'arête $Sc = 12^{cm},5$; l'an-

gle dièdre formé par les deux faces *abc* et S*ac* est de 70°. Construire ce tétraèdre. A partir du sommet S on prend sur S*a* une longueur SO = 5cm, et du point O comme centre on décrit une sphère passant par le sommet S. Trouver l'intersection de cette sphère avec le tétraèdre.

Dans la mise à l'encre on supposera enlevée toute la portion du tétraèdre détachée par la sphère.

(*Saint-Cyr, 1re épreuve, 1887.*)

14. Un tétraèdre SABC, dont la face ABC est située sur le plan horizontal, est déterminé de la manière suivante : le sommet S a pour cote 7cm et pour éloignement 3cm. L'arête SA est dans un plan de profil et le point A a pour éloignement 11cm,5. La face SBC (B à gauche) est parallèle au plan vertical. Les faces SAB et SAC font chacune avec le plan de profil qui contient l'arête SA un angle de 45°. Sur l'arête SB on prend, entre S et B, un point D à 2cm du sommet S, et par ce point D on mène un plan perpendiculaire à l'arête SB ; ce plan coupe SC en E et SA en F.

1° Construire les projections du triangle DEF.

2° On considère la sphère qui a DE pour diamètre. Représenter le solide commun à cette sphère et au tétraèdre.

(*Saint-Cyr, 1888.*)

15. Un tétraèdre SABC dont l'angle trièdre S est trirectangle, a sa base ABC sur le plan horizontal. AB est sur la ligne de terre (A vers la gauche) et a pour longueur 140mm. La projection horizontale du sommet S est un point *s* dont les distances aux points A et B sont A*s* = 105mm et B*s* = 49mm.

Construire ce tétraèdre, puis son intersection avec la sphère ayant S pour centre et passant par le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on représentera la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère S.

(*Saint-Cyr, 1891.*)

16. 1° Construire un tétraèdre TABC dont la base ABC est sur le plan horizontal, connaissant les longueurs des six arêtes : BC = 200mm, CA = 189mm, AB = 151mm, TA = 113mm, TB = 107mm, TC = 131mm (BC parallèle à xy à la distance de 30mm, B à droite, A plus éloigné que BC de xy).

2° Construire un cône de révolution à axe vertical, dont la trace horizontale, tangente à AB, a pour centre la projection *t* de T, et dont les génératrices font avec le plan horizontal un angle égal à l'inclinaison de la face BTC sur le plan horizontal.

3° Construire l'intersection de la pyramide et du cône. Tangentes aux points remarquables. Représenter la portion de la pyramide extérieure au cône, portion supposée opaque.

(*Saint Cyr, 1893.*)

17. Une sphère de centre O, de rayon égal à 9^{cm}, est tangente au plan horizontal. Soit AB un diamètre horizontal de la sphère, C le milieu du rayon OA, D le point le plus élevé de la sphère. Par les trois points B, C, D mener trois parallèles faisant des angles de 45° avec le plan horizontal et perpendiculaires à la direction AB. Trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère et de la surface prismatique indéfinie ayant ces trois parallèles pour arêtes latérales.

Représenter la portion (supposée opaque) de la sphère comprise dans la surface prismatique. Construire les sommets des ellipses formant la projection de l'intersection, et écrire les cotes des points correspondants.

Mener les tangentes à ces ellipses en leurs points situés sur les projections des arêtes.

Construire les projections des points de l'intersection déterminés par le plan horizontal de cote 16.

Mener à l'intersection les tangentes parallèles aux côtés du triangle BCD et écrire les cotes des points de contact.

(*Saint-Cyr, 1895.*)

CHAPITRE IV

SECTIONS PLANES DES SURFACES DE RÉVOLUTION

---

§ I. — *Construction des points de la section.*

440. Le plan sécant est perpendiculaire à l'axe. — Lorsqu'on coupe une surface de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe, la section se compose d'un ou de plusieurs parallèles. Ces parallèles ont pour centre commun le point de rencontre de l'axe et du plan sécant, de sorte que chacun d'eux est déterminé par un point. Pour obtenir un point de chacun de ces parallèles, il suffit d'ailleurs de déterminer les points de rencontre du plan sécant avec une génératrice de la surface de révolution.

Le problème est particulièrement simple lorsque l'axe de la surface est vertical ou de bout, car l'une des projections de l'un quelconque des parallèles d'intersection se réduit alors à une droite, et l'autre projection est un cercle égal au parallèle.

441. Le plan sécant passe par l'axe. — Lorsque le plan sécant passe par l'axe la section est une méridienne de la surface, et nous avons appris plus haut (**271**, **272**, etc.) à la construire dans les principaux cas; nous n'y reviendrons donc pas.

442. Méthode générale pour obtenir les points d'une section par un plan quelconque. — La méthode à suivre pour obtenir un point quelconque d'une section plane d'une surface de révolution consiste à déterminer les points de rencontre des génératrices de la surface avec le

plan sécant. La simplicité des constructions dépend du choix de la génératrice et ce choix dépend lui-même de la position de l'axe par rapport aux plans de projection.

1° Quelle que soit la position de l'axe, on peut prendre comme génératrices les parallèles de la surface. Pour obtenir alors des points de la section, on prend un point quelconque A sur la directrice et on détermine les points de rencontre du parallèle de ce point avec le plan sécant. Pour cela, on construit d'abord l'intersection du plan de ce parallèle avec le plan sécant, puis on cherche les points de rencontre de la droite ainsi obtenue avec le parallèle.

D'après cela, pour obtenir tous les points de la section, il n'y a qu'à répéter les mêmes constructions en faisant décrire une fois toute la directrice au point A.

Pour tracer la courbe section, on observe qu'il y a, en général, deux points de cette ligne sur chaque parallèle. Chacun de ces points, quand le point A se déplace dans un sens déterminé sur la directrice, décrit une branche de courbe dont on obtient deux arcs en joignant les deux points aux deux points respectivement voisins obtenus quand le point A passe d'une première position à une position voisine. En procédant ainsi, de proche en proche, on obtient les deux branches de courbe décrites respectivement par les deux points et qui se rejoignent quand les deux points viennent se confondre.

2° Quand on connaît une méridienne de la surface et que l'axe est vertical ou de bout, on peut avoir avantage à déterminer les points de la section en prenant comme génératrices les méridiennes de la surface. Le plan de l'une quelconque de ces méridiennes coupe le plan sécant suivant une droite Δ, dont les points de rencontre avec la méridienne μ sont des points de la section. Pour déterminer ces points, on rabat le plan de la méridienne μ sur le plan de la méridienne connue, en le faisant tourner autour de l'axe; la droite Δ prend alors une position Δ_1 dans laquelle elle rencontre la méridienne connue en des points qui sont les positions des points cherchés après le rabattement, et il n'y a plus alors qu'à faire une opération inverse. Cette méthode a été employée dans le cas de la sphère (430, 2°).

443. **Tangente en un point courant de la section.** — La tangente en un point quelconque de la section peut être obtenue de deux manières : soit en la considérant comme l'intersection du plan tangent

en ce point avec le plan de section, soit en la considérant comme la perpendiculaire menée par le point au plan des deux normales. On a appris d'ailleurs à construire la normale au plan sécant (119) et la normale à la surface (337).

444. Parallèles limites. — Nous avons vu (**442, 1°**) que si l'on considère la surface comme engendrée par ses parallèles, sur chacun de ces parallèles il y a en général deux points de la section : on appelle *parallèles limites* ceux pour lesquels ces deux points sont confondus. Il est aisé de les obtenir. Pour cela, il y a deux cas à examiner suivant que le parallèle limite cherché a un rayon nul ou différent de zéro.

Lorsque le parallèle limite a un rayon nul, il se réduit à un point situé sur l'axe de la surface, et le plan sécant passe par ce point. Ces sortes de parallèles limites s'obtiennent donc en prenant, parmi les points de rencontre de l'axe et du plan sécant s'il y en a plusieurs, ceux qui appartiennent en même temps à la surface. Il est bien entendu, d'ailleurs, que l'axe et le plan sécant ne peuvent avoir plusieurs points communs que si le premier est contenu dans le second.

Supposons donc que le parallèle limite n'ait pas un rayon nul. Dans ce cas, puisqu'il a deux points communs confondus avec le plan sécant, c'est qu'il est tangent à ce plan. Appelons A le point de contact et D la tangente au parallèle en ce point. Cette tangente est évidemment contenue dans le plan sécant, de sorte que le plan perpendiculaire à D mené par A est perpendiculaire au plan sécant; mais le plan mené par A perpendiculairement à D est perpendiculaire à une tangente au parallèle limite et passe par l'axe de la surface; il est donc confondu avec le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant. D'après cela, pour obtenir les parallèles cherchés on mènera par l'axe le plan auxiliaire perpendiculaire au plan sécant, et l'on cherchera, par la méthode exposée au n° **442, 2°**, les points de la section situés dans ce plan auxiliaire. Les parallèles des points ainsi obtenus seront les parallèles limites de la deuxième espèce.

Il est bon d'observer que les points qui fournissent ces parallèles se trouvent sur la droite d'intersection du plan auxiliaire et du plan sécant, droite qui passe par les points communs à l'axe et au plan sécant. Cette droite fournit donc aussi les parallèles limites de rayon nul, quand il y en a.

Nous appellerons *points limites* les points de la section situés sur les parallèles limites.

445. **Tangente en un point limite.** — Appelons encore A un point limite et distinguons deux cas suivant que le parallèle du point A n'est pas ou est de rayon nul.

1° Supposons d'abord que le parallèle du point A ne soit pas de rayon nul et appelons D la tangente en A à ce parallèle. Nous avons déjà dit (444) que cette tangente est contenue dans le plan de section ; d'autre part, elle est évidemment dans le plan tangent en A à la surface ; donc elle est la tangente cherchée.

2° Supposons maintenant que le parallèle du point A soit de rayon nul. Alors le point A est sur l'axe et le lieu des tangentes en A à la surface est en général un cône de révolution. Le plan sécant coupe en général ce cône suivant deux génératrices, qui sont les tangentes demandées ; de sorte qu'en général le point A est un point double de la section à tangentes distinctes.

446. **Points à l'infini.** — Pour qu'un point de la section soit à l'infini, il faut que le rayon du parallèle correspondant soit infini. Si donc la méridienne n'a pas une asymptote perpendiculaire à l'axe, il faut que le parallèle qui donne le point à l'infini soit lui-même à l'infini. Mais le cône circonscrit à la surface le long de ce parallèle à l'infini n'est autre chose qu'un cône asymptote à la surface ; par suite, les points à l'infini sont les mêmes que ceux de la section des divers cônes asymptotes par le plan sécant.

Si un cône asymptote se réduit à un plan perpendiculaire à l'axe, c'est-à-dire si la méridienne a une asymptote perpendiculaire à l'axe, le plan sécant coupe le plan perpendiculaire à l'axe mené par cette asymptote suivant une droite qui est la direction d'un point à l'infini.

447. **Asymptotes.** — Quand un point s'éloigne indéfiniment, la tangente à la section en ce point a pour limite l'asymptote au point à l'infini correspondant. L'asymptote correspondant à un point à l'infini est donc l'intersection du plan sécant et du plan tangent en ce point à l'infini. Comme le plan tangent au point à l'infini est tangent au cône asymptote, que d'autre part le point à l'infini est lui-même sur ce cône, il en résulte que les asymptotes d'une section plane d'une surface

de révolution sont les mêmes que celles de la section obtenue en coupant le cône asymptote par le même plan.

448. **Méridiens limites.** — Supposons que pour avoir les points de la section on considère la surface comme engendrée par ses méridiennes, ce qui revient à déterminer les points de la section situés sur les méridiens successifs de la surface. Le plan d'une méridienne coupe le plan sécant suivant une droite Δ. Lorsque cette droite est tangente à la méridienne correspondante le plan de cette méridienne s'appelle un *méridien limite.*

Il est aisé d'obtenir tous les méridiens limites, quand il y en a. Observons en effet que la droite Δ passe par le point de rencontre S de l'axe de la surface et du plan sécant. Pour les méridiens limites les droites analogues à Δ sont des tangentes menées par S aux méridiennes limites. Mais le lieu des tangentes menées par le point S aux diverses méridiennes de la surface est le cône de sommet S circonscrit à la surface ; il en résulte que les droites Δ sont à l'intersection de ce cône et du plan sécant. L'une quelconque de ces droites et l'axe déterminent le plan d'un méridien limite.

449. **Tangente en un point situé sur un méridien limite.** — Lorsqu'un point de la section est situé sur un méridien limite, la tangente à la section en ce point est confondue avec la tangente à la méridienne correspondante ; car la tangente à cette méridienne est contenue à la fois dans le plan sécant et dans le plan tangent à la surface au point considéré.

450. Remarque. — Il est bon d'observer, en terminant, que le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant étant un plan de symétrie pour la surface et pour le plan sécant est un plan de symétrie de la section. Il en résulte que la trace de ce plan sur le plan sécant est un axe de symétrie de la section.

451. **Un exemple de section plane.** — Comme application, proposons-nous de construire une section plane d'un tore de révolution à axe vertical. Soit $(oz, o'z')$ l'axe du tore défini en outre par sa méridienne $\omega'\omega'_1$. Supposons le plan sécant déterminé par la droite $(ab, a'b')$ située dans le plan horizontal $\omega'\omega'_1$ et par le point (o, o') situé sur l'axe.

Pour construire la section obtenue en coupant le tore par ce plan, nous avons à construire : 1° les points sur les parallèles limites; 2° les points sur les méridiens limites; 3° un point quelconque et la tangente en ce point; 4° les points sur les contours apparents.

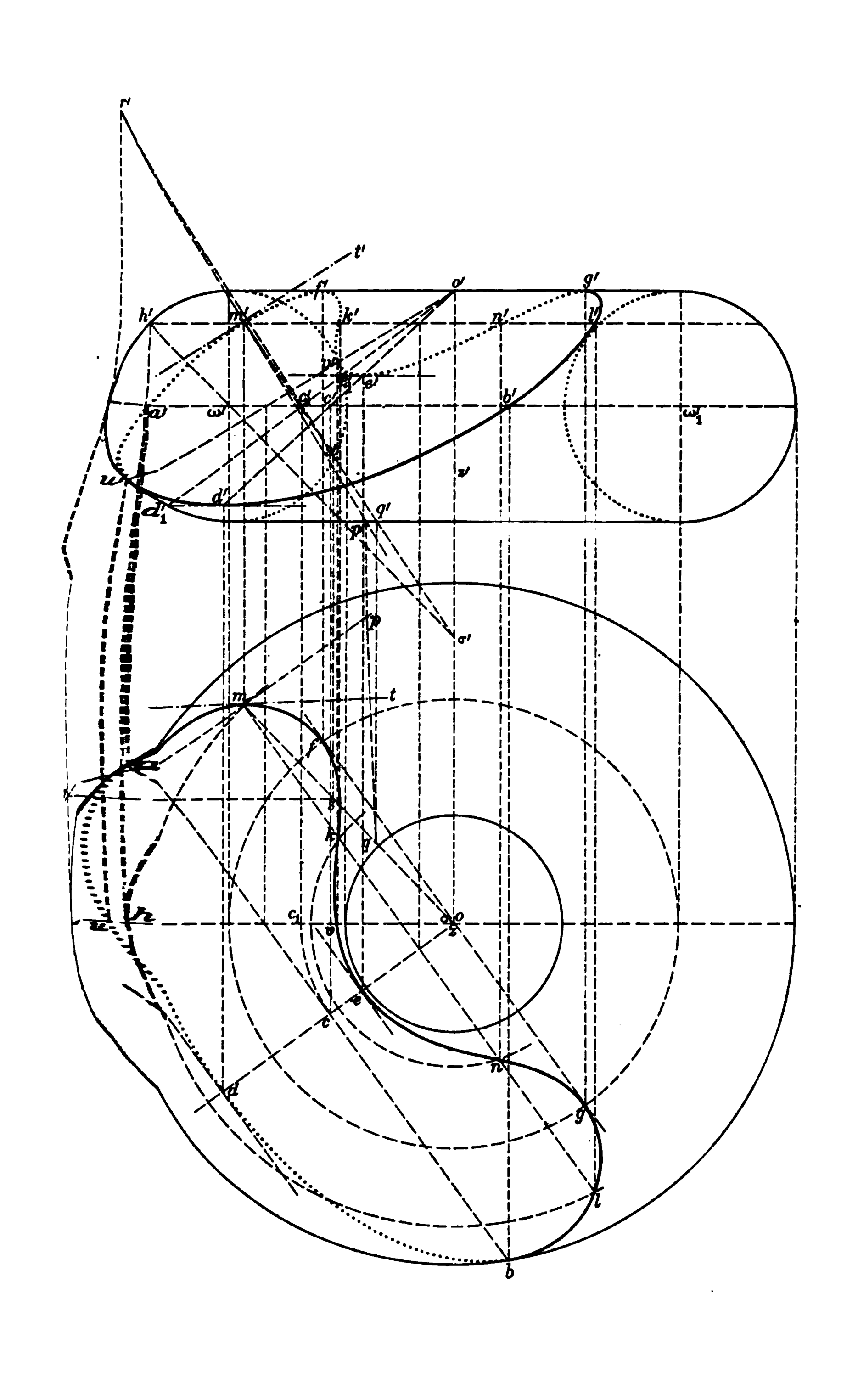
1° *Points sur les parallèles limites.* — Le plan perpendiculaire au plan sécant mené par l'axe (444) coupe le plan sécant suivant la droite $(oc, o'c')$; cette droite amenée dans le plan de front de l'axe en $(oc_1, o'c'_1)$ rencontre la méridienne en deux points dont les projections verticale sont d'_1 et e'_1 ; il en résulte que les points (d, d') et (e, e') sont les points situés sur les parallèles limites. Aux points d et e les tangentes sont perpendiculaires à oc (445), tandis qu'elles sont horizontales aux points d' et e'.

2° *Points sur les méridiens limites.* — On peut circonscrire à la surface deux cônes de sommet (o, o') (448). L'un de ces cônes est un cône véritable et n'est pas coupé par le plan sécant; l'autre se réduit au plan horizontal $f'g'$ qui coupe la surface suivant le parallèle of et le plan sécant suivant la droite $(fg, f'g')$; il en résulte que les points (f, f') et (g, g') sont les points situés sur le méridien limite, dont la trace horizontale est d'ailleurs fg. En f et en g la tangente est fg, tandis qu'elle est $f'g'$ en f' et en g' (449).

3° *Construction d'un point courant et de la tangente en ce point.* — Pour obtenir un point quelconque de la section, considérons un parallèle quelconque de la surface projeté verticalement en $h'l'$. Le plan de ce parallèle coupe la surface suivant deux parallèles; il coupe le plan sécant suivant une droite $(ml, m'l')$. Cette droite rencontre les deux parallèles en quatre points de la section : (m, m') ; (l, l') ; (k, k') ; (n, n').

Construisons la tangente au point (m, m'). Pour cela, menons la normale $(\sigma m, \sigma' m')$ à la surface, la normale $(mp, m'p')$ au plan sécant, et menons par le point (m, m') la perpendiculaire $(mt, m't')$ au plan de ces deux normales, en construisant d'abord une horizontale $(pq, p'q')$ de ce plan et une frontale $(rs, r's')$. La droite $(mt, m't')$ est la tangente demandée.

4° *Points sur les contours apparents.* — Les points sur le contour apparent horizontal s'obtiennent en coupant par le plan horizontal $\omega'\omega'_1$: on obtient ainsi les deux points (a, a') et (b, b').



En coupant de même par le plan de front mené par l'axe, on obtient les points (u, u') et (v, v') situés sur le contour apparent vertical.

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté la section tracée sur la surface du tore supposée opaque. Le point (d, d') situé au-dessous du plan horizontal $\omega'\omega'_1$ étant caché en projection horizontale, l'arc adb est caché et l'arc $amfkvenglb$ est vu.

Pour la projection verticale, le point (a, a') étant évidemment caché, il en est de même de l'arc $u'a'm'f'k'v'$; mais le point (n, n') est aussi caché par le parallèle du point (m, m') ; donc l'arc $v'e'n'g'$ est aussi caché. Le reste de la courbe est vu en projection verticale.

452. Remarque. — D'après la manière même dont on a construit les points, il est clair que la droite oc est un axe de symétrie de la projection horizontale.

453. **Points de rencontre d'une droite et d'une surface de révolution.** — Comme pour la sphère (435), on peut obtenir les points de rencontre d'une droite et d'une surface de révolution en coupant la surface par un plan passant par la droite : les points communs à la section obtenue et à la droite sont les points cherchés. On prend généralement comme plan sécant l'un des plans projetant la droite, afin de n'avoir à construire qu'une seule projection de la section.

Il y a toutefois exception quand la droite est perpendiculaire à l'axe ou rencontre l'axe. Dans le premier cas on coupe par un plan perpendiculaire à l'axe, parce qu'il coupe la surface suivant des parallèles ; dans le deuxième cas on coupe par le plan du méridien qui contient la droite.

Cette méthode est applicable à toutes les surfaces ; mais pour les surfaces particulières il y a des méthodes particulières qui seront données ultérieurement ou qui ont déjà été données.

§ II. — *Sections planes des quadriques de révolution.*

454. **Détermination des points de la section.** — On détermine les points d'une section plane d'une quadrique de révolution par l'une des méthodes générales exposées au n° 442. Toutefois, quand la quadrique est une surface gauche de révolution, il y a avantage à prendre comme

génératrices les droites tracées sur la surface et à déterminer, par suite, les points de rencontre de ces droites avec le plan sécant.

455. **Nature de la section.** — Rappelons d'abord que si la surface est un cylindre de révolution, la section par un plan est du genre ellipse quand le plan n'est pas parallèle à l'axe, et elle est un système de deux droites parallèles à l'axe, quand le plan est lui-même parallèle à cette droite.

Lorsque la surface est un cône, la nature de la section est fournie par le théorème de Dandelin.

Quand la surface est un ellipsoïde, la section est toujours du genre ellipse; elle peut être une ellipse, une hyperbole ou une parabole dans le cas d'un hyperboloïde ; elle peut même être un système de deux droites réelles qui se coupent ou qui sont parallèles quand l'hyperboloïde est à une nappe. Enfin, quand la surface est un paraboloïde de révolution, la section est du genre ellipse si le plan sécant n'est pas parallèle à l'axe, et elle est une parabole dans le cas contraire.

Nous considérons tous ces résultats comme des conséquences de l'étude analytique des quadriques. Nous voyons d'ailleurs qu'il ne peut y avoir doute sur la nature d'une section plane d'une quadrique de révolution que si cette quadrique est un hyperboloïde. On sait du reste, dans ce cas, que la section est de même nature que celle qu'on obtient en coupant le cône asymptote par le même plan, et on sait déterminer la nature d'une section plane de ce cône (405).

456. **Axes et sommets de la section.** — On peut encore trouver la nature d'une section plane d'une quadrique de révolution en déterminant ses axes et ses sommets. Nous avons vu plus haut (450) qu'on obtient un axe d'une section plane d'une surface de révolution quelconque en prenant la droite d'intersection du plan sécant avec le plan mené par l'axe perpendiculairement au plan sécant. Comme cette construction donne en même temps les points sur les parallèles limites, il y a tout avantage à l'utiliser pour reconnaitre la nature de la section quand la surface est une quadrique.

Pour cela, appelons Δ l'axe ainsi obtenu, et observons qu'il rencontre la surface en deux points réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie. Supposons que le plan coupe effectivement la surface ; alors :

1° Si les deux points de rencontre de Δ et de la surface sont imaginaires, la section est une hyperbole ;

2° Si ces deux points de rencontre sont réels et distincts, la section est du genre ellipse ou hyperbole. Pour trancher la question, appelons A et B ces deux points de rencontre et observons que le milieu de AB est le centre de la section. Coupons le plan sécant par le plan perpendiculaire à AB en son milieu, et appelons Δ_1 la droite d'intersection : cette droite est le second axe de la section. Déterminons alors les points de rencontre de Δ_1 avec la surface : si ces points sont imaginaires, la section est une hyperbole ; s'ils sont réels, c'est une ellipse. Dans l'hypothèse que nous examinons, il ne peut pas se présenter d'autres cas.

3° Si les deux points de rencontre de Δ et de la surface sont confondus, la section est un système de deux droites, et le plan de section est tangent à la surface, à moins que la surface ne soit un cône.

4° Si un seul point de rencontre est à distance finie, on a une parabole ; et enfin si les deux points sont à l'infini, on a deux droites parallèles.

Ajoutons que les points de rencontre de la surface avec Δ et avec Δ_1 sont les sommets de la section.

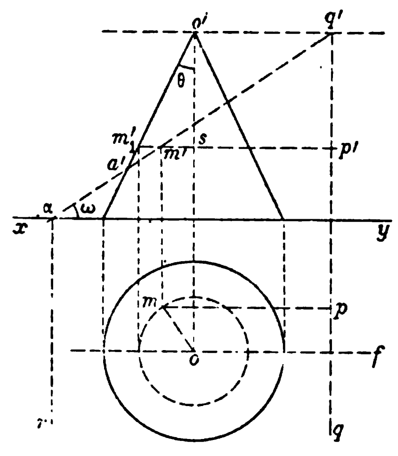
457. **Projection de la section sur un plan perpendiculaire à l'axe.** — Supposons l'axe vertical, et cherchons la projection horizontale de la section. Nous supposerons, pour cela, que le plan sécant soit de bout, et nous étudierons successivement chaque surface.

I. — *La surface est un cylindre.* — La projection horizontale de la section est alors un cercle confondu avec la base du cylindre.

II. — *La surface est un cône.* — Quelle que soit la nature de la section, sa projection horizontale est une conique ayant pour foyer le point de rencontre de l'axe avec le plan horizontal, et la directrice correspondante est la projection horizontale de la droite d'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône.

Soient en effet (o, o') le sommet du cône et $r\alpha q'$ le plan sécant coupant le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône suivant la ligne de bout $(pq, p'q')$. Soit (m, m') un point de la section ; traçons le parallèle de ce point et menons mp perpendiculaire à pq.

puis cherchons à exprimer le rapport $\frac{mo}{mp}$. Pour cela, appelons ω l'angle de $\alpha q'$ avec xy et θ le demi-angle au sommet du cône. On a



évidemment $om = sm'_1 = o'm'_1 \sin\theta$; d'autre part, on a

$$mp = m'p' = m'q' \cos\omega \,;$$

il en résulte

$$\frac{mo}{mp} = \frac{o'm'_1 \sin\theta}{m'q' \cos\omega}.$$

Mais les deux droites parallèles m'_1m' et $o'q'$ donnent

$$\frac{o'm'_1}{m'q'} = \frac{o'a'}{q'a'}\,;$$

donc

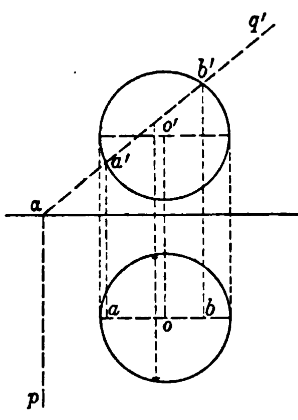
$$\frac{mo}{mp} = \frac{o'a'}{q'a'} \times \frac{\sin\theta}{\cos\omega},$$

ce qui montre que le rapport $\frac{mo}{mp}$ est constant. Ainsi le point o est bien un foyer de la projection horizontale, et la directrice correspondante est pq, de sorte que l'axe focal est la perpendiculaire of menée du point o sur la trace horizontale du plan sécant.

On peut encore démontrer cette propriété de la manière suivante :

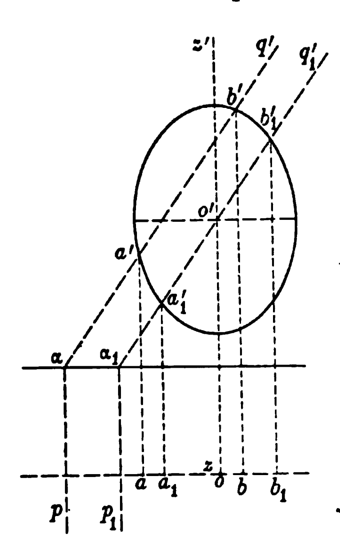
Supposons d'abord que la surface, au lieu d'être un cône, soit un hyperboloïde de révolution à une nappe et à axe vertical. Coupons la surface par un plan et appelons Δ l'intersection de ce plan avec celui du cercle de gorge. En vertu des propriétés des contours apparents démontrées au n° 297, la projection horizontale de la section est doublement tangente à la projection horizontale du cercle de gorge, et la

corde de contact est la projection horizontale de Δ. Cette propriété subsiste évidemment quel que soit le rayon du cercle de gorge. Supposons alors que ce rayon tende vers zéro : l'hyperboloïde devenant un cône, on en conclut que toute section plane d'un cône de révolution à axe vertical est projetée horizontalement suivant une conique doublement tangente à un cercle de rayon nul, projection du sommet du cône. La corde de contact est la projection horizontale de l'intersection du plan sécant avec le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône.



III. — *La surface est une sphère.* — Soient (o, o') le centre de la sphère et $p\alpha q'$ le plan sécant. La section est un cercle projeté horizontalement suivant une ellipse dont le petit axe perpendiculaire à αp est égal à ab, et dont le grand axe parallèle à αp est égal à $a'b'$ (434).

IV. — *La surface est un ellipsoïde.* — Supposons d'abord que la surface soit un ellipsoïde allongé. Figurons la méridienne principale de cet ellipsoïde, et soient $(oz, o'z')$ l'axe et $p\alpha q'$ le plan sécant. La projection horizontale de la section est une ellipse dont l'un des axes est perpendiculaire à la trace horizontale du plan, tandis que l'autre est parallèle à cette même trace. Si d'ailleurs a' et b' sont les points de rencontre de $\alpha q'$ avec la projection verticale de la méridienne principale, l'axe perpendiculaire à αp est égal à ab, et en outre, a et b sont les sommets situés sur cet axe.



Il est aisé de voir que l'axe parallèle à αp est inférieur à $a'b'$. En effet, la section par le plan $p\alpha q'$ est homothétique à la section par le plan $p_1\alpha_1q'_1$ mené par le centre de l'ellipsoïde parallèlement à $p\alpha q'$. Les projections

horizontales des deux sections sont donc aussi homothétiques. Or, les axes de la section par le plan $p_1\alpha_1q'_1$ sont $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ et le diamètre de l'ellipsoïde perpendiculaire à $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ dans le plan $p_1\alpha_1q'_1$. Ce diamètre est de bout et a même longueur que le petit axe de la méridienne; donc il est plus petit que $a'_1b'_1$. Mais la projection horizontale de ce diamètre est l'axe parallèle à αp dans la projection horizontale de la section par le plan $p_1\alpha_1q'_1$; de plus il est évidemment le grand axe de cette projection, puisqu'il est le diamètre du cercle de contour apparent sur le plan horizontal ; donc l'axe parallèle à αp dans la projection horizontale de la section par le plan $p_1\alpha_1q'_1$ est le grand axe de cette projection et est inférieur à $a'_1b'_1$. Il en résulte, par raison d'homothétie, que l'axe parallèle à αp dans la projection horizontale de la section par le plan $p\alpha q'$ est le grand axe de cette projection et est inférieur à $a'b'$.

Si l'on suppose maintenant que l'ellipsoïde soit aplati, et si l'on appelle encore $a'b'$ la corde déterminée par la méridienne principale sur la trace verticale du plan sécant, *supposé de bout*, on voit par le même raisonnement que l'axe parallèle à αp dans la projection horizontale de la section est le grand axe de cette projection et est supérieur à $a'b'$.

En rapprochant ces résultats de celui qui est relatif à la sphère, on voit que le grand axe de la projection horizontale de la section est parallèle à αp et que, de plus :

Il est égal à $a'b'$ dans le cas de la sphère ;

Il est inférieur à $a'b'$ dans le cas de l'ellipsoïde allongé ;

Il est supérieur à $a'b'$ dans le cas de l'ellipsoïde aplati. Ajoutons, pour généraliser, que $a'b'$ est la corde déterminée par le plan sécant dans la méridienne dont le plan est perpendiculaire au plan sécant, et rappelons que le plan horizontal est un plan quelconque perpendiculaire à l'axe.

V. — *La surface est un hyperboloïde.* — Nous nous occuperons simultanément de l'hyperboloïde à une nappe et de l'hyperboloïde à deux nappes, et nous distinguerons trois cas suivant que la section est du genre ellipse, du genre hyperbole ou du genre parabole.

1er Cas. — Considérons deux hyperboloïdes conjugués de révolution autour d'un axe vertical, qui est transverse pour l'hyperboloïde à deux nappes et non transverse pour l'hyperboloïde à une nappe. Soient H_2 et H_1 les hyperboles méridiennes respectives de ces deux surfaces et $a'b'$ la trace verticale du plan sécant, que nous supposons toujours de

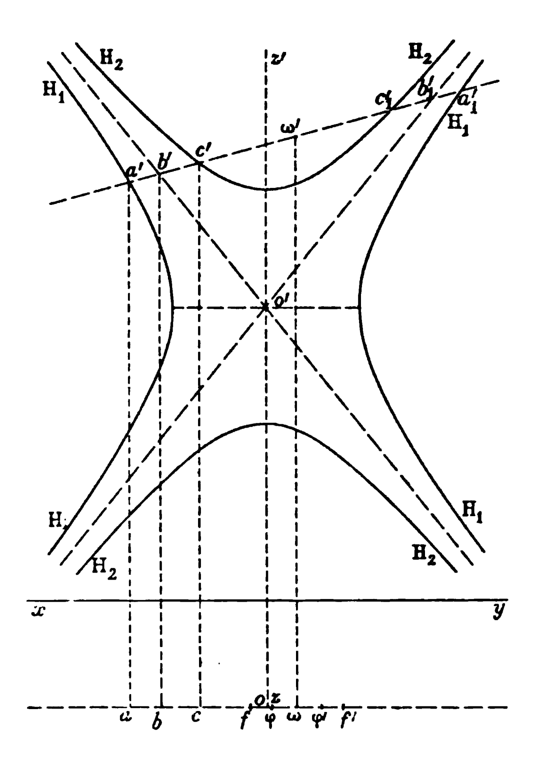
bout. On sait que ce plan coupe les deux hyperboloïdes et leur cône asymptote suivant des coniques homothétiques et concentriques. Supposons que ces coniques soient des ellipses proprement dites, et appelons :

a' et a'_1 les points de rencontre de la trace verticale du plan sécant avec H_1 ;

b' et b'_1 les points de rencontre avec les asymptotes de H_1 et de H_2 ;

c' et c'_1 les points de rencontre avec H_2.

Les trois sections étant homothétiques et concentriques, leurs pro-



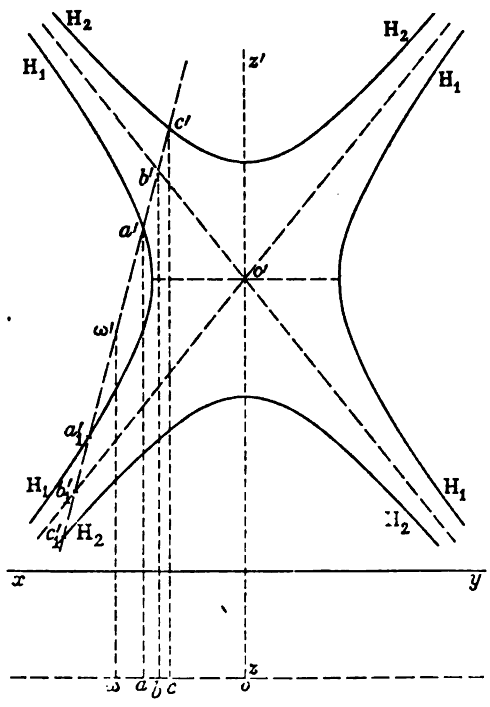
jections horizontales sont aussi homothétiques et concentriques. Or, si l'on appelle ω' le milieu de $b'b'_1$, la projection horizontale de la section dans le cône asymptote a pour centre le point ω et pour foyer le point o (457, II), de sorte que $o\omega$ est l'axe focal des trois projections, dont trois sommets respectifs sont a, b et c. D'autre part, soient f et φ les foyers respectifs homologues à o dans les projections horizon-

tales des sections de l'hyperboloïde à une nappe engendré par H_1 et de l'hyperboloïde à deux nappes engendré par H_2. Le point ω étant le centre d'homothétie des projections horizontales, on a

$$\frac{\omega o}{\omega b} = \frac{\omega f}{\omega a} = \frac{\omega \varphi}{\omega c}.$$

La comparaison des deux premiers rapports montre que ωa étant supérieur à ωb, on a $\omega f > \omega o$; la comparaison du premier et du troisième rapport montre de même que l'on a $\omega\varphi < \omega o$. Si donc on appelle f et f' les foyers de la projection horizontale de la section faite dans l'hyperboloïde à une nappe, φ et φ' les points analogues relatifs à l'hyperboloïde à deux nappes, on voit que *le point o est compris entre f et f', tandis qu'il est extérieur au segment* $\varphi\varphi'$.

2e Cas. — Supposons maintenant que les trois sections soient des



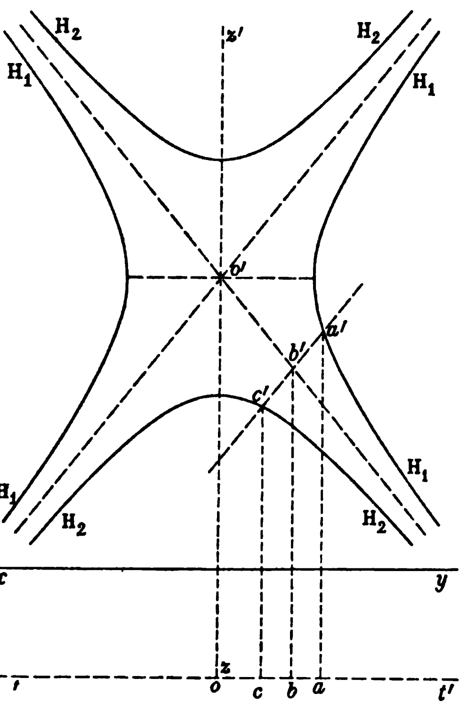
hyperboles, et conservons les mêmes notations que dans le premier cas. En raisonnant encore comme dans ce cas, on a les égalités

$$\frac{\omega o}{\omega b} = \frac{\omega f}{\omega a} = \frac{\omega \varphi}{\omega c}.$$

L'égalité du premier et du deuxième rapport montre alors que ωf est inférieur à ωo, tandis que l'égalité du premier et du troisième rapport montre que $\omega\varphi$ est supérieur à ωo. *Il en résulte que le point o est compris entre les points φ et φ' et qu'il est extérieur au segment ff'.*

La figure suppose que la trace verticale du plan sécant coupe les deux hyperboles méridiennes. Elle coupe d'ailleurs toujours l'hyperbole H_2, mais elle peut être tangente à l'hyperbole H_1, et elle peut même ne pas couper du tout cette hyperbole. Si elle est tangente à l'hyperbole H_1, la section dans l'hyperboloïde à une nappe est un système de deux droites, et le point o est toujours situé entre les points φ et φ'.

Si elle ne coupe pas l'hyperbole H_1, la section dans l'hyperboloïde à une nappe, projetée sur le plan horizontal, admet ωo comme axe non transverse. Pour l'hyperboloïde à deux nappes, les résultats ne changent pas.



3ᵉ Cas. — Supposons enfin que les trois sections soient paraboliques et conservons encore les mêmes notations.

La trace verticale $a'b'c'$ du plan sécant est maintenant parallèle à une asymptote des hyperboles H_1 et H_2. Les projections horizontales des sections dans les deux hyperboloïdes sont deux paraboles égales ayant pour sommets respectifs a et c. Les axes de ces deux paraboles sont encore dirigés suivant la ligne tt', et sont de même sens.

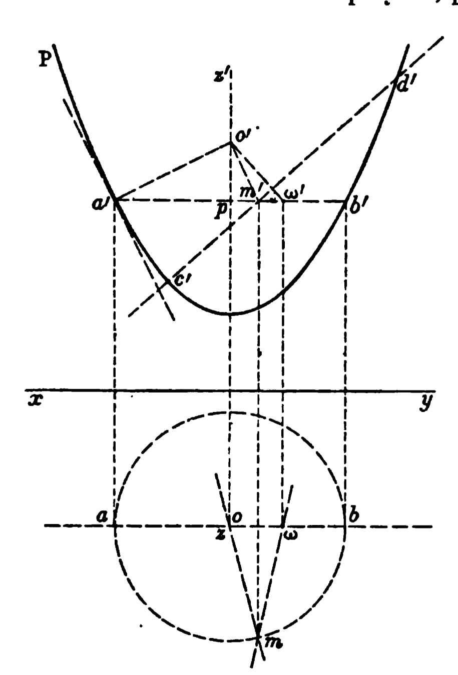
Si l'on appelle f le foyer de la projection horizontale, et a le sommet de cette projection, les points o, a et f se présentent dans l'ordre

afo pour l'hyperboloïde à une nappe et dans l'ordre *fao* ou *foa* pour l'hyperboloïde à deux nappes.

Ces divers résultats s'obtiennent en considérant une section parabolique comme la limite d'une section elliptique ou hyperbolique dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe, et de même dans le cas de l'hyperboloïde à deux nappes.

VI. — *La surface est un paraboloïde.* — Dans ce cas, si l'on suppose toujours que le plan sécant ne soit pas parallèle à l'axe, la section est une ellipse dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle.

Soient en effet $(oz, o'z')$ l'axe de la surface, P la parabole méridienne et $c'd'$ la trace verticale du plan sécant supposé encore de bout. Construisons un point quelconque de la section au moyen du parallèle $(ab, a'b')$, et cherchons la tangente en m à la projection horizontale de la section. Employons, pour cela, la méthode du plan des deux normales. En menant la normale à la méridienne P au point (a, a'), on voit que la normale à la surface au point (m, m') est projetée en om et en $o'm'$. D'autre part, si l'on mène la normale au plan sécant par le point (o, o'), on voit que la tangente à la section au point (m, m') est perpendiculaire au plan des deux droites $(om, o'm')$ et $(o\omega, o'\omega')$. Une horizontale de ce plan étant $(m\omega, m'\omega')$, la tangente en m à la projection horizontale de la section est la perpendiculaire à $m\omega$ menée par le point m.



Autrement dit, la droite $m\omega$ est la normale en m à la projection horizontale de la section. Mais on a $o\omega = p\omega'$, et, quand le point (m, m') décrit la section, $p\omega'$ demeure constante en longueur; car,

paramètre de la parabole P, en vertu de la propriété de la sous-normale ; en outre, l'angle $po'\omega'$ est invariable, parce que les directions de ses côtés sont invariables. Il en résulte que le triangle rectangle $po'\omega'$ est de grandeur invariable et, par conséquent, que la longueur $p\omega'$ est constante ; mais alors la longueur $o\omega$, qui est égale à $p\omega'$, est aussi constante et le point ω est un point fixe.

Donc la normale en m à la projection horizontale de la section passe par un point fixe ω ; donc, enfin, la projection horizontale de la section est une circonférence de centre ω.

Le point ω est d'ailleurs distinct du point o tant que le plan sécant n'est pas perpendiculaire à l'axe.

458. **Points de rencontre d'une droite et d'un paraboloïde de révolution.** — La propriété qu'on vient d'établir pour les sections planes d'un paraboloïde de révolution peut être utilisée dans la détermination des points de rencontre de cette surface avec une droite. Il suffit de couper la surface par un plan passant par la droite et de projeter la section et la droite sur un plan perpendiculaire à l'axe. Par exemple, si l'axe est vertical, on coupe par le plan qui projette verticalement la droite, et on détermine les points de rencontre de la projection horizontale de la droite avec le cercle projection horizontale de la section. On obtient ainsi les projections horizontales des points cherchés, et on en déduit les projections verticales par des lignes de rappel.

On a vu d'ailleurs (453) que la méthode employée convient à toutes les surfaces, mais les constructions ne sont réellement simples que dans le cas du paraboloïde de révolution.

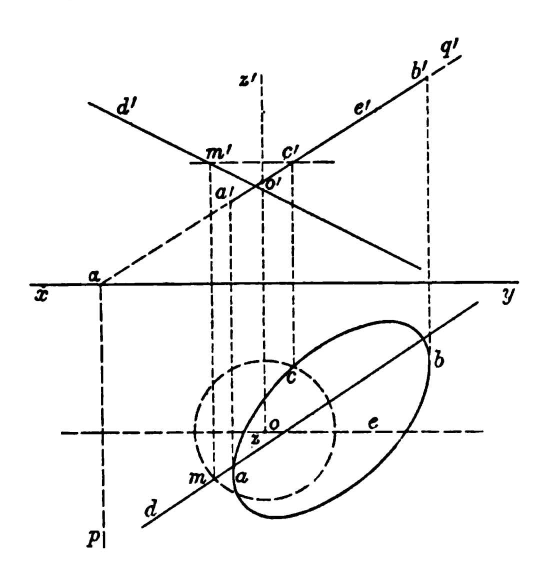
§ III. — *Surface engendrée par une conique en tournant autour d'un axe.*

459. **Théorème.** — *La surface engendrée par une conique en tournant autour d'un axe est en général du quatrième ordre ; elle est du second ordre quand la projection de l'axe de révolution sur le plan de la courbe est un axe de symétrie de cette courbe.*

Supposons en effet l'axe de révolution vertical et le plan de la conique perpendiculaire au plan vertical. Soient (oz, $o'z'$) l'axe de révolution, (ab, $a'b'$) la conique et $p\alpha q'$ son plan. Le plan mené par l'axe

perpendiculairement à pxq' coupe ce dernier plan suivant une droite de front $(oe, o'e')$, qui n'est pas, par hypothèse, un axe de la conique $(ab, a'b')$; de sorte que oe n'est pas un axe de la projection horizontale ab de cette conique.

Cela posé, pour trouver le degré de la surface S engendrée par la révolution de $(ab, a'b')$ autour de $(oz, o'z')$, cherchons le nombre des



points de rencontre de cette surface avec une droite quelconque (d, d'). A cet effet, faisons tourner (d, d') autour de l'axe ; elle engendre alors un hyperboloïde de révolution autour de $(oz, o'z')$, et ses points de rencontre avec la surface S décrivent des parallèles communs à cette surface et à l'hyperboloïde. Nous pouvons obtenir facilement ces parallèles communs. Pour cela, coupons la surface S et l'hyperboloïde par le plan pxq'. La section dans la surface S est la conique $(ab, a'b')$ et la section dans l'hyperboloïde est une conique dont la projection horizontale γ, qui n'est pas figurée dans l'épure, admet oe comme axe de symétrie (450). Les deux coniques ab et γ ont quatre points communs ; soit c l'un de ces points. Le parallèle décrit par le point (c, c') en tournant autour de $(oz, o'z')$ est un parallèle commun aux deux surfaces. Il rencontre la droite (d, d') en un point (m, m'), qui est un des points de rencontre de la droite (d, d') avec la surface S.

A chaque point de rencontre des deux coniques γ et ab correspond ainsi un point de rencontre de (d, d') et de S. Comme γ et ab se rencontrent en quatre points, il en résulte que la surface S est coupée en quatre points par une droite quelconque; donc la surface S est en général du quatrième degré.

Ces conclusions sont en défaut quand les quatre points de rencontre de ab et de γ sont deux à deux symétriques par rapport à oe; car à deux points symétriques par rapport à oe il correspond un seul parallèle commun aux deux surfaces et, par suite, un seul point de rencontre de (d, d') et de S. Il en résulte que dans ce cas la surface S est du second degré.

Dire, d'ailleurs, que les quatre points communs à ab et à γ sont deux à deux symétriques par rapport à oe, revient à dire que oe, qui est un axe de symétrie de γ, est aussi un axe de symétrie de ab; mais alors $(oe, o'e')$ est un axe de symétrie de la conique donnée. Et comme $(oe, o'e')$ est la projection de $(oz, o'z')$ sur le plan $p\alpha q'$, on voit bien que la surface engendrée est du second degré quand la projection de l'axe de révolution sur le plan de la conique est un axe de symétrie de celle-ci, et dans ce cas seulement.

460. **Corollaire.** — *Pour qu'une conique, qui tourne autour d'un axe, engendre une quadrique, il faut et il suffit que la projection de l'axe de révolution sur le plan de la conique soit un axe de symétrie de cette courbe.*

C'est nécessaire d'après ce qui a été démontré au nº 450, et c'est suffisant d'après ce que l'on vient de voir.

C'est même, si l'on veut, nécessaire et suffisant d'après la fin de la démonstration du théorème précédent.

Il reste alors à déterminer la nature de cette quadrique. Pour cela, nous examinerons plusieurs cas d'après la nature de la conique génératrice et nous utiliserons les résultats obtenus au nº 457.

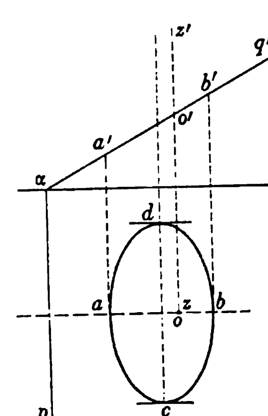
461. **Premier cas.** — *La conique génératrice est du genre ellipse.* — Nous supposons toujours, bien entendu, que la projection de l'axe de révolution sur le plan de la conique génératrice est un axe de symétrie de cette conique, de manière que la surface engendrée soit bien une quadrique.

Cela posé, prenons l'axe de révolution $(oz, o'z')$ vertical, le plan

$p\alpha q'$ de la conique de bout, mais ni parallèle ni perpendiculaire à l'axe, et examinons les divers cas qui peuvent se présenter.

1° Supposons que la projection horizontale de l'ellipse soit un cercle : la surface engendrée est alors une portion de cylindre ou de paraboloïde suivant que le centre du cercle est ou n'est pas au point o. En effet, la projection horizontale de la section de la quadrique par le plan $p\alpha q'$ n'est un cercle que dans ces deux cas, qui s'excluent d'ailleurs l'un l'autre (457).

2° Supposons que la projection horizontale soit une ellipse ayant son grand axe parallèle à αp, et soit $a'b'$ la projection verticale de cette ellipse. Dans ce cas, en vertu de ce qui précède, la surface engendrée ne peut être qu'une portion de sphère, une portion d'ellipsoïde allongé ou une portion d'ellipsoïde aplati.



C'est une portion de sphère si le grand axe cd de la projection horizontale est égal à $a'b'$;

C'est une portion d'ellipsoïde allongé si le grand axe cd est inférieur à $a'b'$;

C'est enfin une portion d'ellipsoïde aplati si le grand axe cd est supérieur à $a'b'$.

3° Supposons enfin que la projection horizontale soit une ellipse ayant son grand axe perpendiculaire à αp, et soient f et f' les foyers de cette ellipse. Alors, en vertu des résultats obtenus plus haut (457), la surface ne peut être qu'une portion de cône ou d'hyperboloïde à une ou à deux nappes. C'est d'ailleurs, en vertu des mêmes résultats :

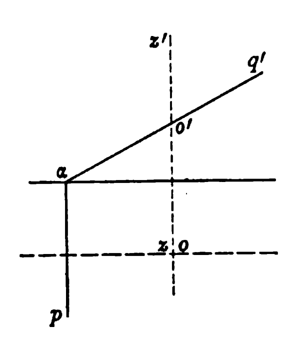
Une portion de cône si l'un des points f ou f' est en o;

Une portion d'hyperboloïde à une nappe si le point o est compris entre f et f';

Une portion d'hyperboloïde à deux nappes si le point o est extérieur au segment ff'.

462. Deuxième cas. — *La conique génératrice est une hyperbole.* —

Dans ce cas la surface engendrée ne peut être qu'un cône ou un hyperboloïde à une ou à deux nappes (457, V, 2e cas). Pour trancher la question, prenons toujours l'axe de révolution (oz, $o'z'$) vertical, le plan $p\alpha q'$ de la conique perpendiculaire au plan vertical, et appelons f et f' les foyers de la projection horizontale. Les résultats obtenus au n° 457 nous montrent alors que :



1° Si l'axe non transverse est perpendiculaire à αp, la surface engendrée est un hyperboloïde à une nappe;

2° Si l'axe transverse est perpendiculaire à αp et si, de plus, l'un des points f ou f' est en o, la surface engendrée est un cône;

3° Enfin si l'axe transverse est perpendiculaire à αp sans que le point o soit foyer, la surface engendrée est un hyperboloïde à une ou à deux nappes suivant que le point o est extérieur au segment ff' ou compris entre les points f et f'.

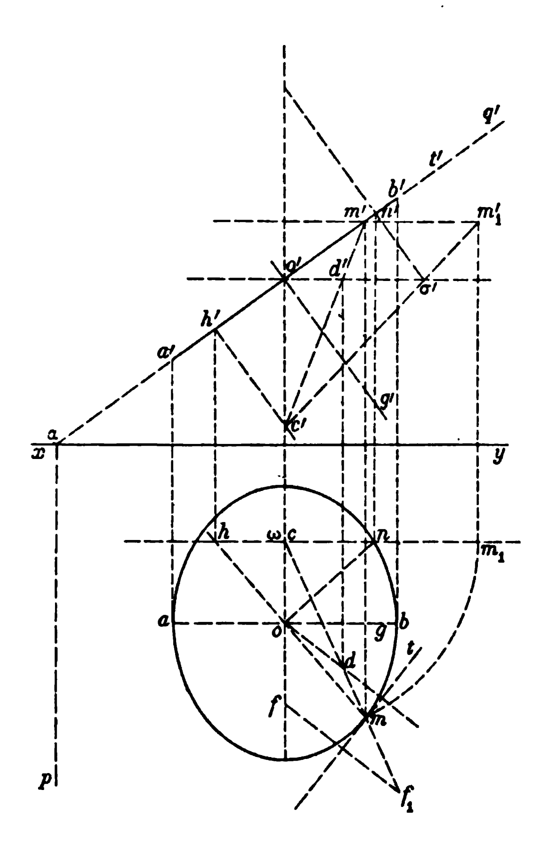
463. **Troisième cas.** — *La conique génératrice est une parabole.* — — Dans ce cas la surface engendrée est encore : ou une portion de cône, ou une portion d'hyperboloïde à une nappe ou une portion d'hyperboloïde à deux nappes (457). C'est d'ailleurs : un cône si le point o est le foyer de la projection horizontale, un hyperboloïde à une nappe si a et f étant le sommet et le foyer de la projection horizontale, les trois points o, a, f se présentent dans l'ordre afo; c'est enfin un hyperboloïde à deux nappes si les trois points o, a, f ne se présentent pas dans l'ordre fao ou foa.

464. **Application.** — *Déterminer la surface engendrée par un cercle situé dans un plan de bout, tournant autour d'un axe vertical, et dont un foyer de la projection horizontale coïncide avec le pied de l'axe sur le plan horizontal.*

Soit $p\alpha q'$ le plan du cercle donné (ab, $a'b'$); on reconnait d'ailleurs que (ab, $a'b'$) représente un cercle en s'assurant que le grand axe de la projection horizontale est parallèle à $p\alpha$ et égal à $a'b'$. Supposons que la projection horizontale ω de l'axe de révolution soit un foyer de l'ellipse ab, et cherchons la nature de la méridienne engen-

drée par (ab, $a'b'$) en tournant autour de la verticale du point ω.

Pour cela, traçons le parallèle d'un point quelconque (m, m') du cercle générateur, et soit (m_1, m'_1) l'un des points de rencontre de ce parallèle avec le plan du méridien principal : (m_1, m'_1) est un point de la méridienne. Cherchons la normale à la méridienne en ce point. Pour



l'obtenir, il suffit de connaitre son point de rencontre avec l'axe. Or ce point est l'intersection de l'axe et du plan normal au cercle générateur au point (m, m') situé sur le même parallèle que le point (m_1, m'_1). D'autre part, ce plan normal est le plan mené par le rayon (om, $o'm'$) perpendiculairement au plan du cercle ; il est donc déterminé par la normale (og, $o'g'$) au plan du cercle et par le rayon (om, $o'm'$). Le plan de front mené par l'axe coupe le plan normal suivant la droite (hc, $h'c'$) parallèle à (og, $o'g'$) ; il en résulte que le point (c, c') est le

sommet du cône des normales relatif au parallèle du point (m, m'); donc la normale à la méridienne au point (m_1, m'_1) est $(cm_1, c'm'_1)$. Soit σ' le point de rencontre de cette normale avec la parallèle à xy menée par o'. Nous allons montrer que le point σ' est un point fixe en prouvant que la longueur $o'\sigma'$ est constante.

Pour cela, menons $(cm, c'm')$, c'est-à-dire la normale à la surface au point (m, m'), et observons que le plan normal en (m, m') au cercle générateur est aussi défini par les deux droites $(om, o'm')$ et $(cm, c'm')$; il est donc coupé suivant la droite $(od, o'd')$ par le plan horizontal $o'\sigma'$; et comme le plan normal est perpendiculaire à la tangente $(mt, m't')$ au cercle générateur, il s'ensuit que od est perpendiculaire à mt, puisque $(od, o'd')$ est une horizontale du plan des deux normales. Or, quand on amène le point (m, m') dans le plan du méridien principal, $c'm'$ vient en $c'm'$ et, par suite, d' vient en σ'; il en résulte que $o'\sigma' = \omega d$. Mais si l'on appelle f_1 le point de rencontre de ωm avec la perpendiculaire à mt menée par le second foyer f de la projection horizontale, on a $\omega d = \frac{\omega f_1}{2}$; d'ailleurs ωf_1 est le grand axe de l'ellipse ab; donc $\omega\sigma'$, qui est égale à ωd, est égale au demi-grand axe de la projection horizontale du cercle générateur.

Il suit bien de là que le point σ' est un point fixe, c'est-à-dire que la méridienne est une ligne dont les normales passent par un point fixe; donc la méridienne est un cercle dont le centre n'est pas sur l'axe, et la surface engendrée est un tore.

On peut voir, en outre, que le plan $p\alpha q'$ est un plan bitangent à ce tore. Comme la méridienne se compose de deux cercles symétriques par rapport à o', il suffit de prouver, pour cela, que $\alpha q'$ est tangente à la circonférence qui a pour centre σ' et pour rayon $\sigma'm'_1$. A cet effet, construisons la normale à la méridienne au point (n, n'). Les constructions sont analogues à celles qui ont été faites pour le point (m_1, m'_1), et la normale cherchée est projetée verticalement suivant la perpendiculaire à $\alpha q'$ menée par n'; mais cette normale passe par σ', donc $\sigma'n'$ est un rayon de la méridienne, et ce rayon est perpendiculaire à $\alpha q'$. Ceci prouve bien que la droite $\alpha q'$ est tangente à la circonférence de centre σ' et de rayon $\sigma'm'_1$ et que, par suite, le plan $p\alpha q'$ est doublement tangent au tore.

On sait, du reste, que tout plan bitangent à un tore coupe cette surface suivant deux cercles.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE IV

1. Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est engendré par une droite. Construire la section faite dans cette surface par un plan passant par le centre et par une droite donnée.

2. Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est engendré par une droite (G, G'). On le coupe par un plan de bout dont la trace verticale est parallèle à G'. Trouver la nature, le sommet et les foyers de la section.

3. Construire la trace sur le plan bissecteur du deuxième dièdre d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est une droite de front.

4. On coupe un ellipsoïde de révolution par un plan P, et l'on suppose que l'on connaisse : 1° un axe, Δ, en grandeur et position de la section ainsi obtenue ; 2° un point de l'ellipsoïde et le plan tangent en ce point : construire l'ellipsoïde.

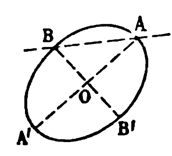
Pour construire l'ellipsoïde, il suffit de connaître la section par le plan P et l'axe de révolution. Il y a d'ailleurs deux cas à examiner suivant que l'axe connu de la section par le plan P est ou n'est pas la projection de l'axe de révolution sur le plan P. Prenons, par exemple, le premier cas, et soit Q le plan tangent donné, dont le point de contact, également donné, est A. Le plan R mené par Δ perpendiculairement au plan P est un lieu de l'axe de révolution. La normale en A au plan Q rencontre R en un point O qui est sur l'axe de révolution. La sphère décrite du point O comme centre avec OA comme rayon est inscrite dans l'ellipsoïde suivant le parallèle du point A ; elle coupe le plan P suivant un cercle ayant son centre sur Δ et doublement tangent à la section de l'ellipsoïde par le plan P, en deux points B et C, d'ailleurs inconnus ; mais la section par le plan P est alors déterminée, ce qui fait connaître les points B et C. On en conclut que le parallèle du point M est l'intersection de la sphère OA par le plan ABC ; donc l'axe de révolution est la perpendiculaire menée du point O sur le plan ABC.

Ces indications suffisent pour résoudre complètement le problème dans les deux cas signalés.

5. Une ellipse située dans un plan de front tourne autour d'une droite (*ab*, *a'b'*) de ce plan. Construire la section faite dans la surface engendrée, par un plan dont on donne les traces.

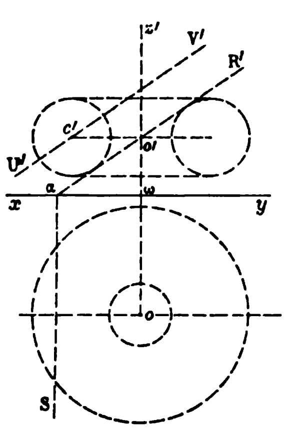
6. Un cercle situé dans le plan vertical tourne autour de la ligne de terre. Section du tore ainsi engendré par un plan parallèle à la ligne de terre.

7. L'axe d'un ellipsoïde de révolution est une droite du plan vertical non perpendiculaire à la ligne de terre. Couper cet ellipsoïde par un plan de bout tel que la projection horizontale de la section soit un cercle.



8. On donne les axes AA' et BB' d'une ellipse située dans le plan horizontal. Cette ellipse est la méridienne d'un ellipsoïde de révolution autour du grand axe AA'. Construire la section faite dans cette surface par un plan passant par AB et coupant la verticale du point O à une hauteur égale à OA.

9. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté de la feuille.



On donne :

1° Un axe vertical $(o, \omega z')$ ainsi défini : $x\omega = y\omega$, $\omega o = 12^{cm}$;

2° Une circonférence située dans le plan de front passant par l'axe. Le rayon de cette circonférence est de 4^{cm}, la projection verticale de son centre est à 6^{cm} au-dessus du plan horizontal et à 7^{cm} à gauche de $\omega z'$.

Cette circonférence en tournant autour de l'axe engendre un tore.

On demande de représenter la partie du tore (supposé plein) comprise entre le plan bitangent R'αS et le plan parallèle dont la trace verticale U'V' passe par le point c'. Ces deux plans sont perpendiculaires au plan vertical. (R. Malloizel.)

10. On donne deux droites D et Δ qui ne se coupent pas, et l'on fait tourner D autour de Δ. Trouver la section faite par un plan de bout dans la surface ainsi engendrée.

11. On donne un axe vertical o, $x = 0$, $y = 10^{cm}$, et une parabole dont la projection horizontale P a pour sommet $x = -5^{cm}$, $y = 12^{cm}$ et pour foyer $x = -4$, $y = 12$.

La projection verticale P' de cette parabole est une droite passant par le point $x = -5$, $z = 0$ et par le point $x = 0$, $z = 5$.

1° Déterminer la méridienne principale de la surface de révolution engendrée par la parabole (P, P') en tournant autour de la verticale o.

2° Construire la section de cette surface par le plan de front F,

$$y = (10 + 4\sqrt{2}) \text{ centimètres.}$$

3° Etablir la ponctuation de la même surface, en ne conservant que la région derrière le plan de front F et au-dessous du plan horizontal $z = 10^{cm}$.

4° On établira en même temps la ponctuation de la parabole (P, P′) sur cette région de surface.

(*École normale, concours de 1893.*)

LIVRE IV

LES INTERSECTIONS DE SURFACES

CHAPITRE PREMIER

INTERSECTION DE DEUX SURFACES CONIQUES OU CYLINDRIQUES

§ I. — *Intersection de deux cônes de même sommet, ou de deux cylindres dont les génératrices sont parallèles.*

465. **Intersection de deux cônes de même sommet.** — Lorsque deux cônes ont le même sommet, leur intersection se compose d'un système de génératrices. Appelons en effet S le sommet commun, et soit M un point de l'intersection des deux surfaces. La droite SM étant située sur les deux surfaces à la fois, fait partie de leur intersection. Tout point de l'intersection étant ainsi situé sur une génératrice commune aux deux surfaces, cette intersection est nécessairement un système de génératrices ; de sorte qu'il suffit d'avoir un point de chaque génératrice pour connaître toute l'intersection.

Pour avoir un point d'une génératrice commune, on coupe les deux cônes par une surface *auxiliaire* dont l'intersection avec chacun des cônes soit facile à obtenir. Soient σ et σ_1 les intersections respectives ainsi obtenues : tout point commun à σ et à σ_1 appartient à l'intersection des deux cônes et détermine une génératrice commune.

Comme l'on sait déterminer une section plane d'un cône, on peut toujours prendre comme surface auxiliaire un plan ne passant pas par le sommet commun. Si, en particulier, les deux cônes ont leurs bases

dans le même plan, pour avoir les génératrices communes, il suffit de joindre au sommet commun les points de rencontre des deux bases, ce qui revient à prendre le plan des deux bases comme surface auxiliaire.

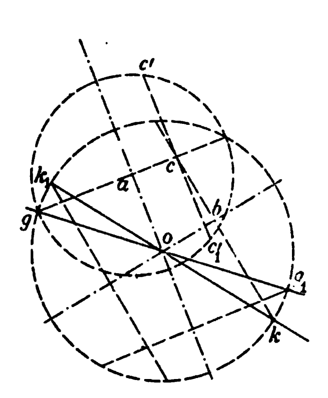
On peut aussi, dans certains cas, couper les deux cônes par une sphère ayant pour centre le sommet commun, parce que l'on sait construire les points de rencontre des génératrices d'un cône et d'une sphère et par suite l'intersection d'une sphère et d'un cône.

Le problème suivant nous en fournit un exemple.

466. **Problème.** — *Trouver les génératrices communes à deux cônes de révolution de même sommet.*

On peut supposer que le plan des axes des deux cônes soit le plan horizontal de projection; du reste, on peut toujours se ramener à ce cas par un rabattement.

Soient donc *oa* et *ob* les axes des deux cônes, que nous supposerons en outre déterminés par leurs demi-angles au sommet. Le plan horizontal coupe le premier cône suivant deux génératrices faisant avec *oa* un angle égal au demi-angle au sommet de ce cône : soit *og* l'une d'elles. Soit de même *ok* l'une des génératrices déterminées par le plan horizontal dans le second cône. Du point *o* comme centre, décrivons une sphère S de rayon arbitraire, et soient g, g_1, k, k_1 les points de rencontre avec les droites respectives *og* et *ok*. La sphère S coupe le premier cône suivant deux cercles situés dans les plans menés par g et par g_1 perpendiculairement à *oa*. Si a est le pied de la perpendiculaire à *oa* menée par le point g, l'un de ces cercles a pour centre le point a et pour rayon *ag*. En menant de même *kb* perpendiculaire à *ob*, on voit que la sphère S coupe le second cône suivant deux cercles, dont l'un, situé dans le plan vertical *kb*, a pour centre le point b et pour rayon *bk*.



On obtient des génératrices communes aux deux cônes en joignant le point o aux points communs à ces deux cercles.

Ces points sont projetés horizontalement à l'intersection c de *ag*

et de bk. Pour les déterminer, il suffit de prendre ag par exemple comme ligne de terre, ce qui revient à prendre comme plan vertical de projection le plan vertical mené par ag. La projection verticale du cercle déterminé dans le premier cône est alors la circonférence de centre o et de rayon ag. Les projections verticales des points cherchés sont c' et c'_1, à l'intersection de cette circonférence et de la ligne de rappel menée par c. Quant aux génératrices communes correspondantes, ce sont les lignes qui joignent le point o aux points (c, c') et (c, c'_1).

En associant de toutes les manières possibles un des cercles déterminés dans le premier cône avec un des cercles déterminés dans le deuxième, on obtient toutes les génératrices communes. On constate sans difficulté qu'il y en a au plus quatre, deux à deux symétriques par rapport au plan des axes.

467. Intersection de deux cylindres dont les génératrices sont parallèles. — L'intersection de deux cylindres dont les génératrices sont parallèles est un système de génératrices. On s'en assure comme pour deux cônes de même sommet, en observant que deux cylindres dont les génératrices sont parallèles peuvent être considérés comme deux cônes ayant le même sommet à l'infini.

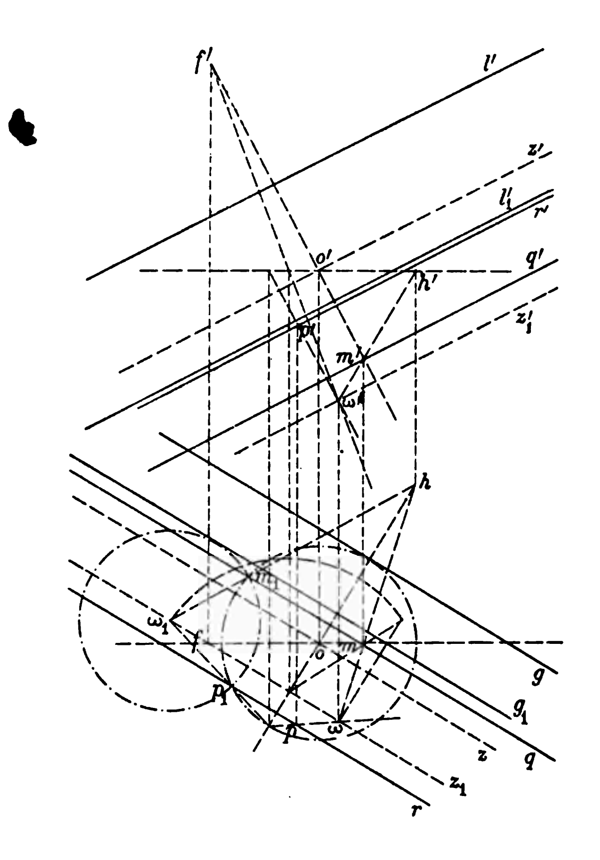
On détermine d'ailleurs des points de l'intersection des deux surfaces, et par suite leurs génératrices communes, en les coupant encore par une surface auxiliaire qui est en général un plan quelconque non parallèle aux génératrices ou un plan perpendiculaire aux génératrices, comme dans le problème suivant :

468. Problème. — *Trouver les génératrices communes à deux cylindres de révolution dont les axes sont parallèles.*

On coupe les deux cylindres par un plan quelconque perpendiculaire aux axes. Les sections obtenues sont deux cercles ayant deux points communs, si les deux cylindres ont des génératrices communes. On obtient ces génératrices en menant les parallèles aux axes par les points communs à ces deux cercles.

Dans l'épure ci-après, le premier cylindre est défini par son axe (z, z'), par son demi-contour apparent g sur le plan horizontal et par son demi-contour apparent l' sur le plan vertical. Pareillement, le second cylindre est défini par son axe (z_1, z'_1), par son demi-contour

apparent g_1 sur le plan horizontal et par son demi-contour apparent l'_1 sur le plan vertical. On a coupé les deux cylindres par le plan de section droite passant par le point (o, o'); ce plan, qui coupe (z_1, z'_1) au point (ω, ω'), a été rabattu sur le plan horizontal mené par l'horizontale $(oh, o'h')$, de sorte que les deux sections droites sont rabattues : la



première suivant une circonférence de rayon égal à celui du premier cylindre et décrite du point o comme centre; la deuxième suivant une circonférence de rayon égal à celui du second cylindre et décrite du point ω_1, rabattement du point ω, comme centre. Ces deux circonférences se coupent en deux points m_1 et p_1, qui sont relevés respectivement en (m, m') et en (p, p'). Les deux cylindres ont donc deux génératrices communes qu'on obtient en menant les parallèles aux

axes par les points (m, m') et (p, p'); elles sont représentées en $(mq, m'q')$ et en $(pr, p'r')$.

§ II. — *Intersection de deux cônes ou de deux cylindres quelconques.*

469. Détermination d'un point courant de l'intersection. — La méthode générale pour construire l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques consiste à déterminer les points de rencontre d'une surface avec les génératrices de l'autre. Si, d'ailleurs, on appelle S et S_1 les deux surfaces, pour déterminer les points de rencontre d'une génératrice de la surface S, par exemple, avec la surface S_1, on coupe la surface S_1 par un plan auxiliaire passant par cette génératrice (388 et 389). Les divers plans auxiliaires que l'on emploie ainsi pour obtenir les divers points de l'intersection, passent donc par une droite fixe ou sont parallèles à un plan fixe. Si les deux surfaces sont des cônes, ils passent par la ligne des sommets; si l'une des surfaces est un cône et l'autre un cylindre, ils passent par la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône; enfin, si les deux surfaces sont des cylindres, ils sont parallèles aux génératrices des deux cylindres et, par suite, au plan déterminé par les parallèles à ces génératrices menées par un point quelconque de l'espace.

470. Tangente en un point de l'intersection. — La tangente en un point courant de l'intersection est située dans les plans tangents aux deux surfaces en ce point. On l'obtiendra donc en déterminant l'intersection de ces deux plans tangents. On a déjà un point de cette intersection, le point en lequel on veut mener la tangente; il suffit donc, pour déterminer celle-ci, d'en connaître un autre point. Il y a avantage, pour cela, à se servir d'un plan auxiliaire donnant d'autres points de l'intersection des deux surfaces.

Cette construction de la tangente n'est en défaut que si les deux surfaces ont le même plan tangent au point considéré. Nous nous occuperons plus loin (482) de l'examen de ce cas.

471. Génératrices limites. —On appelle *génératrices limites* les génératrices de chaque surface qui sont tangentes à l'autre. La détermination de ces génératrices résulte de leur définition :

Si les deux surfaces sont des cônes, on les obtient en coupant chaque cône par les plans tangents à l'autre menés par le sommet du premier ; si l'une des surfaces est un cône et l'autre un cylindre, on coupe le cône par les plans tangents au cylindre menés par son sommet, et le cylindre par les plans tangents au cône parallèles aux génératrices du cylindre ; enfin, si les deux surfaces sont des cylindres, on coupe chaque cylindre par les plans tangents parallèles à l'autre. Tous ces cas rentrent d'ailleurs dans un seul si l'on considère un cylindre comme la limite d'un cône dont le sommet s'est éloigné indéfiniment dans la direction des génératrices.

Lorsqu'un point M de l'intersection se trouve sur une génératrice limite, la tangente à l'intersection, en ce point, est confondue avec la génératrice limite. Supposons en effet que le point M soit sur une génératrice limite, G, appartenant à la surface S. La génératrice G est évidemment contenue dans le plan tangent en M à la surface S ; elle est aussi contenue dans le plan tangent en M à la surface S_1, puisqu'elle est une génératrice limite : elle est donc la tangente en M à l'intersection des deux surfaces.

Il y a exception quand le plan tangent en M à la surface S_1 est aussi tangent à la surface S au même point. Mais ce cas a été réservé plus haut (470), et nous y reviendrons bientôt (482).

472. **Plans limites ; pénétration et arrachement.** — Les plans auxiliaires qui fournissent les points situés sur les génératrices limites, et qui, par suite, sont tangents soit à l'une soit à l'autre surface, s'appellent des plans limites. Quand les deux surfaces sont du second degré *et se coupent*, il y a deux plans limites. Si ces deux plans sont tangents à la même surface, on dit qu'il y a *pénétration* de l'une des surfaces par l'autre ; si, par exemple, les deux plans sont tangents à la surface S_1, il y a pénétration de la surface S par la surface S_1. Dans ce cas l'intersection se compose de deux parties distinctes, une courbe d'entrée et une courbe de sortie : nous verrons en effet que toutes les génératrices de S_1 rencontrent en deux points distincts la surface S.

Si, au contraire, les deux plans limites sont l'un tangent à la première surface et l'autre tangent à la deuxième, on dit qu'il y a *arrachement* ou *entaille*.

473. **Points sur les contours apparents.** — On les obtient par la

méthode ordinaire, en déterminant les points de rencontre de chaque surface avec les génératrices de contour apparent de l'autre surface.

474. **Construction de l'intersection.** — Quand on veut exécuter une épure relative à l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques, on détermine, dans l'ordre indiqué ci-après : 1° les points situés sur les génératrices limites ; 2° les points sur les contours apparents ; 3° les points à l'infini et les asymptotes ; 4° un point quelconque et la tangente en ce point. Nous nous occuperons plus loin de la détermination des points à l'infini et des asymptotes.

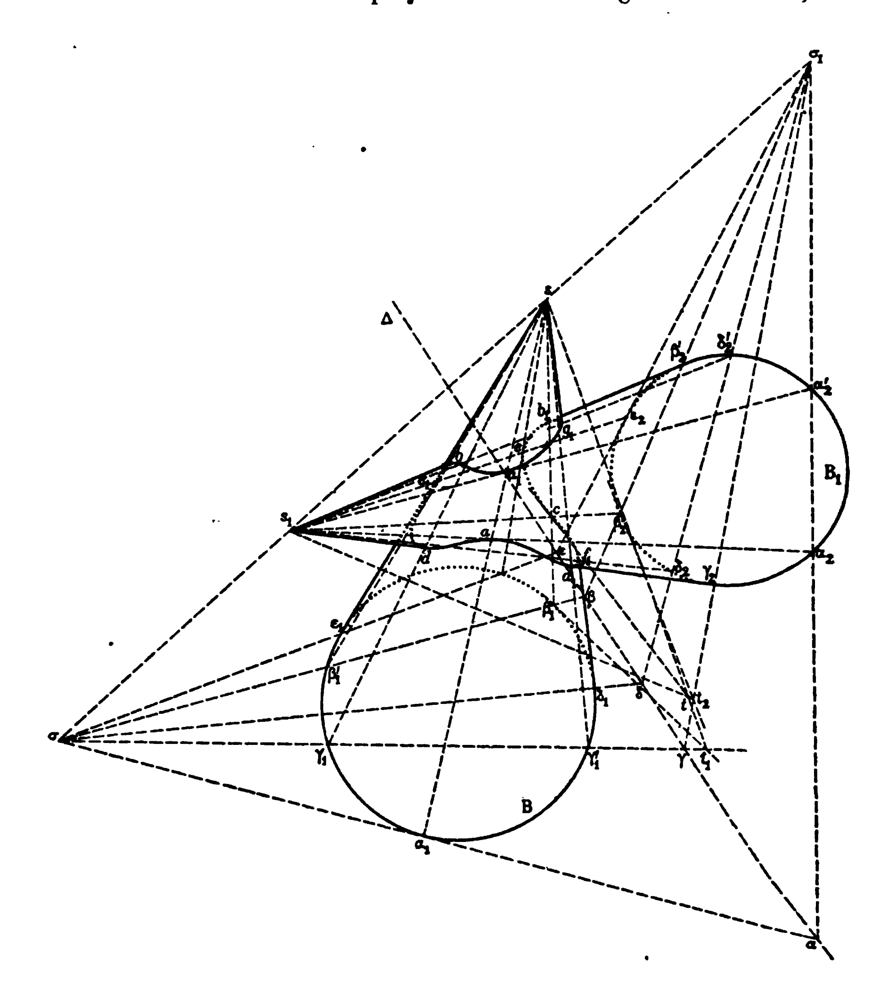
Supposons que tous ces points aient été déterminés, et voyons comment on pourra construire l'intersection. Pour cela, imaginons qu'un point M se déplace sur la directrice de l'une des surfaces, et la décrive une fois dans un sens déterminé ; puis, pour chaque position du point M, prenons les points de rencontre de la génératrice correspondante, sur la première surface, avec la deuxième surface. En suivant alors les déplacements simultanés du point M et des points de rencontre ainsi obtenus, on arrive au tracé de la courbe d'intersection.

Ajoutons que l'on peut, habituellement, tracer l'une des projections de l'intersection en faisant abstraction de l'autre, qui s'en déduit facilement par des lignes de rappel.

475. **Cas où les directrices des deux surfaces sont des courbes planes.** — Toutes les constructions indiquées plus haut s'exécutent facilement quand les directrices sont des courbes planes dont on donne les plans et les projections. Supposons, pour fixer les idées, que les surfaces soient des cônes, et proposons-nous de construire la projection horizontale de l'intersection.

Pour cela, appelons s et s_1 les projections horizontales des sommets, B et B_1 les projections horizontales des bases et Δ la projection horizontale de l'intersection des plans des bases. La ligne des sommets coupe les plans des bases en des points dont les projections horizontales respectives, supposées déterminées, sont σ et σ_1. Il en résulte que les divers plans auxiliaires employés pour déterminer les points successifs de l'intersection coupent la base du premier cône suivant des droites dont les projections horizontales passent par σ, et la base du deuxième cône suivant des droites dont les projections horizontales passent par σ_1.

Détermination des points de l'intersection. — Convenons de désigner l'un quelconque de ces plans auxiliaires par les projections horizontales de deux droites qui le définissent, et considérons un plan auxiliaire quelconque, $s\sigma\alpha$ par exemple. Il coupe le plan de base du premier cône suivant la droite projetée en $\sigma\alpha$ et tangente à la base; il



est donc tangent au premier cône suivant la génératrice projetée en $s\alpha_1$. La droite $\sigma\alpha$ coupe Δ au point α; donc le plan auxiliaire considéré coupe le plan de base du deuxième cône suivant la droite projetée en $\alpha\sigma_1$. Cette droite rencontre B_1 aux points α_2 et α'_2; donc le plan

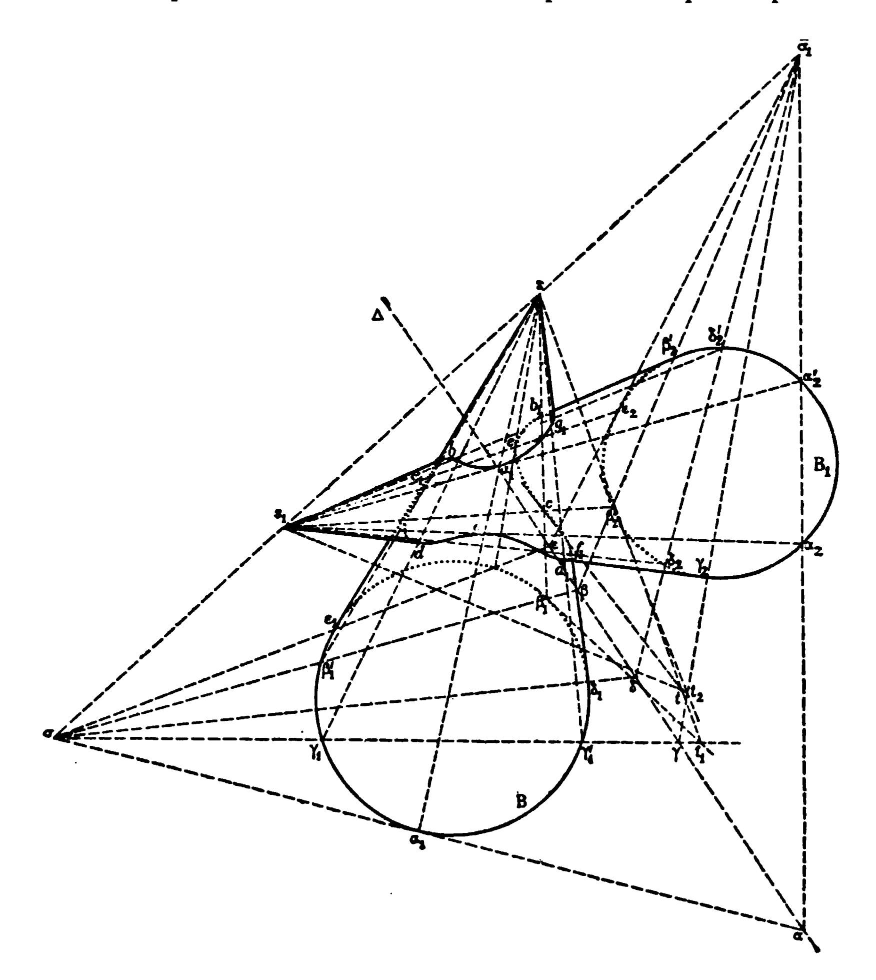
auxiliaire $s\sigma\alpha$ coupe le deuxième cône suivant deux génératrices projetées en $s_1\alpha_2$ et en $s_1\alpha'_2$. Ces deux génératrices rencontrent $s\alpha_1$ aux points a et a_1, qui sont les projections horizontales de deux points de l'intersection. D'ailleurs, le plan $s\sigma\alpha$ est un plan mené par s_1 et tangent au cône s ; donc, les génératrices projetées en $s\alpha_2$ et en $s\alpha'_2$ sont deux génératrices limites du cône s_1 (471 et 472), et ces projections elles-mêmes sont tangentes en a et en a_1 à la projection horizontale de l'intersection.

En répétant le même raisonnement avec les plans auxiliaires $s\sigma\beta$, $s\sigma\gamma$, $s\sigma\delta$, $s\sigma\varepsilon$, on détermine ainsi successivement tous les points remarquables de la projection horizontale de l'intersection : points situés sur les génératrices limites et points situés sur les contours apparents.

Tangente en un point. — Pour construire la tangente en un point de l'intersection, par exemple au point c obtenu au moyen du plan auxiliaire $s\sigma\beta$, il faut construire l'intersection du plan tangent au cône s suivant $s\beta_1$ avec le plan tangent au cône s_1 suivant $s_1\beta_2$, c'est-à-dire suivant les génératrices projetées respectivement en $s\beta_1$ et en $s_1\beta_2$. A cet effet, observons que ces deux plans tangents coupent les bases respectives des cônes suivant deux droites dont les projections horizontales sont : la tangente β_1t_1 à B pour le premier et la tangente β_2t_2 à B_1 pour le second. Or, si l'on coupe les deux plans tangents par un plan auxiliaire quelconque, par le plan $s\sigma\gamma$ par exemple, on obtient deux droites projetées respectivement en st_1 et en s_1t_2, car $\sigma\gamma$ rencontre β_1t_1 au point t_1, tandis que $\sigma_1\gamma$ rencontre β_2t_2 au point t_2. Mais st_1 et s_1t_2 se rencontrent au point t, qui est la projection horizontale d'un point de l'intersection des deux plans tangents; il en résulte que la tangente en c à la projection horizontale de l'intersection est tc.

Jonction des points. — Après avoir indiqué la construction des divers points et de la tangente en un point quelconque, montrons comment il faudra procéder pour joindre ces points, dans le tracé de la courbe. Pour cela, partons d'un point quelconque, e_1 par exemple. Ce point est le quatrième sommet d'un quadrilatère $e_1\varepsilon_1\varepsilon\varepsilon_2$ dont les quatre côtés passent respectivement par les quatre points fixes s, s_1, σ et σ_1. Quand les trois sommets ε_1, ε et ε_2 de ce quadrilatère décrivent respectivement B, Δ et B_1, le point e_1 décrit la projection horizontale

de l'intersection ; d'ailleurs tous ces points se déplacent en même temps que le point ε, de sorte qu'il suffit de suivre leurs déplacements simultanés pour tracer la courbe. En remarquant alors que les plans



$\sigma\varepsilon\sigma_1$ et $\sigma\alpha\sigma_1$ sont des plans auxiliaires limites, et en procédant comme pour l'intersection de deux pyramides (215), nous obtenons successivement les arcs e_1d, da, ad_1, d_1f_1, f_1c, ce, etc., quand le point ε passe successivement de ε en γ, de γ en α, de α en γ, de γ en δ, de δ en β, de β en ε, etc.

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté l'en-

semble des deux corps. Alors, dans le cône s, la génératrice de contour apparent $s\varepsilon_1$ est cachée entre les génératrices de contour apparent $s_1\gamma_2$ et $s_1\beta'_2$ du cône s_1, parce que les plans auxiliaires $\sigma\varepsilon\sigma_1$ et $\sigma\delta\sigma_1$ sont au-dessous des plans auxiliaires $\sigma\gamma\sigma_1$ et $\sigma\beta s_1$; la génératrice $s\delta_1$ n'est cachée que du point g_1 à la génératrice $s_1\gamma_2$.

Pour le cône s_1, la génératrice $s_1\gamma_2$ est vue du point s_1 au point d; là elle pénètre dans le cône s et est cachée jusqu'au point de sortie d_1. Pareillement, la génératrice $s_1\beta'_2$ est vue jusqu'au point b, cachée de b à la génératrice $s\delta_1$ et vue ensuite. Habituellement d'ailleurs on ne trace pas les portions de génératrices de contour apparent d'un cône intérieures à l'autre : c'est ce qui a été fait dans l'épure.

Enfin, pour voir si un point de l'intersection est vu ou caché, on examine s'il est à l'intersection de deux génératrices vues toutes les deux : ce n'est que dans ce cas qu'il est vu. Par exemple, le point a est vu pour cette raison, mais le point e_1 est caché, parce que la génératrice $s_1\varepsilon_2$ du cône s_1 est cachée. On voit, de cette manière, que les arcs dad_1 et ba_1g_1 sont vus, tandis que les autres sont cachés.

476. Remarque I. — Les constructions restent les mêmes quand les bases des deux cônes sont dans le même plan, sauf que les points σ et σ_1 coïncident et que l'on peut prendre pour la droite Δ une droite quelconque du plan des deux bases. Il est cependant plus commode de s'en passer, comme nous le verrons bientôt (494).

477. Remarque II. — Quand les surfaces sont, l'une un cône et l'autre un cylindre, la ligne des sommets est remplacée par la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône ; les autres constructions subsistent sans modifications.

478. Remarque III. — Enfin, quand les deux surfaces sont des cylindres, la ligne des sommets est à l'infini dans un plan parallèle aux génératrices des deux cylindres. On mène alors par un point quelconque de l'espace la parallèle aux génératrices du premier cylindre et la parallèle aux génératrices du second. Ces deux droites déterminent un plan P dont on construit les intersections respectives Δ et Δ_1 avec les plans de base des deux cylindres : le point σ du n° 475 devient ainsi le point à l'infini dans la direction Δ, et le point σ_1 devient le point à l'infini dans la direction Δ_1 ; quant aux autres constructions, elles ne subissent aucune modification.

§ III. — *Points doubles et points doubles apparents.*

479. **Cas où l'intersection présente des points multiples.** — Considérons deux surfaces coniques ou cylindriques S et S_1. L'intersection de ces deux surfaces peut présenter des points multiples dans l'un des trois cas suivants : 1° quand une génératrice de l'une des surfaces rencontre une génératrice multiple de l'autre surface; 2° quand une génératrice de l'une des surfaces passe par le sommet à distance finie ou infinie de l'autre surface; 3° quand les deux surfaces ont le même plan tangent en un de leurs points communs.

480. **Premier cas.** — *Il existe, sur l'une des surfaces, des génératrices qui rencontrent une génératrice multiple de l'autre surface.*

Supposons, par exemple, que la surface S_1 ait une génératrice double G_1. Il est aisé alors d'avoir les génératrices de S qui la rencontrent; il suffit, pour cela, de couper S par le plan qui passe par G_1 et par le sommet de S, si cette surface est un cône, par le plan qui passe par G_1 et qui est parallèle aux génératrices de S, si cette surface est un cylindre : chacune des génératrices d'intersection répond à la question.

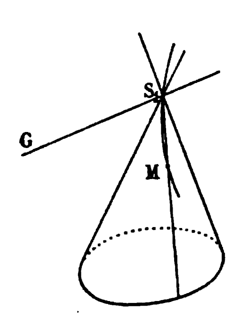
Soit donc G une de ces génératrices rencontrant G_1 au point M. Si l'on suppose, pour fixer les idées, que G_1 soit une génératrice double de la surface S_1, toute droite passant par M coupe S_1 en deux points confondus avec M; il en est de même de G, et, par suite, M est un point double de l'intersection. En ce point viennent d'ailleurs se croiser les lignes d'intersection de la surface S avec les deux nappes de S_1 qui passent par G_1.

Les tangentes en M à l'intersection sont contenues dans le plan tangent à S suivant la génératrice G et dans les plans tangents à S_1 suivant la génératrice G_1. Le premier de ces plans coupe chacun des autres suivant une droite, qui est l'une des tangentes en M à l'intersection. Le nombre des tangentes réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, est égal à l'ordre de multiplicité de la génératrice G_1 sur la surface S_1.

Le raisonnement s'applique, bien entendu, au cas où la génératrice G_1 serait à l'infini; dans ce cas le point M serait un point multiple à l'infini et les tangentes seraient les asymptotes correspondantes.

481. **Deuxième cas.** — *Il existe, sur l'une des surfaces, une génératrice qui passe par le sommet de l'autre.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'une génératrice de la surface S passe par le point S_1, sommet de la surface S_1. Il est clair alors que le point S_1 est un point multiple, réel ou isolé, de l'intersection. On peut d'ailleurs supposer que le point S_1 est à distance finie, le cas où le point S_1 est à l'infini s'en déduisant sans difficulté.



Soit alors S_1M une des branches de l'intersection qui passent par S_1 et soit M un point de cette branche de courbe. La tangente en S_1 à cette ligne est évidemment la limite de S_1M quand le point M se rapproche indéfiniment de S_1; mais S_1M est une génératrice du cône S_1; donc sa position limite sera également une génératrice du cône S_1. Si donc on appelle S_1G la génératrice de S qui passe par S_1, les tangentes à l'intersection au point S_1 seront les génératrices déterminées dans le cône S_1 par le plan tangent à la surface S le long de S_1G.

Il suit de là que le point S_1 est un point multiple de l'intersection d'un ordre de multiplicité égal au degré de la surface S_1, si cette surface est algébrique.

Le raisonnement subsiste entièrement quand le point S_1 est à l'infini, et même quand la génératrice S_1G est elle-même à l'infini.

Dans le cas où S_1G est sur le cône S_1, elle fait partie de l'intersection des deux surfaces, et les conclusions, relativement aux tangentes, s'appliquent au reste de l'intersection. Toutefois, l'ordre de multiplicité du point S_1 sur le reste de l'intersection est diminué d'une unité.

482. **Troisième cas.** — *Les deux surfaces ont le même plan tangent en un de leurs points communs.*

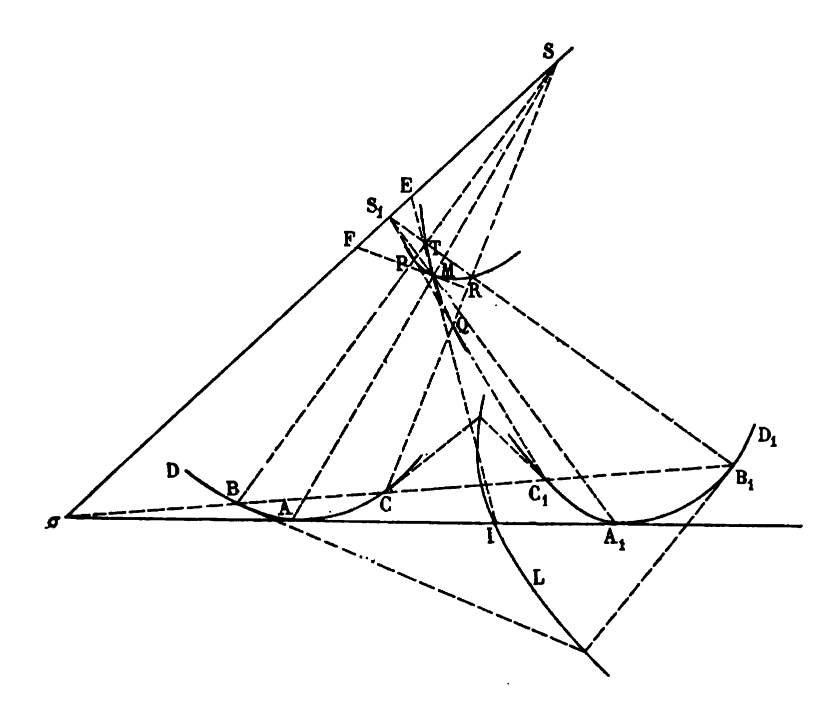
Quand deux surfaces quelconques ont le même plan tangent en un de leurs points communs, ce point est un point multiple de leur intersection. Cette propriété des surfaces se démontre analytiquement

quand les surfaces sont quelconques, et, pour deux surfaces coniques ou cylindriques, on peut s'en rendre compte géométriquement de la manière suivante :

Supposons, ce qui est permis, que les surfaces S et S_1 soient deux cônes de sommets respectifs S et S_1, que les directrices respectives D et D_1 soient deux courbes planes situées dans le même plan, et soit σ la trace de la ligne des sommets sur ce plan. Par hypothèse les deux surfaces ont le même plan tangent au point M ; soit σAA_1 la trace de ce plan tangent commun sur le plan des bases, de sorte que le plan tangent commun est $S\sigma AA_1$. Coupons les deux surfaces par un plan $S\sigma BB_1$ voisin du plan tangent commun. Nous obtenons ainsi dans le cône S un système de génératrices, dont deux, SB et SC, sont voisines de SA ; nous obtenons de même dans le cône S_1 un système de génératrices, dont deux, S_1B_1 et S_1C_1, sont voisines de S_1A_1. Ces quatre génératrices fournissent quatre points de l'intersection voisins du point M. Considérons alors les trois points B, C_1 et P, comme mobiles respectivement sur D, sur D_1 et sur l'intersection des deux cônes. Quand le point B parcourt l'arc BAC, le point C_1 parcourt l'arc $C_1A_1B_1$ et le point P parcourt un arc PMR de l'intersection passant par M. En considérant de même les trois points B, B_1 et T, on voit que si le point B parcourt l'arc BAC, le point B_1 parcourt l'arc $B_1A_1C_1$, et le point T décrit un arc TMQ de l'intersection passant par le point M. Le point M est donc le point de croisement de deux arcs de l'intersection, c'est-à-dire qu'il est un point double de cette intersection.

La tangente en M au premier de ces arcs est la limite des positions de la sécante PR quand le point P et le point R se rapprochent indéfiniment du point M, c'est-à-dire quand le plan $S\sigma B$ se rapproche indéfiniment du plan tangent commun $S\sigma A$; de même, la tangente en M au deuxième arc est la limite des positions de la sécante QT quand le plan $S\sigma B$ se rapproche indéfiniment du plan $S\sigma A$. Or dans le quadrilatère $PQRTSS_1$ la diagonale SS_1 est divisée harmoniquement par les deux autres, et cette propriété subsiste quand le quadrilatère est infiniment petit. Si donc on appelle E et F les points de rencontre de SS_1 avec les tangentes en M à l'intersection, les quatre points S, S_1, E, F forment une division harmonique. En joignant le point M aux points S et S_1, on voit ainsi que *les tangentes au point* M *forment un faisceau harmonique avec les génératrices des deux surfaces qui passent par ce point.*

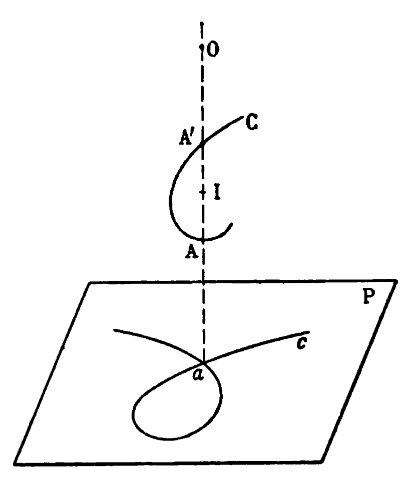
Cette propriété des tangentes en M peut être utilisée quelquefois pour la construction des tangentes en ce point, bien qu'il ne soit en général pas possible d'effectuer exactement cette construction. Pour obtenir approximativement l'une quelconque de ces tangentes, on se sert de ce qu'on appelle une *courbe d'erreur*. Par exemple, si l'on veut construire approximativement la tangente en M à l'arc QMT, on



suppose qu'une tangente roule sur l'arc QMT et, pour chacune de ses positions, on détermine sa trace sur le plan des bases. Le lieu de cette trace est une ligne L qui coupe en un point I la trace du plan tangent commun; la tangente en M à l'arc QMT est alors évidemment la droite MI. Pour avoir le point I, il suffit d'ailleurs de construire le petit arc de la ligne L voisin du point I. On y arrive en prenant sur l'arc QMT quelques points de part et d'autre du point M, et en cherchant les traces, sur le plan des bases, des tangentes en ces points, ce que l'on sait faire puisque les points de contact de ces tangentes étant distincts du point M, on sait construire les tangentes correspondantes. Les traces une fois obtenues, il ne reste plus qu'à les joindre par un trait

continu pour avoir approximativement l'arc qui donne le point I. C'est la ligne L qui est la courbe d'erreur de la question.

483. **Définition des points doubles apparents.** — Lorsqu'on projette une courbe C d'un point O sur un plan P, il arrive généralement qu'il existe des projetantes telles que OAA′, qui rencontrent la courbe C en deux points A et A′. La trace *a* de cette projetante sur le plan P est alors la projection de deux points A et A′ de la courbe C; en d'autres termes, le point *a* est un point double de la projection *c* de la courbe C; on l'appelle un point double *apparent*. Si le point O est à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan horizontal, on a un point double apparent de la projection horizontale; s'il est à l'infini dans une direction perpendiculaire au plan vertical, on a un point double apparent de la projection verticale.



484. **Ligne des points doubles.** — Il est bien clair qu'il serait utile, pour l'exactitude du tracé de la courbe *c*, de connaître les points doubles apparents de cette courbe. Malheureusement il n'est pas possible, en général, de déterminer exactement ces points. Mais on peut, dans certains cas, construire une ligne sur laquelle ils se trouvent et qu'on appelle la *ligne des points doubles*.

Bornons-nous à examiner le cas où la courbe C est l'intersection de deux quadriques, et où *c* est la projection orthogonale de C sur le plan P. Dans ce cas, si *a* est un point double apparent de *c*, la perpendiculaire menée par ce point au plan P est une corde commune aux deux quadriques ; soit I le milieu de cette corde. Si l'on considère, dans la première quadrique, le plan diamétral conjugué des cordes perpendiculaires au plan P, le point I est dans ce plan ; mais le point I est aussi dans le plan diamétral conjugué des mêmes cordes par rapport à la deuxième quadrique ; donc il est à l'intersection de ces deux plans. D'ail-

leurs, le point I étant projeté en a sur le plan P, on voit que la projection, sur le plan P, de l'intersection des deux plans diamétraux, passe par le point a et par les points analogues. Si l'on observe maintenant que dans une quadrique le plan diamétral qui correspond à une direction de cordes n'est autre chose que le plan de la courbe de contact du cylindre circonscrit à la surface parallèlement à cette direction, on peut énoncer les deux résultats qui suivent :

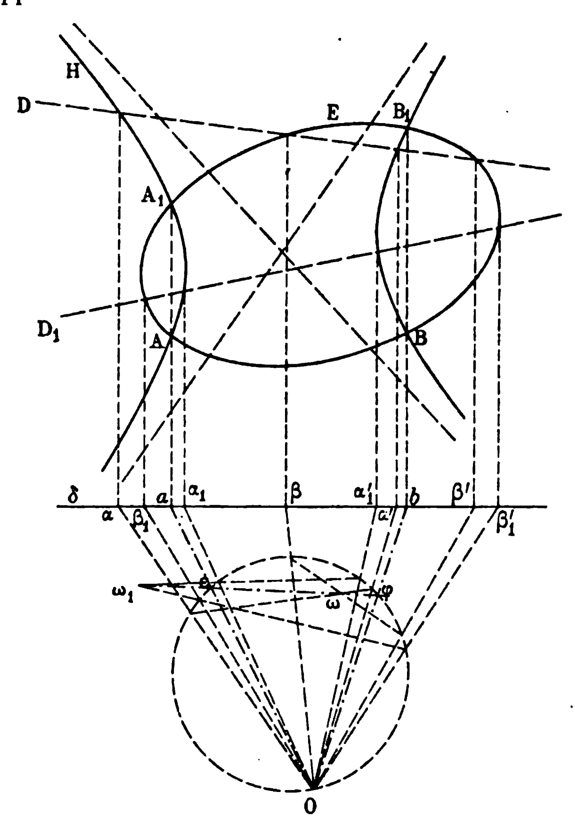
1° *Les points doubles apparents de la projection horizontale de l'intersection de deux quadriques sont situés sur la projection horizontale de l'intersection des plans de contour apparent horizontal des deux surfaces : la projection horizontale de cette droite s'appelle la ligne des points doubles en projection horizontale ;*

2° *Les points doubles apparents de la projection verticale de l'intersection de deux quadriques sont situés sur la projection verticale de l'intersection des plans de contour apparent vertical des deux surfaces : la projection verticale de cette intersection s'appelle la ligne des points doubles en projection verticale.*

485. **Nombre des points doubles apparents.** — Il suit de là qu'une quelconque des projections de l'intersection de deux quadriques présente au plus deux points doubles apparents. Prenons, par exemple, la projection horizontale, et soit δ la ligne des points doubles en projection horizontale. Les cordes verticales communes aux deux quadriques étant projetées sur δ, sont situées dans le plan vertical mené par δ, et sont, par suite, deux cordes communes aux coniques déterminées par ce plan dans les deux surfaces ; mais il est bien clair que ces deux coniques ne peuvent avoir plus de deux sécantes communes verticales, et il en résulte que le nombre des points doubles apparents en projection horizontale est bien au plus égal à deux.

486. **Construction des points doubles apparents.** — On peut même, dans certains cas, construire ces points doubles apparents. Montrons, par exemple, comment on peut construire les points doubles apparents en projection horizontale. Pour cela, imaginons qu'on ait pris le plan vertical mené par δ comme plan vertical de projection, et figurons les deux coniques H et E déterminées par ce plan dans les deux surfaces. Ces deux coniques ont deux cordes communes AA_1 et

BB_1 verticales, c'est-à-dire perpendiculaires à δ. Si on coupe les deux coniques et le système de ces deux cordes par une droite D on obtient, d'après le théorème de Desargues, trois couples de points en involution, dont les projections horizontales sont aussi trois couples de points en involution : soient (a, b), (α, α') et (β, β') ces trois couples de points situés bien entendu sur δ ; a et b sont justement les points doubles apparents.



Avec une deuxième droite D_1 on obtient trois nouveaux couples de points en involution : ce sont (a, b), (α_1, α'_1) et (β_1, β'_1). Il en résulte que les points doubles apparents, a et b, sont les points communs à ces involutions.

Rappelons la construction classique de ces deux points. Pour cela, traçons un cercle quelconque dans le plan horizontal, prenons un point O sur ce cercle, joignons-le aux points α, α', β, β', etc., et cons-

truisons les pôles ω et ω_1 des deux faisceaux en involution ainsi obtenus. La droite $\omega\omega_1$ coupe le cercle en deux points ε et φ qui, joints au point O, donnent les rayons $O\varepsilon$ et $O\varphi$ communs à ces deux faisceaux. Les points de rencontre de δ avec ces deux rayons sont les points a et b demandés.

Il est bien entendu que si l'on peut tracer les deux coniques H et E, il est inutile de recourir à ces involutions. Dans le cas contraire, la solution que nous venons de donner permet de déterminer les points doubles apparents quand on sait trouver les points de rencontre des deux droites D et D_1 avec chacune des deux surfaces. Au reste, les droites D et D_1 sont assujetties à la seule condition d'être situées dans le plan vertical mené par δ. D'après cela, quand on a à construire l'intersection de deux cônes du second degré, on saura déterminer la ligne des points doubles en projection horizontale et en projection verticale, ainsi que les points doubles eux-mêmes, dans certains cas.

§ IV. — *Points à l'infini et asymptotes.*

487. **Points à l'infini dans l'intersection de deux cônes.** — En tout point M de l'intersection de deux cônes viennent se croiser en général deux génératrices appartenant respectivement aux deux surfaces. Si donc le point M s'éloigne indéfiniment, c'est que les deux génératrices qui se croisent en ce point sont parallèles. D'après cela, pour que l'intersection de deux surfaces coniques présente des points à l'infini, il faut qu'il existe sur l'une des surfaces des génératrices parallèles à des génératrices de l'autre surface. A chaque couple de génératrices parallèles appartenant respectivement aux deux cônes, correspond un point à l'infini de l'intersection. On obtient donc les directions des points à l'infini de l'intersection, quand il y a des points à l'infini, en prenant les génératrices du premier cône qui sont parallèles à des génératrices du second : ce sont les directions de ces génératrices parallèles qui fournissent les directions des points à l'infini, c'est-à-dire les directions asymptotiques de l'intersection.

D'ailleurs, pour trouver les génératrices du premier cône qui sont parallèles à des génératrices du second, on transporte celui-ci parallèlement à lui-même de manière à faire coïncider son sommet avec celui du premier (308). Les génératrices communes au premier cône et au second cône ainsi transporté, génératrices qu'on sait déter-

miner (465), sont alors les génératrices du premier cône parallèles à des génératrices du second, et donnent les directions des points à l'infini.

Si S est le premier cône, S_1 le second et SA une génératrice commune au cône S et au cône S_1 transporté, un point à l'infini de l'intersection est le point de rencontre à l'infini de SA et de la parallèle à SA menée par S_1, parallèle qui est bien entendu sur le cône S_1.

488. **Asymptotes.** — Quand un point s'éloigne indéfiniment sur une branche de courbe, on sait que la tangente en ce point a pour limite l'asymptote, à distance finie ou infinie, correspondant à la branche de courbe. D'après cela, soient SA et S_1A_1 deux génératrices parallèles appartenant respectivement aux deux cônes. Il y a, sur l'intersection, un point à l'infini dans la direction de ces deux droites, et l'asymptote correspondante, considérée comme la tangente en ce point à l'infini, est l'intersection des plans tangents aux deux cônes suivant SA et suivant S_1A_1.

Il y aura ou il n'y aura pas d'asymptote suivant que ces deux plans tangents se couperont ou ne se couperont pas.

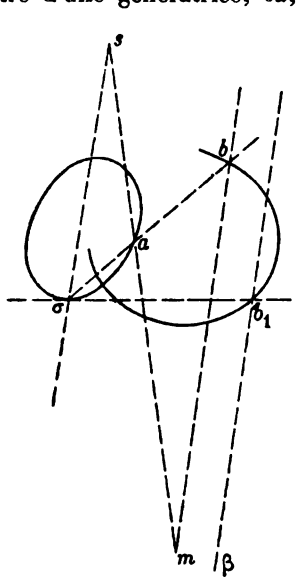
489. **Points à l'infini dans l'intersection d'un cône et d'un cylindre.** — Pour qu'un point de l'intersection d'un cône et d'un cylindre s'éloigne indéfiniment, il faut : ou que la génératrice du cône et la génératrice du cylindre qui passent par ce point deviennent parallèles ; ou que la génératrice du cylindre qui passe par ce point s'éloigne indéfiniment. Dans le premier cas, il y a sur le cône une génératrice parallèle aux génératrices du cylindre, et la direction de cette génératrice donne la direction du point à l'infini de l'intersection. Dans le second cas, le cylindre ayant une ou plusieurs génératrices à l'infini est à nappes infinies. D'ailleurs, quand un cylindre a des nappes infinies, il a des plans de directions asymptotiques, et les génératrices à l'infini sont les droites à l'infini dans ces plans ; de sorte que si une génératrice du cône rencontre une génératrice du cylindre qui est à l'infini dans un plan P de directions asymptotiques de ce cylindre, elle est nécessairement parallèle au plan P. On obtiendra donc les directions des points à l'infini de cette espèce, s'il y en a, en prenant les génératrices du cône qui sont parallèles au plan P et aux plans analogues, c'est-à-dire en prenant les génératrices d'intersection du cône avec les plans menés par son sommet parallèlement aux plans des directions asymptotiques du cylindre.

En résumé, pour obtenir les points à l'infini de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, on mène par le sommet du cône la parallèle aux génératrices du cylindre et les plans parallèles aux plans des directions asymptotiques de ce cylindre.

Alors les points à l'infini cherchés sont : 1° sur la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône, *si cette parallèle est située sur la surface du cône* ; 2° sur les génératrices d'intersection du cône avec les plans parallèles aux plans des directions asymptotiques, *si ces plans coupent le cône.*

490. Asymptotes dans l'intersection d'un cône et d'un cylindre. — Les points à l'infini étant ainsi obtenus, il reste à déterminer les asymptotes correspondantes.

1° Supposons que la parallèle $s\sigma$ aux génératrices du cylindre, menée par le sommet du cône, soit située sur la surface du cône. Pour trouver l'asymptote correspondante, cherchons les points de rencontre d'une génératrice, sa, du cône avec le cylindre. Coupons, pour cela, les deux surfaces par le plan auxiliaire mené par sa parallèlement aux génératrices du cylindre, et qui est défini par les deux droites sa et $s\sigma$. Soit m le point de rencontre de sa avec l'une des génératrices, bm, déterminées par ce plan auxiliaire dans le cylindre : le point m est un point de l'intersection des deux surfaces, et la tangente en m à cette intersection est l'intersection du plan tangent au cône suivant sa avec le plan tangent au cylindre suivant bm. Quand sa se rapproche indéfiniment de $s\sigma$, le point m s'éloigne indéfiniment et décrit une branche infinie dont l'asymptote est la limite de la tangente en m. Or cette tangente est toujours située dans le plan tangent au cône suivant sa ; d'autre part, quand sa se rapproche indéfiniment de $s\sigma$, le plan tangent au cône suivant sa a pour limite le plan tangent à la même surface suivant $s\sigma$; donc les asymptotes correspondantes sont situées



dans le plan tangent au cône suivant $s\sigma$. Il est aisé de voir que ce sont les génératrices déterminées par ce plan dans le cylindre. Soit en effet $b_1\beta$ l'une de ces génératrices. Quand sa se rapproche indéfiniment de $s\sigma$, comme le plan $as\sigma$ a pour limite le plan tangent au cône suivant sa, on peut supposer que $b_1\beta$ est la position limite de bm; mais alors le plan tangent au cylindre suivant bm a pour limite le plan tangent à la même surface suivant $b_1\beta$. Il en résulte que $b_1\beta$ est l'intersection des deux plans tangents quand m est à l'infini, et, par conséquent, qu'elle est une asymptote.

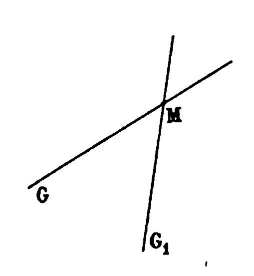
On peut rattacher la question que nous venons de résoudre à celle de la détermination des points multiples de l'intersection, quand une génératrice de l'une des surfaces passe par le sommet de l'autre (481). Dire en effet que $s\sigma$ est une génératrice du cône parallèle aux génératrices du cylindre, revient à dire qu'il existe, sur le cône, une génératrice qui passe par le sommet (à l'infini) du cylindre. Le point à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre est donc un point multiple à l'infini (481), et les tangentes aux branches infinies qui passent par ce point, c'est-à-dire les asymptotes, sont les génératrices déterminées dans le cylindre par le plan tangent au cône suivant sa.

Ces asymptotes n'existent que si le plan tangent au cône coupe le cylindre. Quelques-unes, ou mêmes toutes, peuvent être à l'infini si le plan tangent au cône est parallèle à un plan de directions asymptotiques du cylindre.

2° La théorie est plus simple si le point est à l'infini sur une génératrice obtenue en coupant le cône par un plan mené par son sommet parallèlement à un plan ϖ de directions asymptotiques. La tangente en ce point à l'infini, c'est-à-dire l'asymptote, est alors l'intersection du plan tangent au cône suivant cette génératrice avec le plan tangent au cylindre suivant la génératrice à l'infini dans le plan ϖ. Or, si un cylindre a une génératrice à l'infini dans un plan ϖ, le plan tangent suivant cette génératrice est un plan asymptote parallèle au plan ϖ. L'asymptote cherchée est donc l'intersection de ce plan asymptote et du plan tangent au cône suivant la génératrice considérée. On obtient d'ailleurs un point de l'intersection de ces deux plans en coupant par l'un des plans auxiliaires qui ont servi à déterminer les points de l'intersection du cône et du cylindre (469).

491. Points à l'infini et asymptotes dans l'intersection de deux

cylindres. — Appelons C et C_1 les deux cylindres et écartons le cas où les génératrices du cylindre C sont parallèles aux génératrices du cylindre C_1, cas dans lequel l'intersection des deux surfaces est un système de génératrices que nous avons appris à déterminer (468). Soient alors G et G_1 deux génératrices appartenant respectivement aux deux surfaces et situées dans le même plan, de sorte qu'elles se coupent en un point M. Le point M est un point de l'intersection des deux surfaces, et il est clair que tout point de cette intersection peut être considéré comme défini par la rencontre de deux génératrices telles que G et G_1, situées respectivement sur les deux surfaces. Comme ces deux génératrices ne sont pas parallèles, leur point de rencontre, M, ne peut être à l'infini que si l'une au moins de ces deux génératrices est à l'infini.



1° Supposons qu'une seule de ces génératrices, G_1 par exemple, soit à l'infini. Le point M sera alors à l'infini dans la direction G, puisque le point M est sur G. Il en résulte que, dans ce cas, l'intersection présente un point à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre C. D'ailleurs G_1 est à l'infini dans un plan de directions asymptotiques du cylindre C_1; et comme elle rencontre G, le plan des directions asymptotiques qui contient G_1 est parallèle à G. Donc le cas examiné ne peut se présenter que si l'un des plans des directions asymptotiques de l'un des cylindres est parallèle aux génératrices de l'autre cylindre.

Supposons donc qu'un plan de directions asymptotiques du cylindre C_1 soit parallèle aux génératrices du cylindre C, et appelons encore G_1 la génératrice du cylindre C_1 qui est à l'infini dans ce plan. Comme nous venons de le voir, l'intersection présente un point à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre C, ce qui revient à dire que le sommet à l'infini du cylindre C est situé sur la surface du cylindre C_1. Il en résulte (481) que les tangentes à l'intersection en ce point à l'infini, c'est-à-dire les asymptotes correspondantes, sont nécessairement des génératrices du cylindre C. Ce sont donc les génératrices du cylindre C situées dans le plan tangent au cylindre C_1 suivant la génératrice G_1. Mais le plan tangent au cylindre C_1 suivant la génératrice G_1 est un plan asymptote; donc les asymptotes correspon-

dant aux points à l'infini de l'espèce considérée sont les génératrices suivant lesquelles les plans asymptotes du cylindre C_1 coupent le cylindre C.

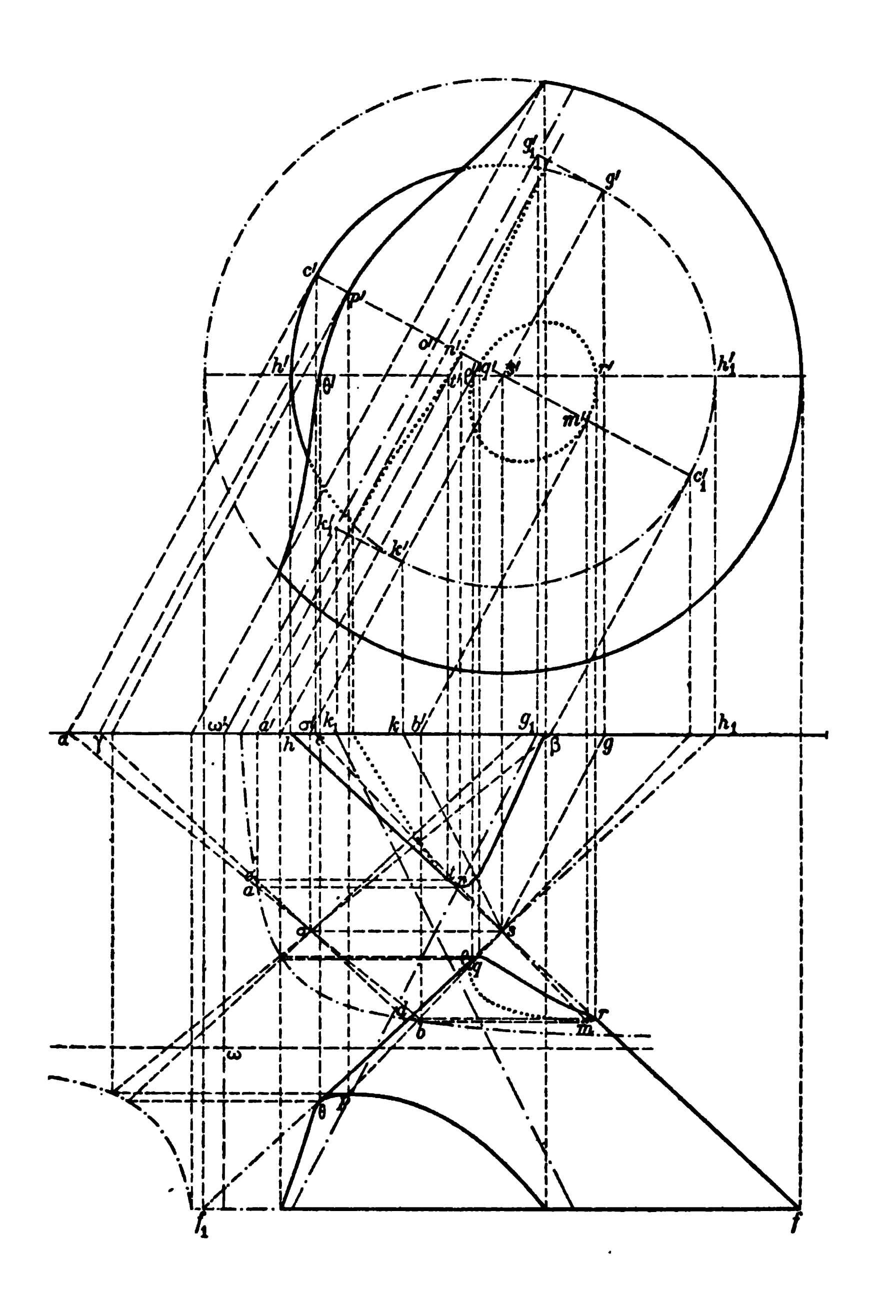
Il n'y a naturellement pas d'asymptotes correspondantes si le plan asymptote qui correspond à la génératrice G_1 est à l'infini.

2° Supposons maintenant que les deux génératrices G et G_1 qui donnent un point M de l'intersection soient à l'infini. La première est à l'infini dans un plan de directions asymptotiques par rapport au premier cylindre, et la deuxième est à l'infini dans un plan de directions asymptotiques par rapport au deuxième cylindre. Si donc on appelle P et P_1 ces deux plans, le point M est à l'infini dans la direction de l'intersection des deux plans P et P_1. Quant à l'asymptote correspondante, elle est évidemment l'intersection du plan asymptote au premier cylindre parallèle au plan P et du plan asymptote au deuxième cylindre parallèle au plan P_1. Elle est à distance finie ou infinie suivant que les deux plans P et P_1 se coupent ou sont parallèles ; mais dans ce dernier cas la droite à l'infini dans les deux plans P et P_1 est une génératrice commune aux deux surfaces, et le degré de l'intersection s'abaisse d'une unité.

§ V. — *Exemples d'intersections de cônes et de cylindres.*

492. Nous avons donné plus haut (475) un exemple d'intersection de deux cônes. Nous ne traiterons donc ici que deux exemples relatifs, l'un à l'intersection d'un cône et d'un cylindre, l'autre à l'intersection de deux cylindres.

493. **Intersection d'un cône et d'un cylindre.** — Proposons-nous de construire l'intersection d'un cône de révolution à axe de bout, de sommet (s, s'), et d'un cylindre dont la base est une hyperbole équilatère dans le plan horizontal, et dont les génératrices sont de front. La base du cône est une circonférence dans le plan vertical ; la base du cylindre a pour centre le point (ω, ω'), et l'une de ses asymptotes est perpendiculaire à la ligne de terre ; enfin, les projections verticales des génératrices du cylindre sont parallèles à $\omega'o'$, de sorte que le plan $\omega\omega'o'$ est l'un des plans asymptotiques du cylindre. Cela posé, laissons de côté la construction d'un point quelconque de l'intersection, qui n'offre rien de particulier, pas plus que celle de la tangente



en ce point, et montrons comment on peut déterminer successivement : 1° les points sur les génératrices limites du cylindre ; 2° les points sur les génératrices de contour apparent horizontal du cône ; 3° les points à l'infini et les asymptotes.

Points sur les génératrices limites. — Pour trouver les génératrices limites sur le cylindre, il faut mener au cône les plans tangents parallèles aux génératrices du cylindre. Soit $(s\sigma, s'\sigma')$ la parallèle aux génératrices du cylindre menée par le sommet du cône. Les traces verticales des plans tangents cherchés sont les tangentes $\alpha c'$ et $\beta c'_1$ menées à la base du cône parallèlement à $s'\sigma'_1$ et les traces horizontales passent par σ ; il en résulte que les plans cherchés sont $\sigma\alpha c'$ et $\sigma\beta c'_1$. L'un de ces plans, $\sigma\alpha c'$ par exemple, coupe le cylindre suivant deux génératrices projetées horizontalement en bm et en an. Ces génératrices rencontrent la génératrice $(sc, s'c')$ du cône aux points (m, m') et (n, n'), qui sont deux des points situés sur les génératrices limites. On détermine d'une manière analogue les autres points (p, p') et (q, q'). En chacun de ces points la tangente à l'intersection est confondue avec la génératrice correspondante du cylindre ; par conséquent, en projection horizontale, les tangentes sont parallèles à la ligne de terre, et elles sont perpendiculaires à $s'c'$ en projection verticale.

D'ailleurs, il est visible que $s'c'$ est un axe de la projection verticale ; car le plan de bout mené par $s'c'$ est un plan de symétrie pour le cône et pour le cylindre. Au reste, chaque génératrice du cylindre rencontre le cône en deux points dont les projections verticales sont symétriques par rapport à $s'c'$, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer en coupant le cône par le plan de front qui contient la génératrice considérée du cylindre.

Points sur les génératrices de contour apparent horizontal du cône. — Cherchons les points situés sur la génératrice $(sh, s'h')$. Pour cela, coupons le cylindre par le plan $\sigma\gamma h'$ qui contient cette génératrice. En opérant comme pour le plan $\sigma\alpha c'$, on obtient ainsi les points (r, r') et (t, t'). On détermine d'une manière analogue les points (ρ, ρ') et (θ, θ') situés sur la génératrice $(sh_1, s'h'_1)$.

Points à l'infini et asymptotes. — Si l'on mène par le sommet du cône les plans parallèles aux plans de directions asymptotiques du cylindre, un seul de ces deux plans coupe le cône. Ce plan $\sigma\sigma's'$ coupe

le cône suivant deux génératrices (sg, $s'g'$) et (sk, $s'k'$), qui définissent les directions asymptotiques de l'intersection.

Pour avoir les asymptotes correspondantes, il faut construire les droites d'intersection du plan asymptotique correspondant, c'est-à-dire du plan $\omega\omega'o'$ et des plans tangents au cône suivant les génératrices qui donnent les points à l'infini. Ces asymptotes étant situées dans le même plan de bout ont la même projection verticale $\omega'k_1'g_1'$; elles sont projetées horizontalement suivant les parallèles à sg et à sk menées respectivement par les points g_1 et k_1.

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté le cône entaillé par le cylindre en enlevant du cône les régions voisines du sommet, et on a limité le cône au plan vertical de projection et au plan de front ff_1.

494. **Intersection de deux cylindres à bases circulaires et à génératrices de front.** — Supposons que les bases des deux cylindres soient dans le plan horizontal, et soient (o, o') le centre de la base du premier, (o_1, o_1') le centre de la base du second. Les génératrices étant de front, soient $o'\omega'$ et $o_1'\omega'$ les directions des projections verticales respectives des génératrices, les projections horizontales étant parallèles à la ligne du terre. Cela posé, cherchons comme d'habitude : 1° les points sur les génératrices limites ; 2° un point quelconque et la tangente en ce point ; 3° les points sur les contours apparents.

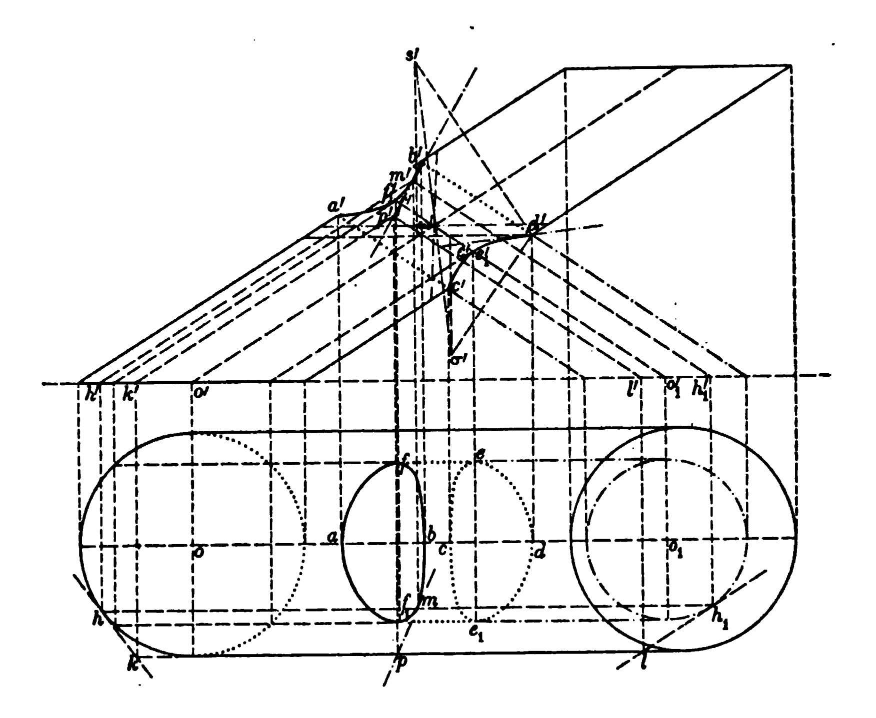
Points sur les génératrices limites. — On reconnaît au simple examen qu'il n'y a de génératrices limites que sur le grand cylindre (o, o'), parce que les deux plans limites sont limites pour le petit cylindre (o_1, o_1'). Il en résulte qu'il y a pénétration du grand cylindre par le petit. On obtient d'ailleurs les génératrices limites en menant au cylindre (o_1, o_1') les plans tangents de front, ce qui fournit les points (e, e') ; (e_1, e_1') ; (f, f') ; (f_1, f_1') situés en même temps sur les génératrices limites du cylindre (o, o') et sur les génératrices de contour apparent horizontal du cylindre (o_1, o_1'),

Détermination d'un point et de la tangente en ce point. — Cherchons l'un des points de rencontre du cylindre (o_1, o_1') avec la génératrice du cylindre (o, o'), qui passe par le point (h, h'). En coupant par le plan de front hh_1, nous obtenons une génératrice (h_1m, $h_1'm'$) dans

le premier cylindre et une génératrice $(hm, h'm')$ dans le second, ce qui fournit le point (m, m') de l'intersection.

Pour avoir la tangente en ce point, on a coupé les plans tangents aux deux surfaces par le plan de front kl, ce qui a fourni deux droites projetées verticalement en $k'p'$ et en $l'p'$; la tangente au point (m, m') est donc $(mp, m'p')$.

Points sur les contours apparents. — Il n'y a pas de points sur le contour apparent horizontal du cylindre (o, o'), et on a déterminé plus haut ceux qui sont situés sur le contour apparent horizontal du cylin-



dre (o_1, o_1). Pour avoir les points situés sur les génératrices de contour apparent vertical, il suffit d'observer que toutes ces génératrices sont situées dans le plan de front mené par oo_1. En coupant par ce plan de front, on obtient ainsi les points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d').

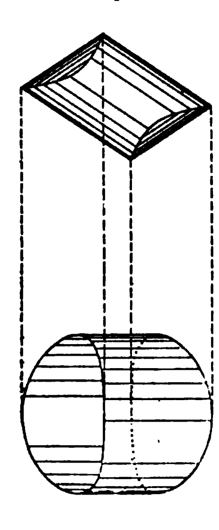
La construction ordinaire de la tangente à la projection verticale est en défaut pour ces points ; mais si l'on considère la tangente en un

point de l'intersection comme la perpendiculaire menée par ce point au plan des deux normales, il est aisé de donner une construction convenant aux points (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'). On observe, pour cela, que si un cercle est tracé sur une surface, la normale à la surface en un point de la circonférence de ce cercle rencontre l'axe du cercle, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan du cercle menée par son centre. Dans le cas actuel, par chaque point de l'intersection il passe un cercle tracé sur le premier cylindre et un cercle tracé sur le second. Ces deux cercles sont horizontaux et leur axes sont des verticales situées dans le même plan de front; de sorte que la droite qui joint les points où ces axes sont rencontrés par les normales aux deux surfaces au point considéré est une ligne de front du plan des deux normales. Cherchons, d'après cela, la tangente en d' à la projection verticale de l'intersection. A cet effet, observons que les normales en (d, d') aux deux surfaces rencontrent les axes des cercles correspondants en des points qui sont projetés verticalement en s' et en σ'; il en résulte que $s'\sigma'$ est la limite de la projection verticale d'une ligne de front du plan des normales, quand le point se rapproche indéfiniment de (d, d'). Par conséquent, la tangente en d' à la projection verticale de l'intersection est la perpendiculaire à $s'\sigma'$ menée par d'.

Nature de la projection verticale. — Le plan de front mené par oo_1 est un plan de symétrie pour les deux cylindres qui sont du second degré ; la projection verticale de l'intersection est donc une conique. Il est aisé de voir que c'est une hyperbole, ou, pour mieux dire, un système de deux arcs d'hyperbole.

Coupons en effet les deux surfaces par un plan horizontal quelconque ; les sections sont deux cercles dont les quatre points de rencontre sont deux à deux symétriques par rapport au plan de front oo_1. Deux de ces points sont à l'infini, et leur projection verticale est le point à l'infini sur la trace verticale du plan horizontal qui les a fournis ; il en résulte que cette droite est une direction asymptotique de la projection verticale. Mais quand le plan horizontal se déplace et passe par le point ϖ', intersection des projections verticales des axes des deux cylindres, les deux cercles obtenus sont concentriques ; leurs points de rencontre sont donc tous à l'infini, et il n'y a plus aucun point de l'intersection à distance finie projeté verticalement sur la trace ver-

ticale du plan. Il en résulte que la parallèle à la ligne de terre menée par ω' est une asymptote de la projection verticale de l'intersection ; donc cette projection verticale est une portion d'hyperbole, dont la deuxième asymptote se détermine du reste sans aucune difficulté.



Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté le cylindre (o, o') troué par le cylindre (o_1, o'_1), en enlevant du premier cylindre ce qui est à l'intérieur du second, et du second ce qui est extérieur au premier.

On a représenté, d'autre part, dans une deuxième figure, le solide commun aux deux corps. Les règles de la ponctuation ne diffèrent pas, d'ailleurs, de celles qui ont été données pour les polyèdres.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE PREMIER

1. Intersection de deux cônes ayant pour base commune une ellipse située dans le plan de deux droites données. Construire les tangentes aux points de rencontre des deux courbes d'intersection.

2. Deux cônes du second degré ont leurs bases données dans le deuxième plan bissecteur, et leurs sommets respectifs sont deux points donnés (s, s') et (σ, σ'). La droite $(s\sigma, s'\sigma')$ étant une génératrice du premier cône, construire l'intersection des deux surfaces.

3. Un cylindre dont les génératrices sont horizontales a pour base un cercle situé dans le plan vertical. Construire l'intersection de ce cylindre et d'un cône circulaire droit.

4. On donne deux cercles égaux situés, l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical. Construire l'intersection de deux cônes ayant pour bases respectives ces deux cercles et tels que chacun d'eux ait son sommet au centre de la base de l'autre.

5. On donne deux cercles O et O_1 situés dans le plan horizontal et une

droite (as, $a's'$) dont la trace horizontale (a, a') est l'un des points communs aux deux cercles. Construire l'intersection du cône de base O et de sommet (s, s') avec le cylindre de base O_1 et dont les génératrices sont parallèles à la droite (as, $a's'$).

6. Chercher s'il existe sur un hyperboloïde de révolution à une nappe, à axe vertical, des génératrices inclinées à 45° sur le plan vertical.

7. Une ellipse du plan horizontal a son grand axe de front. Cette ellipse est la section droite d'un cylindre. On considère la droite de front inclinée à 45° sur le plan horizontal et rencontrant l'ellipse au sommet de gauche. Cette droite est l'axe d'un cône de révolution de sommet donné et dont le demi-angle au sommet est égal à 45°. Intersection des deux surfaces; branches infinies.

8. On coupe un cône quelconque, défini par sa base dans le plan horizontal et par son sommet, par un cylindre de révolution à axe vertical. Dans quel cas l'intersection présente-t-elle des branches infinies?

9. On donne un cône de révolution à axe vertical et une droite de bout sur laquelle on prend un point. On considère ce point comme sommet d'un cône de révolution à axe de bout tangent au premier. Construire ce cône et l'intersection des deux surfaces.

10. On donne deux points dans un plan de profil et une ellipse située dans un plan parallèle à la ligne de terre. Cette ellipse est la base commune de deux cônes ayant pour sommets respectifs les deux points donnés. Intersection des deux surfaces.

11. On coupe un cylindre de révolution à axe vertical par un plan défini par deux droites qui se coupent, et on prend la section comme base d'un cône de sommet donné. Construire l'intersection des deux surfaces et indiquer les particularités qu'elle présente aux points de rencontre des deux coniques d'intersection.

12. Un cône a pour base un cercle C du plan horizontal et pour sommet un point donné. On construit le cône supplémentaire de même sommet et l'on demande de trouver l'intersection de ce nouveau cône avec le cylindre droit ayant pour base le cercle C.

13. Un cône a pour base un cercle situé dans le plan horizontal et pour sommet un point S. Construire l'intersection de ce cône et du cône supplémentaire ayant pour sommet un point S_1.

14. Une droite est définie par sa projection horizontale, sa trace horizontale et son angle avec le plan horizontal. On donne, d'autre part, la trace horizontale et l'inclinaison d'un plan sur le plan horizontal. Mener par un point donné une droite faisant des angles donnés avec la droite et avec le plan donnés.

15. Une parabole située dans le plan horizontal est la base commune à deux cônes dont les sommets sont projetés horizontalement sur la parabole. Construire l'intersection de ces deux cônes.

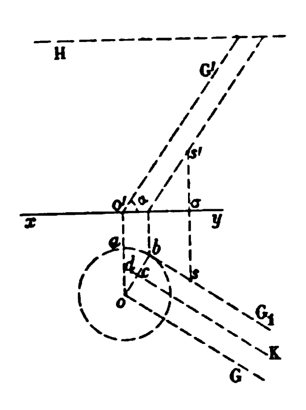
16. On donne deux coniques situées dans le plan horizontal et tangentes en un point (a, a'). Ce point est la trace horizontale d'une droite sur laquelle on prend deux points (s, s') et (σ, σ'), sommets de deux cônes ayant pour bases respectives les deux coniques. Intersection des deux surfaces; point où l'intersection rencontre la génératrice de contact; branches infinies.

17. Mener par un point donné une droite située à des distances données de deux points donnés.

18. Solide commun a un cône et a un cylindre. — Cadre : 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.

$$xo' = 8^{cm},8, \quad oo' = 7^{cm}, \quad oa = 4^{cm}, \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{16}{11}, \quad \sigma s = 6^{cm}.$$

bG_1 tangente parallèle à G ; b est le point de contact, c est le milieu de ob, cK est parallèle à G. $cd = 0^{cm},6$.



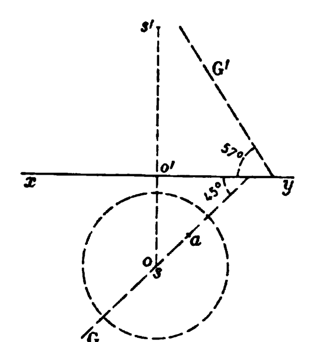
Un cylindre a pour base dans le plan horizontal le cercle o' et ses génératrices sont parallèles à (G, G') (l'angle de G et de G' est droit sur l'épure).

Un cône a son sommet (s, s') sur la génératrice bG_1 de contour apparent horizontal du cylindre et pour base une ellipse située dans le plan horizontal. Cette ellipse passe au point b, son grand axe est cK, un de ses sommets est en d et la longueur $2a$ du grand axe est 18^{cm}.

On demande de représenter le solide commun au cône et au cylindre, limité au plan horizontal et à un plan H de cote 15^{cm}.

On prolongera les courbes à l'encre rouge jusqu'au cadre. Y-a-t-il des asymptotes ? (R. Malloizel.)

19. Cadre : 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



Un cône de révolution a pour base dans le plan horizontal la circonférence (o, o') de 9^{cm} de rayon ;

$$oo' = 11^{cm}, \quad xo' = o'y, \quad o's' = 18^{cm}.$$

Un cylindre a pour base dans le plan horizontal une circonférence passant au point o et dont le centre, a, situé sur la ligne oa, faisant 45° avec xy, est à une distance de o égale à 5^{cm},5.

Les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite (G, G') ; G' fait 57° avec xy, G fait 45°.

On demande : 1° les projections de l'intersection du cône et du cylindre ; 2° de représenter le cône entaillé par le cylindre et limité au plan horizontal.

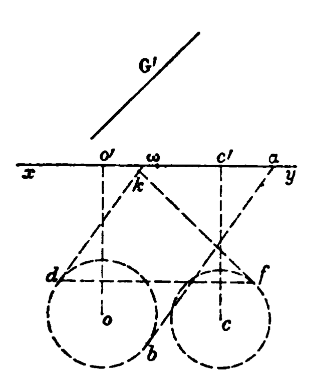
(R. Malloizel.)

20. Cadre : 27^{cm} sur 45^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et à 4^{cm},5 au-dessus du milieu de la feuille.

$$x\omega = \omega y, \quad \omega o' = 6^{cm}, \quad o'o = 16^{cm},5, \quad \text{rayon } od = 6^{cm},$$

$$\omega c' = 7^{cm}, \quad c'c = 17^{cm}, \quad \text{rayon } cf = 5^{cm},5, \quad \omega\alpha = 12^{cm},5.$$

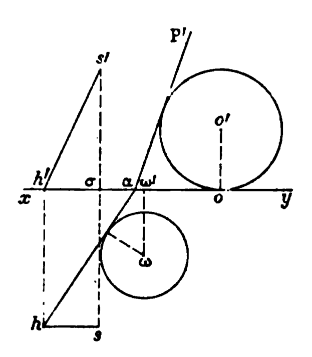
Un cylindre a pour base dans le plan horizontal le cercle od ; la projection horizontale d'une génératrice de contour apparent horizontal est la droite $b\alpha$, la projection verticale de cette génératrice est parallèle à G' qui fait un angle de 45° avec xy.



Un autre cylindre a pour base dans le plan horizontal la circonférence cf. On obtiendra une génératrice de contour apparent de la façon suivante : on mène l'autre génératrice dk de contour apparent horizontal du premier cylindre, par le point d on mène une parallèle à la ligne de terre qui coupe la circonférence cf au point f. Cette tangente est la projection horizontale d'une génératrice de contour apparent du deuxième cylindre. Cette génératrice coupe dk dans l'espace en un point qui se projette horizontalement en k. On demande de représenter le premier cylindre entaillé par le second. Le premier cylindre sera limité aux deux plans de projection.

On déterminera donc la trace verticale du premier cylindre, qui est une ellipse dont on trouve facilement les axes. (R. Malloizel.)

21. Cadre : 27cm sur 42cm. — Ligne de terre parallèle au petit côté de la feuille et au milieu.



Un cône a pour base dans le plan vertical une circonférence tangente à la ligne de terre en un point *o* tel que $oy = 7^{cm},5$, son rayon est de $6^{cm},5$. Le sommet du cône (s, s') est ainsi défini :

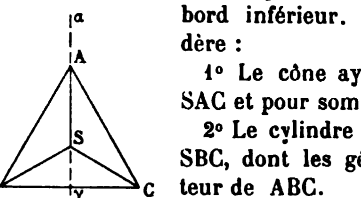
$$o\sigma = 13^{cm}, \quad \sigma s' = 13^{cm}, \quad \sigma s = 15^{cm}.$$

Par le point (s, s') on mène une droite de front $(sh, s'h')$ telle que $\sigma h' = 6^{cm}$. Par cette droite on mène le plan $h\alpha P'$ tangent au cône, puis on trace une circonférence ω de rayon $4^{cm},5$ tangente à la trace αh et dont le centre est à 7^{cm} de xy. Cette circonférence, située dans le plan horizontal, est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à $(sh, s'h')$. La hauteur du cylindre est 17^{cm}. On demande : 1° les projections de la courbe d'intersection du cône et du cylindre ; 2° de représenter le cylindre entaillé par le cône.

(R. Malloizel.)

22. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — $\alpha\beta$ est le grand axe de la feuille.

Un tétraèdre régulier repose par sa base ABC sur le plan horizontal ; BC est parallèle au petit côté du cadre et à 4^{cm} du bord inférieur. $B\gamma = \gamma C$; $BC = 25^{cm}$. On considère :



1° Le cône ayant pour base le cercle inscrit dans SAC et pour sommet B ;

2° Le cylindre ayant pour base le cercle inscrit dans SBC, dont les génératrices sont parallèles à $A\gamma$, hauteur de ABC.

Trouver la projection de l'intersection du cône et du cylindre et représenter la partie du tétraèdre supposé plein, extérieure au cône et au cylindre. (R. Malloizel.)

23. Un cône a pour base un cercle donné dans le plan horizontal et pour sommet un point donné S. On transporte ce cône parallèlement à lui-même de manière à amener son sommet en un autre point Σ. Construire l'intersection des deux cônes S et Σ.

Ces deux cônes ont une courbe plane commune à l'infini ; ils ont donc une seconde courbe plane commune. Les plans des deux courbes communes forment un faisceau harmonique avec les plans passant par leur intersection et par les sommets respectifs des deux cônes. Il en résulte que le plan de la deuxième courbe commune passe par le milieu de la ligne SΣ. D'ailleurs les deux cônes ont deux plans tangents communs, et le plan de la deuxième courbe est parallèle aux génératrices de contact, ce qui achève de le définir.

24. Intersection d'un cône droit de révolution (s, s') avec un cylindre oblique à base circulaire (o, o') (*fig.* 1 ci-dessous).

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours supplémentaire, 1888.*)

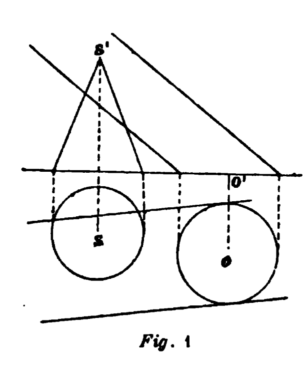


Fig. 1

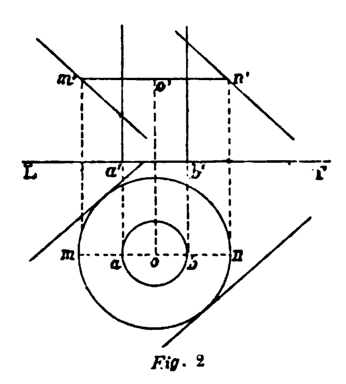
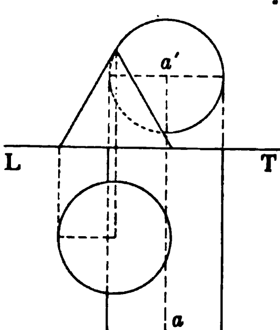


Fig. 2

25. Intersection d'un cylindre droit de révolution (ab, $a'b'$) avec un cylindre oblique à directrice circulaire horizontale (mn, $m'n'$) dont le centre (o,o') de la directrice est situé sur l'axe du cylindre droit (*fig.* 2 ci-dessus).

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours principal, 1888.*)

26. Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe A est perpendiculaire au plan vertical, avec un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan horizontal, une génératrice du cylindre passant par le sommet du cône et l'axe du cylindre étant situé au-dessous de ce sommet. — Développer les deux surfaces jusqu'à la courbe d'intersection.



On mènera la tangente en un point de l'intersection et la tangente au même point dans le développement.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours de 1892.*)

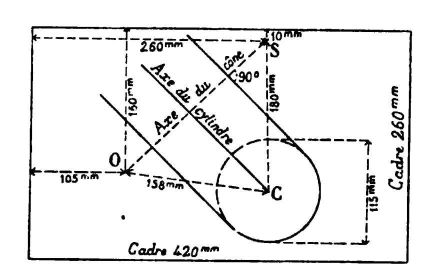
27. Intersection d'un cône et d'un cylindre. — Cône droit de révolution. Cylindre oblique à base circulaire. Les deux axes sont dans le même plan de front.

Représenter à part le solide commun. (Génératrices équidistantes sur les deux surfaces.) Développement.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours de 1896.*)

28. Intersection d'un cône et d'un cylindre. — A. Le cône est de révolution. Son sommet est projeté horizontalement en S et est situé à 200mm

au-dessus du plan horizontal. L'axe du cône est projeté horizontalement suivant la droit eSO. Le point O en est la trace horizontale. Le demi-angle au sommet du cône est de 15° (soit 1/6 d'angle droit).



On demande : 1° de déterminer, d'après ces données, l'ellipse base du cône sur le plan horizontal.

B Le cylindre est oblique ; sa base sur le plan horizontal est un cercle dont le centre est le point C, et dont le diamètre est de 115mm.

Ses génératrices sont inclinées à 45° sur le plan horizontal et en projection horizontale, elles sont perpendiculaires sur la projection horizontale de l'axe du cône.

On demande : 2° de déterminer l'intersection du cône et du cylindre, et de représenter en projection horizontale seulement (une projection verticale serait inutile) le cône entaillé par le cylindre ; on suppose, par conséquent, le cylindre enlevé.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1884.*)

29. 1° Un cône de révolution a pour sommet le point donné en S par sa projection horizontale. La cote de hauteur du point S de l'espace est de 200mm.

L'ellipse, base du cône sur le plan horizontal, a pour grand axe la droite *ab*, limitée aux points *a* et *b*.

On devra déterminer le petit axe de l'ellipse par la condition que le cône est de révolution.

2° Un cylindre oblique a pour base, sur le plan horizontal, le cercle de centre O (rayon = 65mm). Les génératrices ont, en projection horizontale, la direction SL. Dans l'espace elles sont déterminées par la condition que le cylindre et le cône ont un plan tangent commun dont la trace horizontale est indiquée approximativement en *mn* sur le croquis ci-contre.

On demande de déterminer l'intersection des deux surfaces et de figurer, en projection horizontale seulement, l'entaille faite par le cylindre dans le cône.

Le cylindre sera donc supposé enlevé.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1885.*)

30. Intersection de trois solides (Tétraèdre, cône et cylindre). — Un tétraèdre régulier, de 220^{mm} de côté, repose par sa base ABC sur le plan horizontal.

Soit S le sommet, lequel n'est pas sur le plan horizontal.

1° Un cylindre a pour directrice le cercle inscrit dans le triangle SAB de l'espace. Ses génératrices sont parallèles au côté horizontal AC.

2° Un cône a pour sommet le point B ; sa directrice est une hyperbole tracée dans le plan du triangle SAC, ayant pour asymptotes les deux droites SA et AC et l'un de ses sommets, réels, dans l'intérieur du triangle. Son demi-axe transverse possède dans l'espace une longueur de 70^{mm}. On demande de déterminer les intersections des trois solides en présence tétraèdre, cylindre et cône) et de figurer, en projection horizontale seulement, le tétraèdre duquel auront été enlevées les parties appartenant aux deux autres solides.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1887.*)

31. Le croquis ci-contre fait connaître au tiers de la grandeur de l'épure à exécuter, les données du problème.

(*a*) Le cylindre a son axe vertical : o est le pied de cet axe ; $o'o''$ en est la projection verticale ; le rayon de base est R.

(*b*) Le cône a pour sommet le point (s, s') et son axe est la droite $(sx, s'x')$; on remarquera que cet axe ne rencontre pas celui du cylindre.

En projection horizontale, une des deux génératrices de contour apparent, sa, du cône est tangente au cylindre ; cette condition suffit donc à déterminer le cône qui, d'ailleurs, est de révolution.

On demande de déterminer l'entaille faite par le cône dans le cylindre, c'est-à-dire :

1° de chercher l'intersection des deux surfaces ;

2° de représenter ensuite le cylindre seul, en supposant le cône enlevé.

Nota. — Pour trouver des génératrices du cône, on pourra déterminer une sphère inscrite dans ce cône et par le sommet (s, s') mener des droites tangentes à cette sphère. C'est une méthode ; mais on peut en employer d'autres.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1891.*)

32. Intersection d'un cône et d'un cylindre. — On prendra pour ligne de terre le petit axe de la feuille. Le cône a pour base dans le plan horizontal une parabole ayant pour sommet le point α ($x = -4^{cm}$, $y = 8^{cm}$), pour foyer le point φ ($x = -3^{cm}$, $y = 8^{cm}$). Le sommet du cône est le point (s, s') ($x = -4^{cm}$, $y = 8^{cm}$, $z = 4^{cm}$).

Le cylindre a pour base dans le plan horizontal une autre parabole de

sommet a ($x = 1^{cm}$, $y = 10^{cm}$) et pour foyer le point f ($x = 0$, $y = 10^{cm}$) ; la génératrice issue du sommet a passe par le point b ($x = -4^{cm}$, $y = 10^{cm}$, $z = 3^{cm}$).

Représenter le solide commun au cône et au cylindre en supposant les plans de projection transparents.

Indiquer à l'encre la construction pour obtenir un point, la tangente en ce point, et tous les points remarquables.

(*Ecole normale, concours de 1891.*)

CHAPITRE II

INTERSECTION D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE AVEC UNE SURFACE DE RÉVOLUTION

---

§ I. — *Surface de révolution et cône.*

495. Détermination d'un point de l'intersection. — Il y a deux cas à examiner suivant que le sommet du cône est sur l'axe ou n'est pas sur l'axe.

Dans le premier cas, *nous supposerons que l'on connaisse la méridienne de la surface*. On obtient alors un point quelconque de l'intersection en déterminant l'un des points de rencontre d'une génératrice du cône avec la surface de révolution. Ce problème a été résolu au n° 278.

Dans le second cas, *nous supposerons que la directrice du cône est une courbe plane située dans un plan perpendiculaire à l'axe*. On peut du reste toujours se ramener à ce cas en construisant d'abord, s'il y a lieu, la section faite dans le cône par un plan perpendiculaire à l'axe de la surface de révolution. Pour obtenir alors un point de l'intersection, on détermine l'un des points de rencontre du cône avec un parallèle de la surface. A cet effet on considère le cône auxiliaire qui a pour base ce parallèle et pour sommet celui du cône donné. Ces deux cônes ont des génératrices communes qu'on détermine en les coupant tous les deux par le plan de base du cône donné, plan qui coupe le cône auxiliaire suivant un cercle. Chacune de ces génératrices rencontre le parallèle en un point qui appartient à l'intersection.

Lorsque la directrice du cône donné est un cercle, au lieu de mener un cône auxiliaire par le parallèle, il est plus avantageux de couper la surface et le cône donné par le plan du parallèle. Ce plan coupe le cône donné suivant un cercle dont les points de rencontre avec le parallèle sont des points de l'intersection.

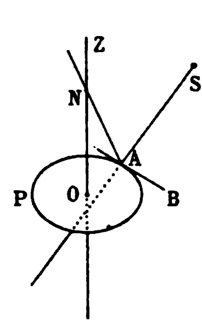
496. Construction de l'intersection. — Supposons d'abord que le sommet du cône soit sur l'axe. Pour construire l'intersection, on suppose qu'un point M décrive une seule fois, et dans un sens déterminé, toute la directrice du cône ; on détermine pour chaque position du point M les points de rencontre de la surface avec la génératrice du cône qui passe par M, et on joint ces points dans l'ordre où on les obtient.

Supposons maintenant que le sommet du cône soit quelconque. Pour construire l'intersection, dans ce cas, on suppose qu'un point M se déplace sur la directrice de la surface de révolution, et décrit cette directrice une seule fois dans un sens déterminé ; on détermine, pour chaque position du point M, les points de rencontre du cône avec le parallèle du point M, et on achève comme plus haut.

497. Tangente en un point courant de l'intersection. — La tangente en un point quelconque de l'intersection s'obtient en construisant l'intersection du plan tangent au cône et du plan tangent à la surface en ce point. On peut encore mener par ce point la perpendiculaire au plan des normales aux deux surfaces. Ceci suppose, bien entendu, que les plans tangents aux deux surfaces sont distincts.

498. Parallèles limites. — On appelle ainsi les parallèles de la surface de révolution qui sont tangents au cône. Voici comment on peut, théoriquement, parvenir à les déterminer :

Soient OZ l'axe de la surface de révolution, P un parallèle limite et A son point de contact avec le cône. Puisque le parallèle est tangent en A au cône, la tangente AB au parallèle est tangente au cône. Il en résulte que la normale AN menée en A à cette surface est dans le plan perpendiculaire à AB mené par A, c'est-à-dire dans le plan du méridien qui passe par le point A ; d'autre part, si SA est la génératrice du cône qui passe par A, la normale est dans le plan normal au cône suivant SA ; elle est donc à l'intersection de ce plan normal et du plan méridien qui passe par A.



D'après cela, imaginons que par chaque génératrice du cône on mène le plan normal au cône, que l'on prenne le point de rencontre I

de ce plan avec l'axe de la surface de révolution et que l'on mène par ce point la perpendiculaire IK à la génératrice du cône. Quand la génératrice varie, le pied K de cette perpendiculaire sur la génératrice décrit une ligne L tracée sur la surface du cône. Les points de rencontre de la ligne L et de la surface de révolution sont les points analogues au point A et fournissent les parallèles limites demandés.

Le problème se simplifie quand le point S, sommet du cône, est sur l'axe de révolution OZ. Dans ce cas en effet, si P est un parallèle limite et si A est le point de contact de ce parallèle et du cône, le plan normal au cône suivant la génératrice SA passe par l'axe OZ. On mènera donc par OZ les plans normaux au cône, et on prendra les points de rencontre de chaque génératrice d'incidence avec la surface de révolution. A chacun de ces points correspond un parallèle limite.

Ajoutons que si un point A de l'intersection est fourni par un parallèle limite, la tangente en A à ce parallèle étant située à la fois dans le plan tangent à la surface de révolution et dans le plan tangent au cône, coïncide avec la tangente en A à l'intersection des deux surfaces.

499. Autres parallèles remarquables. — Parmi les parallèles de la surface de révolution autres que les parallèles limites, il y a lieu de distinguer ceux qui passent par le sommet du cône ou qui rencontrent une génératrice multiple de cette surface. Ces parallèles n'existent que dans des cas particuliers; quand ils existent, leur détermination résulte de la définition. Il y en a au plus un de la première espèce, et il est situé dans le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône; le nombre des autres dépend du nombre des points de rencontre de la génératrice multiple du cône et de la surface de révolution : il en passe un par chacun de ces points.

Si un parallèle passe par le sommet du cône, ce point est un point double de l'intersection, et les tangentes sont évidemment les génératrices du cône situées dans le plan tangent à la surface de révolution au sommet du cône.

Si un parallèle rencontre une génératrice multiple du cône, le point de rencontre est un point multiple de l'intersection, et les tangentes en ce point s'obtiennent par la construction ordinaire (497).

500. Génératrices limites. — On appelle *génératrices limites* les génératrices du cône tangentes à la surface de révolution. Ce sont les

génératrices communes au cône donné et au cône de même sommet circonscrit à la surface.

Lorsqu'un point M de l'intersection est situé sur une génératrice limite, la tangente à l'intersection en ce point coïncide avec la génératrice limite, parce qu'elle est contenue à la fois dans les plans tangents en M aux deux surfaces. Il n'en est plus ainsi quand ces deux plans tangents coïncident; alors le point M est un point singulier de l'intersection.

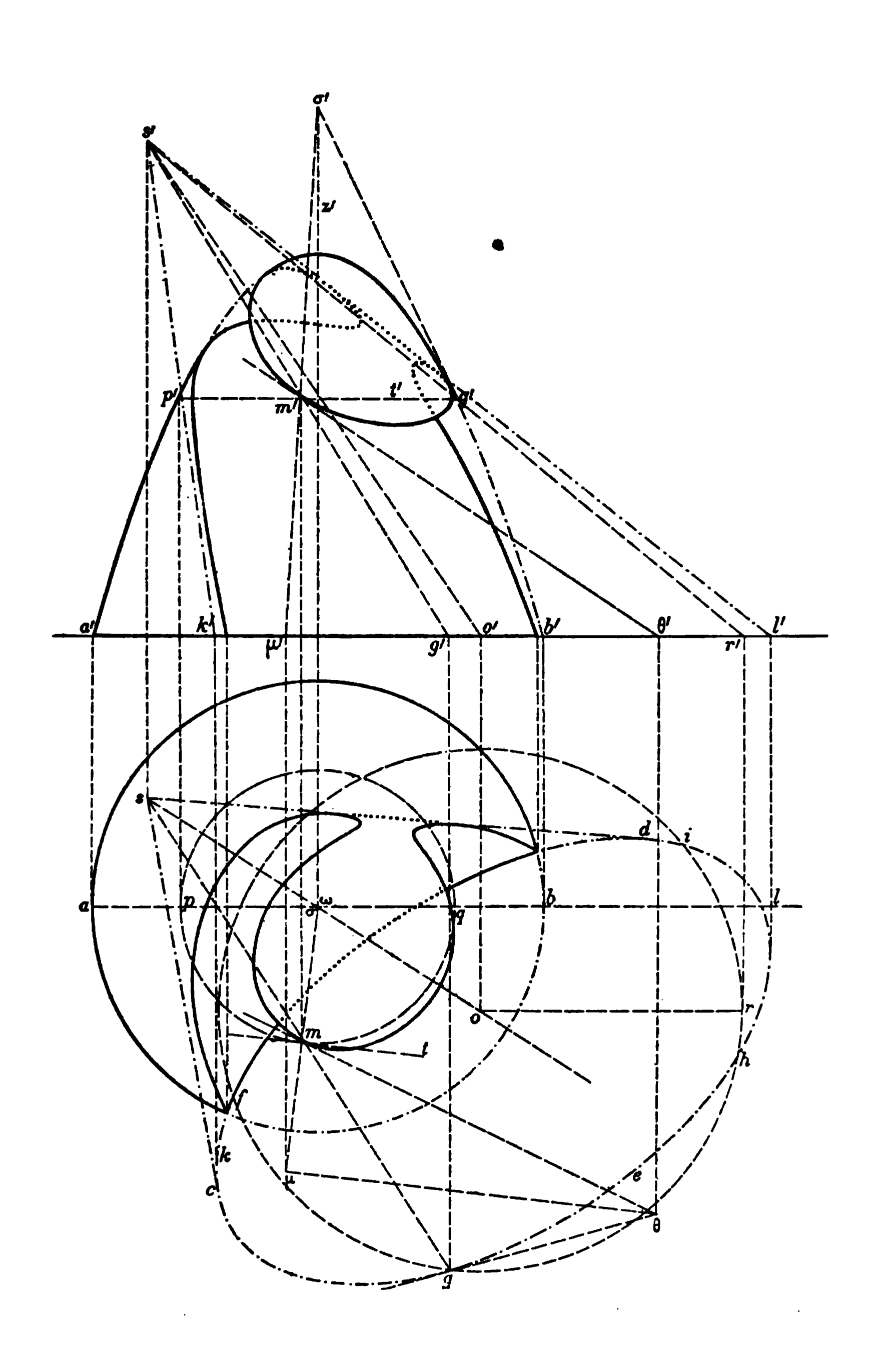
501. **Autres génératrices remarquables.** — Quand la surface de révolution a un parallèle double, ou que la méridienne a un point double situé sur l'axe, il peut exister des génératrices du cône rencontrant le parallèle double ou passant par ce point double de la méridienne. Il est indispensable de déterminer ces génératrices quand elles existent; leur détermination résulte d'ailleurs immédiatement de la définition. En raisonnant comme au n° 499, on voit aisément comment on peut obtenir la tangente en un point fourni par l'une de ces génératrices.

502. **Points à l'infini et asymptotes.** — Un point de l'intersection d'une surface de révolution et d'un cône ne peut être à l'infini que si le parallèle de ce point est à l'infini. Mais ce parallèle à l'infini se trouve sur le cône des directions asymptotiques ayant son sommet en un point quelconque de l'axe. Les points cherchés sont donc les mêmes que les points à l'infini de l'intersection d'un cône de directions asymptotiques et du cône donné.

D'ailleurs les plans tangents à la surface le long d'un parallèle à l'infini enveloppent le cône asymptote correspondant à ce parallèle, cône asymptote qui est égal à celui des directions asymptotiques. Comme la tangente en un point à l'infini, c'est-à-dire l'asymptote correspondant à ce point est l'intersection du plan tangent à la surface de révolution et du plan tangent au cône, on voit que, finalement, la détermination des points à l'infini et des asymptotes correspondantes se ramène à la résolution du même problème dans l'intersection du cône donné avec chacun des cônes asymptotes de la surface.

503. **Exemple I.** — *Intersection d'un paraboloïde de révolution et d'un cône.*

L'épure ci-contre relative à l'intersection d'un paraboloïde de révo-



s'
σ'
z'
p'
m'
t'
q'
a'
k'
μ'
g'
o'
b'
θ'
r'
l'
s
d
i
a
p
ω
q
b
l
o
r
m
t
h
f
k
c
μ
e
θ
g

lution et d'un cône a été exécutée d'après ces indications. Le paraboloïde est défini par sa méridienne principale ; son axe $\omega z'$ est vertical, et sa trace sur le plan horizontal est la circonférence ab. Le cône a pour sommet le point (s, s') et pour base l'ellipse cde située dans le plan horizontal.

Détermination d'un point de l'intersection. — Cherchons, par exemple, les points situés sur le parallèle projeté verticalement en $p'q'$. Pour cela, considérons le cône auxiliaire de sommet (s, s') et ayant pour base ce parallèle. Ce cône coupe le plan horizontal suivant une circonférence de centre o et de rayon or, circonférence qui rencontre la base du cône donné en quatre points, f, g, h, i. Par chacun de ces points il passe une génératrice commune aux deux cônes et rencontrant le parallèle $(pq, p'q')$ en un point qui appartient à l'intersection des deux surfaces. En prenant la génératrice $(sg, s'g')$, on obtient ainsi le point (m, m').

Tangente au point (m, m'). — On l'obtient en prenant l'intersection des plans tangents en (m, m') au paraboloïde et au cône. Le plan tangent au paraboloïde est défini par la tangente $(mt, m't')$ au parallèle du point (m, m') et par la tangente $(\sigma m, \sigma' m')$ à la méridienne du même point. Le plan tangent au cône est défini par la génératrice $(sg, s'g')$ et par la tangente $(g\theta, g'\theta')$ à la base. Les traces horizontales des deux plans tangents se coupant au point (θ, θ'), la tangente demandée est $(m\theta, m'\theta')$.

Points sur les contours apparents. — Les points sur le contour apparent vertical du paraboloïde n'ont pu être déterminés qu'approximativement et après le tracé de la courbe d'intersection. Quant aux points situés sur les génératrices de contour apparent du cône, on les a obtenus en déterminant, par la méthode indiquée au n° 458, les points de rencontre de ces génératrices avec le paraboloïde. Les constructions n'ont pas été conservées pour ne pas surcharger le dessin.

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté le paraboloïde entaillé par le cône, c'est-à-dire qu'on a enlevé du paraboloïde tout ce qui est intérieur au cône, et du cône tout ce qui est extérieur au paraboloïde limité au plan horizontal.

504. **Exemple II.** — *Intersection d'un tore et d'un cône ayant son sommet sur l'axe du tore* (École polytechnique, 1895).

Le tore, à axe vertical, est défini par sa méridienne. Le cône, de sommet (o, s'), est circonscrit à une sphère de centre (ω, ω'), tangente à l'axe du tore au point (o, π'). Le plan vertical $o\omega$ étant un plan de symétrie pour les deux corps est un plan de symétrie pour leur intersection ; de sorte que la droite $o\omega$ est un axe de symétrie de la projection horizontale de l'intersection.

Détermination d'un point de l'intersection. — On obtient ce point en cherchant l'un des points de rencontre du tore avec une génératrice du cône. Considérons, par exemple, la génératrice du cône projetée horizontalement en ok ; elle est tangente au petit cercle déterminé dans la sphère (ω, ω') par le plan vertical ok. Pour avoir ses points de rencontre avec le tore amenons-la, par une rotation, dans le plan de front qui contient l'axe. Dans ce mouvement le point k venant en k_0, le petit cercle déterminé dans la sphère se projette verticalement suivant la circonférence de diamètre $\pi' k'_0$ tangente à l'axe au point π' ; la génératrice du cône devient donc la droite projetée verticalement suivant la deuxième tangente à ce cercle menée par le point s', l'autre tangente étant confondue avec l'axe. Il en résulte que l'un des points de rencontre cherchés est projeté verticalement en m'_0 après la rotation ; on en déduit les projections m et m' avant la rotation par une opération inverse.

Tangente au point (m, m'). — C'est la perpendiculaire menée en ce point au plan des deux normales.

La normale au tore est projetée horizontalement en on_1, et le point n_1 est la projection horizontale du centre de la demi-méridienne qui passe par (m, m'). Pour avoir la normale au cône, considérons le point (o, l') de la génératrice verticale $(o, o's')$ situé à la même distance du sommet que le point (m, m'). Le point (o, l') étant situé, d'après cela, sur le même parallèle que le point (m, m'), la normale au cône au point (o, l') rencontre l'axe $(o\omega, s'\omega')$ de cette surface au même point que la normale en (m, m'). La normale en (o, l') étant projetée verticalement suivant la perpendiculaire à os' menée par l', on en conclut que le point (n, n') est le sommet du cône des normales, relatif au parallèle du point (m, m') ; par conséquent la normale au cône en (m, m') est projetée en $(mn, m'n')$. Ajoutons d'ailleurs que pour déterminer le point l' il suffit de prendre $s'l' = s'm'_0$.

Si on coupe le plan des deux normales par le plan horizontal qui

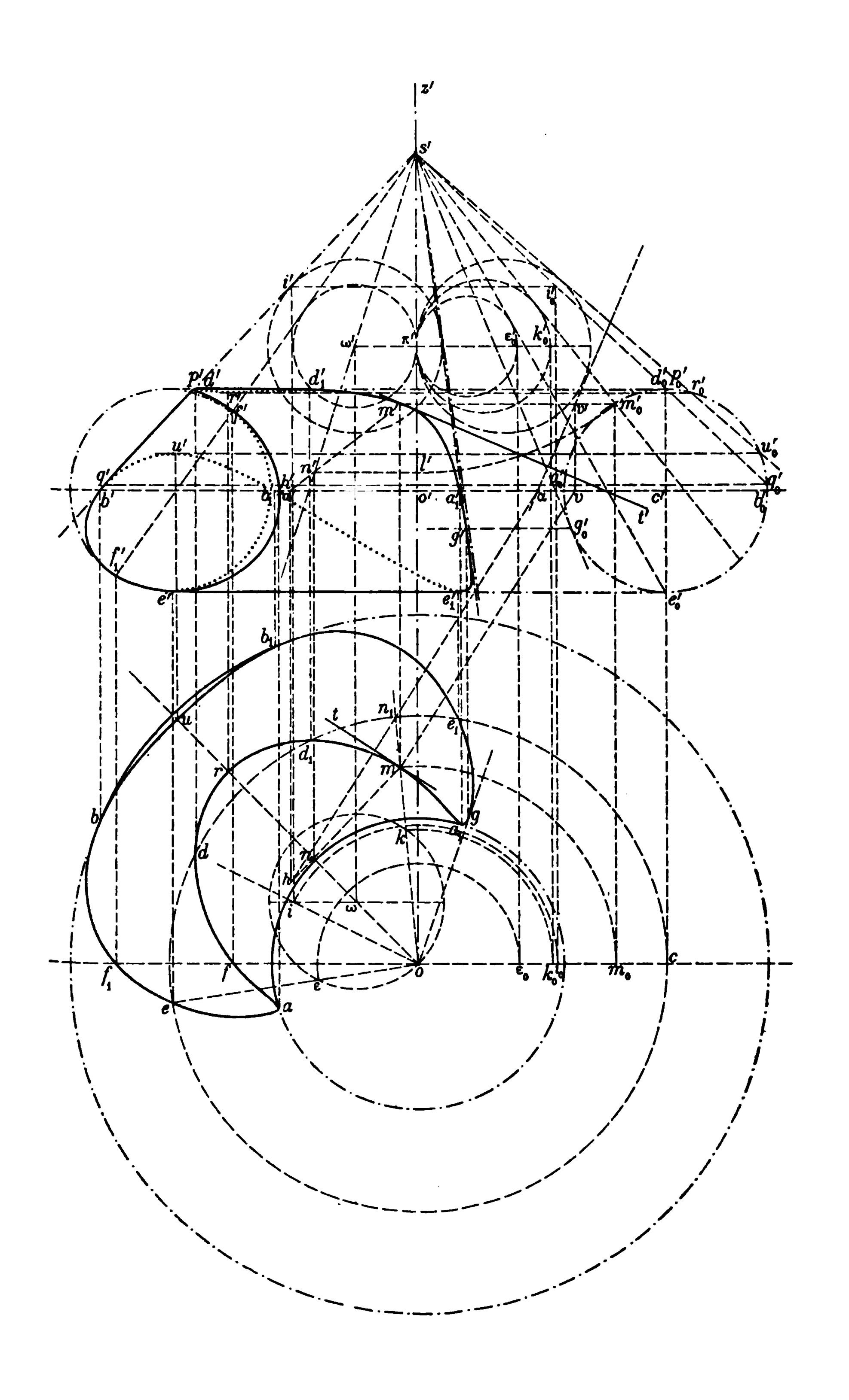
passe par le point (c, c'), on obtient une droite projetée horizontalement en hn_1 ; donc la tangente en m à la projection horizontale de l'intersection est la perpendiculaire mt menée à hn_1 par le point m. Supposons le plan des deux normales défini par l'horizontale du point (m, m') et par l'horizontale projetée en hn_1, puis coupons ce plan par le plan de front mené par c' ; nous obtenons ainsi une ligne de front projetée verticalement en xv', et la tangente en m' à la projection verticale de l'intersection est la perpendiculaire $m't'$ à xv' menée par le point m'.

Points sur les contours apparents du tore. — On voit d'abord que les points situés sur la demi-méridienne de front sont les points de rencontre de cette demi-méridienne avec la tangente $s'f'f'_1$ menée du point s' à la circonférence $\omega'\pi'$. Pour les autres, on observe qu'ils sont situés sur des parallèles du tore et que, si on les amène dans le plan du méridien principal par une rotation autour de l'axe, ils viennent en a'_0, b'_0, e'_0, d'_0. Pour obtenir, par exemple, le point projeté en e'_0 après la rotation, on remarque que la génératrice correspondante du cône est projetée elle-même en $s'e'_0$ et est tangente à un petit cercle de la sphère (ω, ω'), petit cercle dont la nouvelle projection verticale est une circonférence tangente à oz' en π' et tangente à $s'e'_0$; soit $\pi'\varepsilon'_0$ le diamètre de ce cercle ; en le reportant en $o\varepsilon$ sur le contour apparent horizontal de la sphère, on obtient facilement en (e, e') le point cherché.

Points sur le contour apparent vertical du cône. — On les obtient par la méthode générale, c'est-à-dire en déterminant les points de rencontre du tore avec la génératrice de contour apparent vertical du cône qui rencontre le tore. Il n'y a en effet sur le cône qu'une génératrice de contour apparent vertical rencontrant le tore, et elle donne deux points projetés verticalement en p' et en q'.

Génératrices limites. — Ce sont les génératrices du cône tangentes au tore, c'est-à-dire les génératrices communes au cône donné et aux cônes de sommet (o, s') circonscrits au tore. Un seul de ces cônes, celui qui correspond à la tangente $s'g'_0$, coupe le cône donné suivant deux génératrices dont l'une est projetée en $(og, s'g')$.

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté le solide commun aux deux corps. En projection horizontale, les parties vues du



solide commun sont la portion $adrd_1b_1uba$ de la surface du cône et les deux portions ara_1a et bub_1b de la surface supérieure du tore ; il en résulte que toutes les lignes qui restent en projection horizontale sont vues.

En projection verticale, les parties vues du solide commun sont la portion $p'a'e'q'$ de la surface du cône, et sur la surface du tore, la portion externe $e'f'$ et la portion interne $d'a'e'e'_1a'_1d'_1d'$; les autres lignes sont cachées.

Remarque. — En déterminant, par la méthode générale, les points situés sur la génératrice projetée horizontalement en $o\omega$, on obtient les points (u, u') et (r, r') en lesquels les tangentes à l'intersection sont horizontales.

§ II. — *Surface de révolution et cylindre.*

505. **Détermination d'un point de l'intersection.** — Nous distinguerons deux cas suivant que les génératrices du cylindre sont ou ne sont pas perpendiculaires à l'axe.

Dans le premier cas on obtient un point quelconque de l'intersection en déterminant les points de rencontre d'une génératrice du cylindre avec la surface de révolution. Pour cela, on coupe cette dernière surface par le plan perpendiculaire à l'axe mené par la génératrice. On obtient ainsi des parallèles dont les points de rencontre avec la génératrice sont des points de l'intersection.

Dans le second cas *nous supposerons*, comme pour le cône, *que la directrice du cylindre est une courbe plane située dans un plan perpendiculaire à l'axe*, cas auquel on peut du reste toujours se ramener en opérant comme pour le cône (495). Pour obtenir alors un point courant de l'intersection, on détermine un des points de rencontre d'un parallèle de la surface de révolution avec le cylindre. A cet effet, on cherche les génératrices communes au cylindre donné et à celui qu'on obtient en menant par les points du parallèle considéré les parallèles aux génératrices du premier. On détermine d'ailleurs les génératrices communes à ces deux cylindres en les coupant par le plan de base du cylindre donné, plan qui coupe le cylindre auxiliaire suivant un cercle. Par chaque point commun à ce cercle et à la directrice du cylindre donné il passe une génératrice commune aux deux cylindres.

Chacune de ces génératrices rencontre le parallèle de la surface en un point qui est l'un des points cherchés.

Si la directrice du cylindre était elle-même un cercle, situé dans un plan perpendiculaire à l'axe, l'emploi du cylindre auxiliaire deviendrait inutile; car, pour avoir les points de rencontre d'un parallèle de la surface avec le cylindre, il suffirait de couper par le plan de ce parallèle, plan qui coupe le cylindre suivant un cercle égal au cercle de base.

506. **Construction de l'intersection; tangente en un point.** — Pour construire la ligne d'intersection des deux surfaces, quand on en sait construire autant de points que l'on veut, on suppose qu'un point M se déplace sur la génératrice de la surface de révolution et décrit cette génératrice une seule fois dans un sens déterminé. On détermine les points de rencontre du cylindre avec le parallèle du point M et pour chaque position de ce point, puis on joint tous ces points dans l'ordre où ils ont été obtenus.

Quand les génératrices du cylindre sont perpendiculaires à l'axe, il peut être préférable de faire déplacer le point M sur la directrice du cylindre, de déterminer les points de rencontre de la surface de révolution avec la génératrice du cylindre qui passe par M et pour chaque position du point M, et de joindre les points dans l'ordre où ils ont été obtenus.

Comme pour toutes les surfaces, on obtient la tangente en un point de l'intersection en déterminant l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point, ou en menant par ce point la perpendiculaire au plan des deux normales.

507. **Parallèles limites.** — On les définit comme dans l'intersection d'une surface de révolution et d'un cône. On peut les déterminer en procédant comme dans ce cas. Pour s'en assurer, il n'y a qu'à se reporter au n° 498, et à supposer que le sommet du cône s'est éloigné à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre.

La tangente à l'intersection en un point fourni par un parallèle limite coïncide avec la tangente à ce parallèle (498).

508. **Génératrices limites.** — Ce sont les génératrices du cylindre tangentes à la surface de révolution; ce sont, par conséquent, les

génératrices communes au cylindre donné et au cylindre parallèle circonscrit à la surface de révolution.

Quand les génératrices du cylindre sont perpendiculaires à l'axe de la surface de révolution, la détermination des génératrices limites et celle des parallèles limites sont deux problèmes identiques.

509. **Points à l'infini et asymptotes.** — En raisonnant comme au nº 502, on voit que les points à l'infini de l'intersection d'une surface de révolution et d'un cylindre sont les mêmes que les points à l'infini de l'intersection du cylindre avec les divers cônes asymptotes de la surface, et il en est de même des asymptotes.

La détermination des points à l'infini et des asymptotes correspondantes est donc un problème déjà résolu (489).

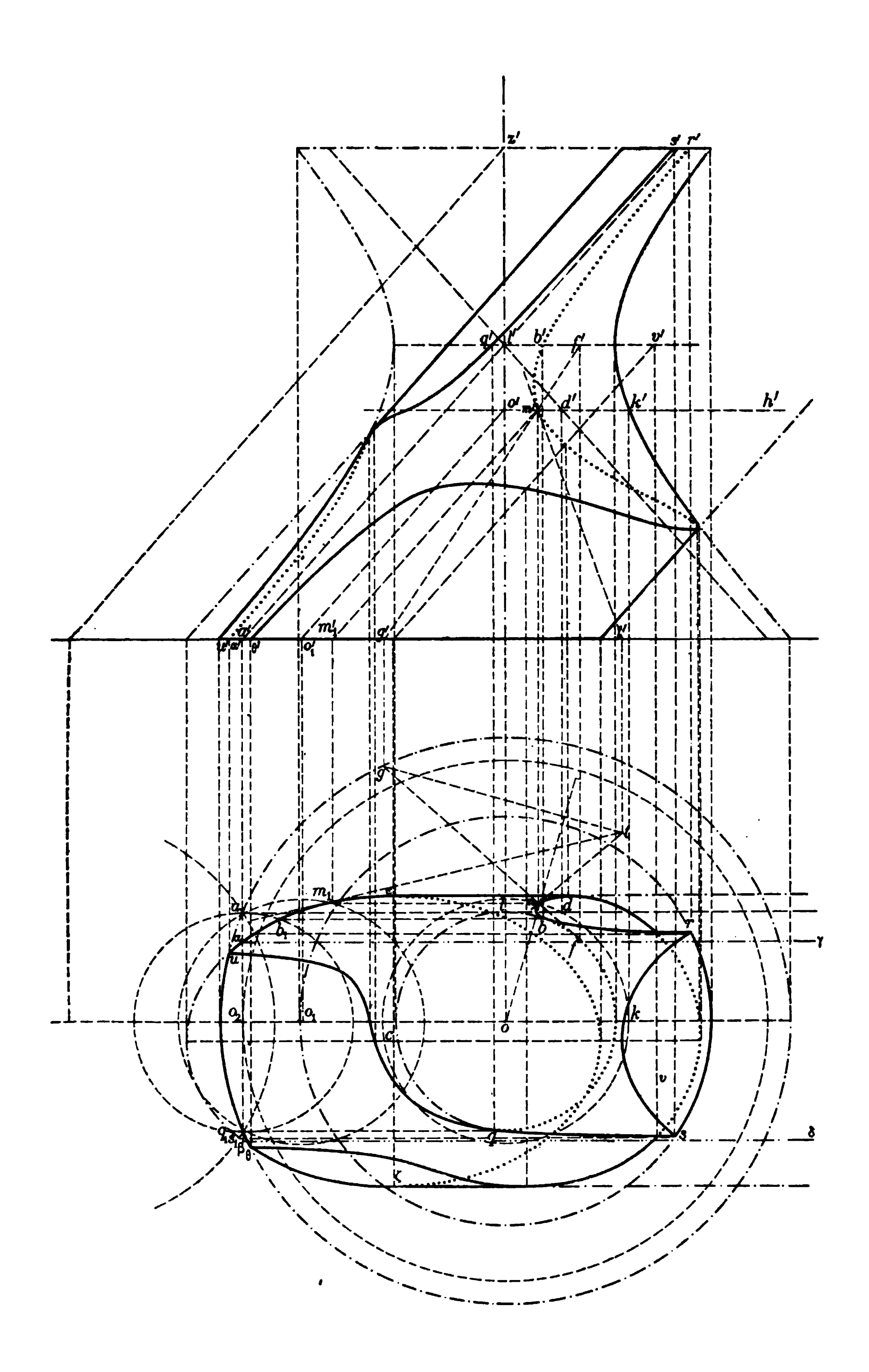
510. **Exemple.** — *Solide commun à un hyperboloïde de révolution et à un cylindre elliptique.*

L'hyperboloïde est défini par son axe $(o, o'z')$, qui est vertical, et par une génératrice de front $(al, a'l')$.

Le cylindre a pour base une ellipse de centre c dans le plan horizontal; l'un des axes de cette ellipse est parallèle à la ligne de terre, et les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite $(al, a'l')$.

Détermination d'un point de l'intersection. — Cherchons, par exemple, un point de l'intersection situé sur le parallèle dont le plan est le plan horizontal h'. Ce plan coupe l'axe de révolution au point (o, o'); il rencontre en (d, d') la deuxième génératrice de l'hyperboloïde située dans le même plan de front que $(al, a'l')$. Le point (d, d') engendre un parallèle qui rencontre le plan du méridien principal de l'hyperboloïde en des points tels que (k, k') : le point (k, k') est un point de la méridienne principale de l'hyperboloïde.

Considérons alors le cylindre auxiliaire parallèle au cylindre donné et qui a pour base le parallèle du point (d, d') ou, ce qui revient au même, du point (k, k'). La trace horizontale de ce cylindre auxiliaire est une circonférence égale au parallèle du point (k, k') et ayant pour centre le point (o_1, o'_1) trace horizontale de la parallèle aux génératrices menée par le point (o, o'). Cette circonférence passe évidemment par le point (a, a'), trace horizontale de la génératrice $(al, a'l')$; soit (m_1, m'_1) l'un de ses points de rencontre avec la base du cylindre



donné. La génératrice de ce cylindre qui passe par (m_1, m'_1) rencontre le parallèle du point (d, d') en un point (m, m') qui est un point de l'intersection des deux surfaces.

Tangente au point (m, m'). — La tangente en ce point est l'intersection du plan tangent à l'hyperboloïde et du plan tangent au cylindre donné. La trace horizontale du plan tangent au cylindre est la tangente en m_1 à la base de ce cylindre. Pour déterminer le plan tangent en (m, m') à l'hyperboloïde, menons du point m une tangente mf au cercle de gorge; cette droite est la projection horizontale d'une des génératrices de l'hyperboloïde qui se coupent au point (m, m'); sa projection verticale est $m'f'$, et la trace horizontale de $(mf, m'f')$ est le point (g, g'). En menant par g la parallèle gt à la tangente en m au parallèle de ce point, on obtient la trace horizontale du plan tangent à l'hyperboloïde au point (m, m'). Les traces horizontales des deux plans tangents se coupant au point (t, t'), on en conclut que $(mt, m't')$ est la tangente à l'intersection au point (m, m').

Points situés sur le cercle de gorge. — On les obtient par la méthode générale au moyen du cylindre auxiliaire qui a pour base le cercle d gorge. La trace horizontale de ce cylindre a pour centre le point o_2, passe par le point a et coupe l'ellipse base du cylindre donné aux points b_1 et q_1. On en déduit facilement les points cherchés (b, b') et (q, q').

Points situés dans les deux plans horizontaux qui limitent le solide commun. — Supposons que le solide commun soit limité au plan horizontal de projection et au plan horizontal mené par z'. On obtient encore les points situés sur le parallèle dont le plan passe par z', par l'emploi de la méthode générale : ces points sont (r, r') et (s, s').

Quant aux points situés sur la trace horizontale de l'hyperboloïde, ce sont les points (u, u') et (θ, θ') obtenus par l'intersection de la base du cylindre et de la trace horizontale de l'hyperboloïde.

Points sur le contour apparent vertical de l'hyperboloïde. — On a obtenu ces points en prenant les points de rencontre de l'hyperbole méridienne avec les génératrices du cylindre situées dans le plan du méridien principal : les constructions n'ont pas été conservées pour ne pas surcharger le dessin.

Points sur les contours apparents du cylindre. — Les points sur les

génératrices de contour apparent du cylindre ont été obtenus en déterminant les points de rencontre de ces génératrices avec l'hyperboloïde; pour la même raison que plus haut, les constructions n'ont pas été conservées.

D'ailleurs, pour déterminer les points de rencontre de l'hyperboloïde avec les génératrices de contour apparent du cylindre, on peut procéder comme pour déterminer un point quelconque de l'intersection. Imaginons en effet qu'un de ces points ait été déterminé, considérons le parallèle de ce point et projetons-le obliquement sur le plan horizontal en prenant comme direction des projetantes celle des génératrices du cylindre. Nous obtenons ainsi un cercle dont le centre est sur la ligne oo_1, et qui passe par le point a et par la trace horizontale de la génératrice de contour apparent du cylindre sur laquelle se trouve le point considéré. Ce cercle est donc déterminé et on en déduit facilement le parallèle dont il est la projection horizontale ainsi que le point cherché correspondant.

Il est bon d'observer que ces constructions permettent de résoudre le problème suivant : *Déterminer le point de rencontre à distance finie d'une droite parallèle à une génératrice de la surface gauche de révolution.*

Points à l'infini et asymptotes. — Pour avoir les points à l'infini, on peut remplacer l'hyperboloïde par son cône asymptote. Mais le cylindre ayant ses génératrices parallèles à une génératrice du cône asymptote, l'intersection présente un point double à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre (481). Les tangentes à l'intersection en ce point double à l'infini, c'est-à-dire les asymptotes, sont les génératrices qu'on obtient en coupant le cylindre par le plan tangent mené au cône asymptote suivant la génératrice qui est parallèle à celles du cylindre (490). Ce plan tangent est le plan de bout $\beta a'l'$; il coupe la base du cylindre aux points α et β. Les asymptotes cherchées sont donc projetées horizontalement en $\alpha\gamma$ et en $\beta\delta$, et verticalement en $a'l'$.

Ligne des points doubles en projection horizontale. — Elle est l'intersection du plan du cercle de gorge avec le plan qui contient les génératrices de contour apparent horizontal du cylindre et qui a pour trace horizontale $\varepsilon\zeta$. Ces deux plans sont de bout et se coupent suivant la ligne de bout (v, v'), qui est la ligne cherchée.

EXERCICES SUR LE CHAPITRE II

1. Trouver les sections circulaires d'un cône ayant pour base un cercle du plan horizontal et pour sommet un point du plan vertical.

2. Un cône de sommet (s, s') a pour base un cercle donné du plan horizontal. Construire le lieu des projections d'un point donné (a, a') sur les génératrices de ce cône ; tangente en un point.

3. Résoudre le même problème quand on remplace les génératrices du cône par ses plans tangents.

4. On donne un cercle dans le plan vertical et un axe vertical de son plan. Construire l'intersection du cylindre droit qui a pour base ce cercle et du tore engendré par le cercle en tournant autour de l'axe.

5. On donne, dans le plan horizontal, un cercle et une droite. Le cercle est la base d'un cône droit de hauteur égale au diamètre du cercle. La droite est l'axe autour duquel tourne le cercle pour engendrer un tore. Construire l'intersection des deux surfaces.

6. Construire l'intersection d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et d'un cône ayant sa base dans le plan horizontal, le sommet de ce cône étant un point quelconque.

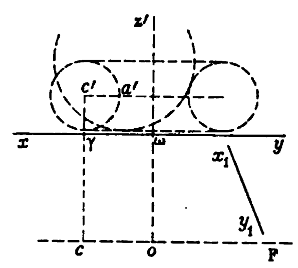
7. Construire l'intersection d'une sphère et d'un cylindre. La sphère est tangente au plan horizontal. La base du cylindre est dans le plan horizontal, et les génératrices font un angle de 45° avec le plan de la base.

8. Construire l'intersection d'une sphère et d'un cône ayant son sommet au centre de la sphère et sa base dans le plan horizontal ; trouver les points les plus hauts et les points les plus bas.

9. Construire l'intersection d'une sphère et d'un cône quelconque ; trouver les points les plus hauts et les plus bas, ainsi que les points doubles

apparents. Développer ensuite la surface latérale du cône sur un plan, et construire la transformée de l'intersection des deux surfaces.

10. Ligne de terre parallèle au grand côté du cadre et à une distance du bord inférieur égale à 190^{mm}. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}.



Un tore dont l'axe $(o, \omega z')$ est vertical est engendré par une circonférence située dans le plan de front F.

$x\omega = 135^{mm}$, $\omega o = 93^{mm}$, $\gamma\omega = 60^{mm}$, $c'a' = 30^{mm}$, $c'\gamma = 34^{mm}$.

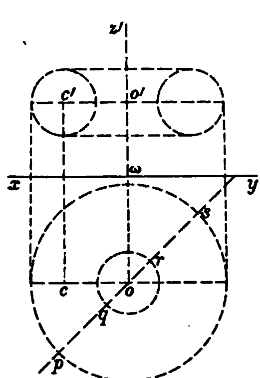
Un cylindre de révolution dont les génératrices sont perpendiculaires au plan vertical a pour base dans le plan vertical un cercle de 60^{mm} de rayon tangent extérieurement à la circonférence méridienne de droite du tore et à la projection verticale du parallèle inférieur.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du tore et du cylindre ;

2° de représenter la partie du tore supposé plein extérieure au cylindre ;

3° de trouver la projection du solide sur un plan vertical dont la trace horizontale x_1y_1 est parallèle à la droite joignant le point o au point le plus bas de l'intersection qui est le plus voisin de xy. La distance de o à x_1y_1 est égale à 160^{mm}. (R. Malloizel).

11. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



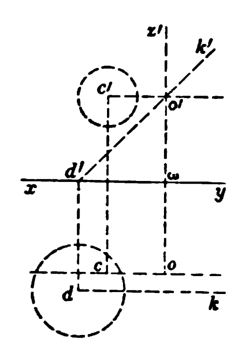
$(o, \omega z')$ est l'axe d'un tore engendré par la circonférence de front (c, c') dont le rayon a 3^{cm} ; $\omega o' = 7^{cm}$, $o'c' = 6^{cm}$, $o\omega = 10^{cm}$.

Par o je mène la droite $pqrs$ faisant 45° avec xy ; le plan vertical passant par cette droite coupe le tore suivant deux cercles pq, rs. Je mène au cercle pq une tangente extérieure au tore faisant 50° avec le plan horizontal, et je prends sa trace horizontale g. Je mène au cercle rs une tangente intérieure au tore parallèle à la précédente et je prends sa trace horizontale h. Sur gh comme diamètre je décris une circonférence qui est la trace horizontale d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles aux tangentes à pq et à rs.

On demande de représenter le tore entaillé par le cylindre.

(R. Malloizel).

12. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



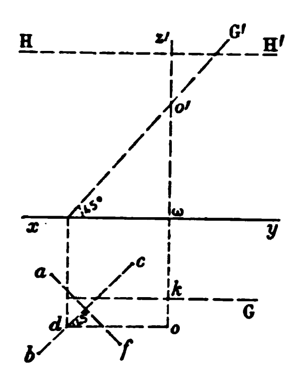
Un tore dont l'axe $(o, \omega z')$ est vertical, $\omega o = 90^{mm}$, ω étant le milieu de la feuille, est engendré par la circonférence (c, c') de rayon 29^{mm} située dans le plan de front passant par l'axe, $\omega o' = 83^{mm}$, $o'c' = 56^{mm}$.

Un cylindre a pour base dans le plan horizontal un cercle (d, d') dont le rayon est 44^{mm}, $dd' = 107^{mm}$, $d'\omega = 84^{mm}$. Les génératrices sont parallèles à la droite de front $(dk, d'k')$; $d'k'$ est obtenue en joignant les points d' et o'.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du tore et du cylindre ; 2° de représenter le solide commun. (R. Malloizel).

13. Cadre 29^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.

Une surface de révolution est engendrée par la droite de front (G, G') faisant un angle de 45° avec le plan horizontal.



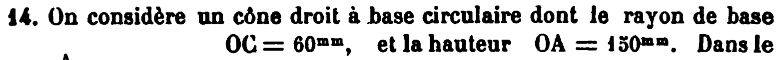
L'axe de cette surface est la ligne verticale $(o, \omega z')$.

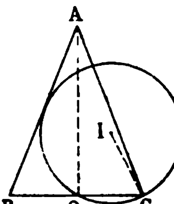
$x\omega = \omega y$, $\omega o = 11^{cm}$, $\omega o' = 10^{cm}$, $ok = 3^{cm}$.

Un cylindre a ses génératrices parallèles à (G, G') et pour base dans le plan horizontal une ellipse ainsi définie : par le point d trace de la génératrice de front od du cône asymptote de l'hyperboloïde, on mène une droite bc faisant 45° avec do, on prend $bd = 4^{cm}$, $dc = 9^{cm}$; b et c sont les sommets de l'ellipse ; le petit axe af est d'ailleurs égal à 10^{cm}.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection de la surface gauche de révolution et du cylindre ; 2° de représenter le solide commun limité au plan horizontal de projection et à un plan horizontal de cote 17^{cm}.

(R. Malloizel).


14. On considère un cône droit à base circulaire dont le rayon de base $OC = 60^{mm}$, et la hauteur $OA = 150^{mm}$. Dans le plan méridien ABC, on trace la circonférence passant par les deux points O et C, tangente au côté AB, et dont le centre I se trouve, par rapport à BC, du même côté que A.



Tracer, sur le plan de la base du cône et sur le plan méridien ABC, les projections de l'intersection de la surface du cône et de la surface de la sphère de centre I et de rayon IC.

(*École navale, concours de 1896*).

CHAPITRE III

INTERSECTION DE DEUX SURFACES DE RÉVOLUTION

---

§ I. — *Intersection de deux sphères ; points communs à trois sphères.*

511. **Intersection de deux sphères.** — L'intersection de deux sphères, quand elle existe, est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à la ligne des centres. Ce plan est déterminé quand on en connaît un point, puisqu'il suffit de mener par ce point le plan perpendiculaire à la ligne des centres. D'ailleurs quand on connaît le plan de la courbe d'intersection, la détermination de cette intersection se ramène à celle d'une section plane de l'une des deux sphères, problème déjà résolu.

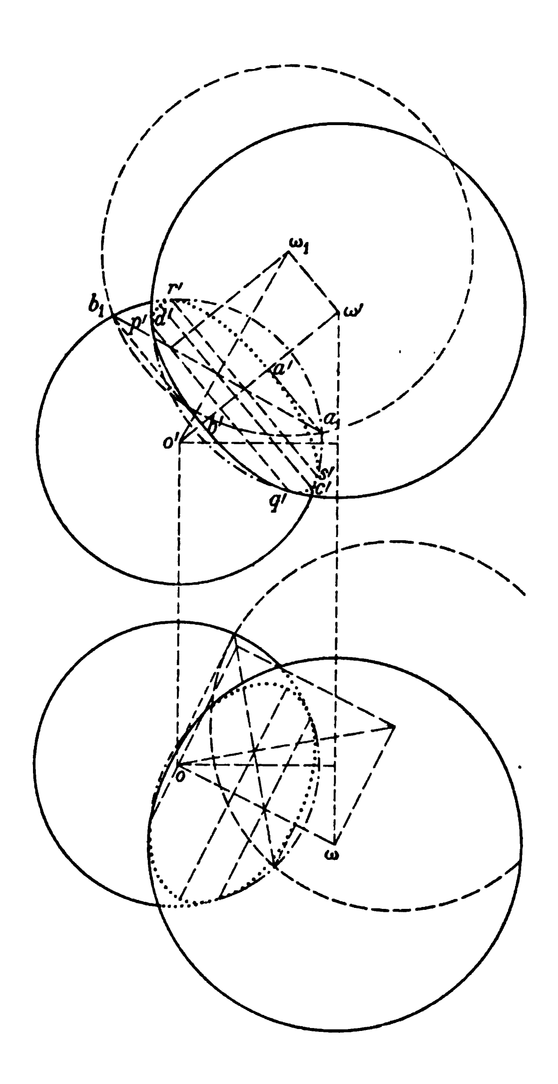
On peut déterminer cette intersection par points et par tangentes. Pour la déterminer par points, il suffit de couper les deux sphères soit par des plans horizontaux, soit par des plans de front.

Pour trouver la tangente en un point, il suffit de construire l'intersection des plans tangents aux deux sphères en ce point.

Il vaut mieux déterminer les projections de l'intersection en construisant leurs axes. C'est la méthode qui a été suivie pour l'exécution de l'épure ci-après. Les centres des deux sphères sont projetés en (o, o') et en (ω, ω'). Pour déterminer les axes de la projection verticale, on a pris comme plan horizontal le plan de bout mené par $o'\omega'$, et on a rabattu sur le plan de front passant par (o, o'). De cette manière, le plan du cercle d'intersection est un plan vertical projeté horizontalement en a_1b_1 dans le nouveau système. On en conclut que le petit axe de la

projection verticale est $a'b'$, et que le grand axe, égal en grandeur à a_1b_1, est $c'd'$.

L'épure indique aussi les constructions qu'on a effectuées pour obtenir les points r' et s' situés sur le contour apparent de la sphère

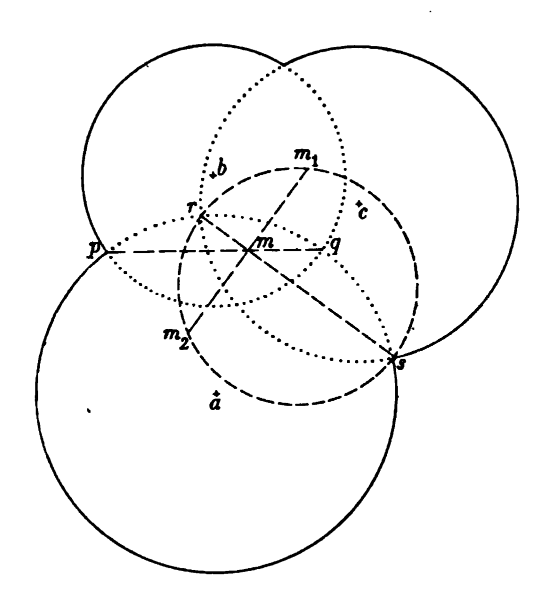


(o, o') sur le plan vertical, ainsi que pour obtenir les points p' et q' situés sur le contour apparent de la sphère (ω, ω') sur le même plan.

On a construit d'une manière analogue la projection horizontale de l'intersection.

Pour faire la ponctuation, on a enlevé de chaque sphère ce qui est intérieur à l'autre.

512. Points communs à trois sphères. — Lorsque trois sphères se coupent, elles se coupent en deux points symétriquement placés par rapport au plan des centres. Pour obtenir ces deux points on détermine l'intersection des deux premières sphères, puis l'intersection de la première et de la troisième, et l'on prend les points communs aux deux cercles ainsi obtenus : ce sont les points cherchés.



Pour exécuter l'épure on a pris comme plan horizontal le plan des centres, cas auquel on peut toujours se ramener par un rabattement. Les contours apparents des trois sphères sur le plan horizontal ont pour centres respectifs les points *a*, *b*, *c*. L'intersection des sphères *a* et *b* est projetée horizontalement en *pq* ; celle des sphères *a* et *c* est projetée horizontalement en *rs* ; de sorte que les points communs aux trois sphères sont projetés horizontalement au point d'intersection *m* de *pq* avec *rs*. On achève de déterminer les points communs en cher-

chant leurs cotes par rapport au plan des centres. A cet effet on a rabattu le cercle rs qui les contient sur le plan horizontal. Les points cherchés sont ainsi rabattus en m_1 et en m_2, ce qui fournit, en mm_1 et en mm_2, les cotes de ces points.

L'épure n'indique que les projections horizontales.

§ II. — *Intersection de deux surfaces de révolution autour du même axe ; points de rencontre d'une droite et d'une surface gauche de révolution.*

513. Intersection de deux surfaces de révolution autour du même axe. — Si l'on appelle M un point quelconque de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes coïncident, il est clair que le parallèle du point M est un parallèle commun aux deux surfaces. Il en résulte que l'intersection de ces surfaces est un système de parallèles. Ces parallèles sont déterminés dès que l'on connaît un point de chacun d'eux. Les méthodes employées pour obtenir ces points dépendent de la manière dont les surfaces sont définies.

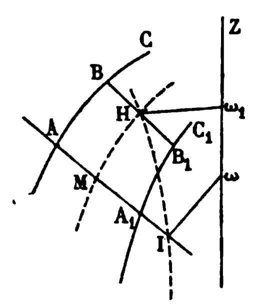
Lorsque les deux surfaces sont définies par leurs méridiennes situées dans le même plan, on obtient des points communs, et par suite les parallèles communs aux deux surfaces, en prenant les points communs aux demi-méridiennes respectives.

Si les surfaces sont définies d'une manière quelconque, on peut se ramener au cas précédent en coupant les deux surfaces par un plan méridien.

Enfin, si l'une des surfaces est une surface gauche de révolution, on obtient les parallèles communs en déterminant les points de rencontre de la première surface avec la génératrice rectiligne de la surface gauche. On est ainsi ramené à la détermination des points de rencontre d'une droite et d'une surface de révolution, problème qui a déjà été résolu (278).

Lorsque les deux surfaces de révolution sont quelconques, on peut encore trouver les parallèles communs par un procédé analogue à celui qui a été exposé au n° 275 pour trouver les points doubles de la méridienne d'une surface de révolution. Supposons en effet que l'on se propose de déterminer les parallèles communs aux surfaces de révo-

lution engendrées par deux lignes quelconques C et C_1 tournant autour du même axe Z. Considérons, pour cela, une droite mobile AA_1, assujettie aux conditions suivantes : 1° elle s'appuie sur C et sur C_1 ; 2° elle demeure perpendiculaire à l'axe. Soit ω l'intersection de l'axe avec le plan mené par AA_1 perpendiculairement à Z, c'est-à-dire le pied sur l'axe de la perpendiculaire commune à l'axe et à la droite AA_1, et soient A et A_1 les points de rencontre respectifs de AA_1 avec C et avec C_1. Il est clair que si A et A_1 sont situés sur un parallèle commun aux deux surfaces, le point ω est à égale distance de A et de A_1 ; par suite, le milieu de AA_1 coïncide avec le pied de la perpendiculaire à AA_1 menée par ω. Or, soient M et I le milieu de AA_1 et le pied de la perpendiculaire menée sur AA_1 par ω, c'est-à-dire le pied sur AA_1 de la perpendiculaire commune à cette droite et à l'axe. Quand AA_1 se déplace, elle engendre une surface réglée ; le point M et le point I décrivent deux lignes de cette surface, et si H est un point commun à ces deux lignes, la position correspondante de AA_1 passe par deux points B et B_1 situés sur le même parallèle ; car si l'on mène du point H le plan perpendiculaire à Z rencontrant l'axe au point ω_1 et coupant les lignes C et C_1 aux points respectifs B et B_1, le point H est à la fois le milieu de BB_1 et la projection de ω_1 sur BB_1.

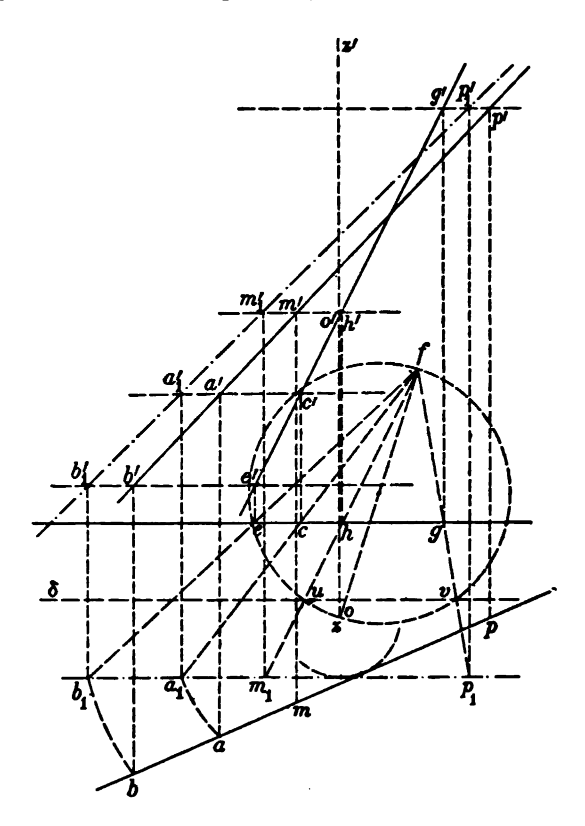


514. Méthode de Dulau pour déterminer les points de rencontre d'une surface gauche de révolution et d'une droite. — Cette méthode est une application immédiate des considérations qui précèdent.

Proposons-nous en effet de déterminer les points de rencontre de la droite $(ab, a'b')$ avec l'hyperboloïde engendré par la droite $(cg, c'g')$ tournant autour de l'axe vertical $(oz, o'z')$. Cela revient, ainsi qu'on l'a déjà vu à plusieurs reprises, à trouver les parallèles communs à cet hyperboloïde et à celui qui est engendré par $(ab, a'b')$ en tournant autour du même axe. On peut d'ailleurs évidemment remplacer $(ab, a'b')$ par la droite $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ obtenue en rendant la première de ces deux droites de front par une rotation autour de $(oz, o'z')$.

Appliquons alors la remarque faite plus haut, et considérons la surface engendrée par une horizontale s'appuyant sur $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ et sur

$(cg, c'g')$. Cette surface est un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est le plan horizontal et dont l'autre plan directeur, parallèle aux deux directrices, est le plan de front mené par $(oz, o'z')$. Il y a donc, sur ce paraboloïde, une génératrice de même système que $(cg, c'g')$ et qui est verticale. Elle est rencontrée par les génératrices de l'autre système, c'est-à-dire par les génératrices horizontales ; de sorte



que les projections horizontales des génératrices horizontales passent par un point fixe. Pour obtenir ce point fixe, il suffit de construire les projections horizontales de deux de ces génératrices, celles qui sont projetées verticalement en b'_1e' et en a'_1c', par exemple, ce qui donne le point f.

Sur ce paraboloïde hyperbolique le lieu des milieux des portions de génératrices horizontales comprises entre $(a_1b_1, a'_1b'_1)$ et $(cg, c'g')$ est une droite, dont la projection horizontale δ est équidistante de a_1b_1 et

de cg. D'autre part, le lieu des pieds des perpendiculaires communes aux génératrices horizontales et à l'axe $(oz, o'z')$ a pour projection horizontale le lieu des pieds des perpendiculaires menées du point o aux projections horizontales de ces génératrices, c'est-à-dire la circonférence décrite sur of comme diamètre. Ces deux lignes, la circonférence décrite sur of comme diamètre et la droite δ, se coupant en u et en v, les génératrices du paraboloïde projetées horizontalement en fu et en fv sont celles qui sont situées dans les plans des parallèles communs cherchés. Ces parallèles sont donc décrits : le premier par le point (h, h') ou par le point (m_1, m'_1) ; le deuxième par le point (g, g') ou par le point (p_1, p'_1).

On a donc en (m, m') et en (p, p') les points de rencontre cherchés de la droite $(ab, a'b')$ avec l'hyperboloïde engendré par $(cg, c'g')$.

§ III. — *Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans le même plan.*

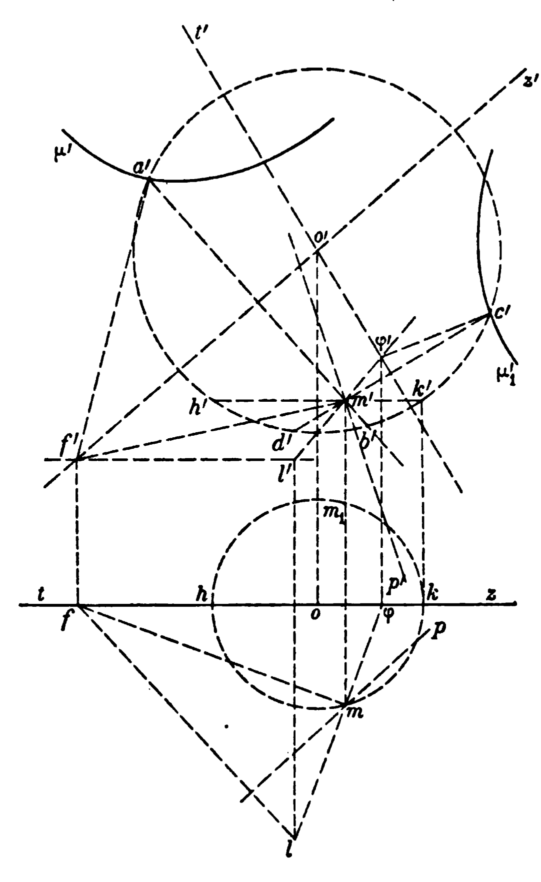
515. **Construction des points de l'intersection.** — Pour construire l'intersection de deux surfaces de révolution, on considère chaque surface ou l'une des surfaces comme engendrée par ses parallèles et l'on détermine les points de rencontre des parallèles tracés sur l'une des surfaces avec l'autre. Par conséquent, pour obtenir un point quelconque de l'intersection, on détermine un des points de rencontre d'un parallèle de la première surface avec la deuxième; pour obtenir toute l'intersection, on suppose qu'un point décrive une fois la directrice de la première surface et, pour chaque position de ce point, on détermine les points de rencontre du parallèle correspondant et de l'autre surface.

Tout revient donc à déterminer les points de rencontre de la deuxième surface avec un parallèle quelconque, P, de la première. Pour cela, il y a deux cas à examiner suivant que les deux axes de révolution, *qu'on suppose dans le même plan*, sont ou ne sont pas parallèles.

1° Si ces axes sont parallèles, on coupe les deux surfaces par le plan du parallèle P ; ce plan coupe la deuxième surface suivant des parallèles dont les points de rencontre avec le parallèle P sont les points demandés.

2° Si les axes ne sont pas parallèles, on coupe les deux surfaces par une sphère auxiliaire passant par le parallèle P et ayant pour centre le point de rencontre des axes. Cette sphère coupe la deuxième surface suivant des parallèles dont les points de rencontre avec P sont les points demandés.

D'ailleurs, dans les deux cas, pour effectuer simplement les constructions auxquelles on est conduit par l'application de la méthode, il



est indispensable que le plan des axes soit parallèle à l'un des plans de projection. Si cette condition n'était pas remplie, il y aurait tout avantage, en général, à s'y ramener par un changement de plan, ou autrement.

Dans l'épure ci-dessus, les axes $(oz, o'z')$ et $(ot, o't')$ sont situés dans

le même plan de front, et les méridiennes principales sont projetées verticalement en μ' et en μ'_1. La sphère auxiliaire passant par le parallèle $a'b'$ de la première surface a pour contour apparent sur le plan vertical la circonférence de centre o' et passant par le point a'. Cette circonférence rencontre μ' en des points tels que c' ; au point c' correspond un parallèle de la deuxième surface projeté verticalement en $c'd'$. Les deux parallèles projetés en $a'b'$ et en $c'd'$ se rencontrent en deux points projetés verticalement à l'intersection m' de $a'b'$ et de $c'd'$. Ces deux points appartiennent à l'intersection des deux surfaces.

Pour déterminer leurs projections horizontales, on observe qu'ils sont sur la sphère auxiliaire ; dès lors ils sont sur le cercle déterminé dans cette sphère par le plan horizontal mené par m', cercle qui est projeté en $(hk, h'k')$. Il en résulte que les points de l'intersection qui sont projetés verticalement en m' sont projetés horizontalement en m et en m_1.

Il faut observer que le point m' n'est pas toujours la projection verticale de deux points réels de l'intersection. Pour qu'il soit la projection verticale de deux points réels de l'intersection, il faut en effet qu'il soit à l'intérieur du cercle de contour apparent de la sphère auxiliaire sur le plan vertical, puisque les deux points de l'intersection dont il est la projection sont situés sur cette sphère. Le lieu des points m' situés à l'extérieur des contours apparents des sphères auxiliaires correspondantes s'appelle la partie *parasite* de la projection verticale de l'intersection. Chacun de ces points est la projection verticale de deux points imaginaires conjugués de l'intersection et symétriques par rapport au plan des axes, de sorte que la droite qui les joint est réelle.

516. **Tangente en un point de l'intersection.** — On peut obtenir la tangente en un point quelconque de l'intersection, soit en la considérant comme l'intersection des plans tangents aux deux surfaces en ce point, soit en menant par ce point la perpendiculaire au plan des deux normales. C'est la dernière méthode qui est généralement préférable, et c'est celle qui a été adoptée pour construire la tangente au point (m, m') dans la figure précédente. Pour déterminer le plan des deux normales, on a mené la normale en a' à la méridienne μ' et la normale en c' à la méridienne μ'_1 ; de sorte que le cône des normales relatif au parallèle de la première surface projeté en $a'b'$ a son som-

met en (f, f'), tandis que le cône des normales relatif au parallèle de la deuxième surface projeté en $c'd'$ a son sommet en (φ, φ'). Les normales en (m, m') aux deux surfaces sont donc projetées en $(mf, m'f')$ et en $(m\varphi, m'\varphi')$. Comme $(f\varphi, f'\varphi')$ est une ligne de front du plan de ces deux droites, la projection verticale de la tangente en (m, m') à l'intersection est la perpendiculaire $m'p'$ à $f'\varphi'$. Une horizontale du même plan étant $(fl, f'l')$, la projection horizontale de la même tangente est la perpendiculaire mp à fl.

517. **Sphères limites et parallèles limites.** — La sphère auxiliaire à l'aide de laquelle on détermine les points de rencontre de la deuxième surface avec un parallèle P de la première, coupe en général la deuxième surface suivant plusieurs parallèles. Quand deux de ces parallèles sont confondus, c'est-à-dire quand la sphère auxiliaire est inscrite dans la deuxième surface, on l'appelle une *sphère limite* pour cette surface. Le parallèle P s'appelle alors un *parallèle limite.*

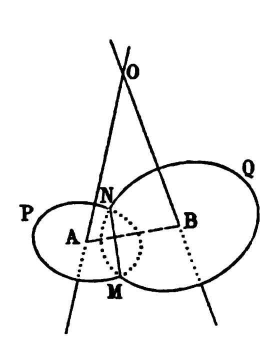
En vertu de cette définition, le rayon d'une sphère limite est égal à la longueur d'une normale menée par le point de rencontre des axes à l'une quelconque des deux surfaces. Suivant qu'on mène une normale à la première ou à la deuxième surface, on a une sphère limite pour la première ou pour la deuxième surface. Il n'y a pas lieu de considérer comme sphères limites celles qui correspondent aux normales confondues avec l'axe de révolution, puisque les parallèles de contact sont des parallèles de rayons nuls.

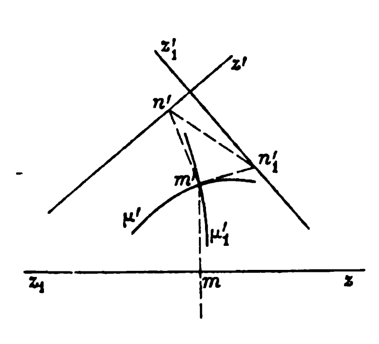
Supposons que P soit un parallèle limite pour l'une des surfaces et que le parallèle de contact de la sphère limite correspondante et de l'autre surface rencontre le parallèle P en un point M. En ce point la tangente à l'intersection des deux surfaces coïncide avec la tangente au parallèle limite. En effet, cette droite est tangente à la première surface puisqu'elle est tangente au parallèle P de cette surface ; elle est de plus tangente à la deuxième surface, puisque le plan tangent en M à cette surface coïncide avec le plan tangent en M à la sphère auxiliaire, et que, d'autre part, la sphère auxiliaire contient le parallèle P. Elle est donc bien tangente aux deux surfaces et, par suite, à leur intersection.

Parmi les sphères dont le centre est le point de rencontre des axes et qui coupent l'une des surfaces suivant deux parallèles confondus, se

trouvent les sphères qui passent par les parallèles doubles de l'une ou de l'autre surface, quand il y en a. Ces sphères ne sont pas des sphères limites, mais il importe néanmoins de les déterminer et de construire les points qui les fournissent, et qui sont évidemment des points doubles de l'intersection. Les tangentes en ces points s'obtiennent d'ailleurs par la méthode habituelle.

On peut considérer un parallèle limite d'une des surfaces comme un parallèle qui rencontre l'autre surface en deux points confondus. A ce point de vue il existe des parallèles limites autres que ceux qui sont fournis par les sphères limites. Si nous revenons en effet à la construction des points de l'intersection qui sont situés sur un parallèle P de la première surface, ces points sont situés deux à deux sur des parallèles de la deuxième surface. Or, soit Q un parallèle de cette surface rencontrant en M et en N le parallèle P. Ces points sont symétriques par rapport au plan AOB des deux axes, et ils sont confondus quand les deux parallèles P et Q sont tangents ; de sorte que P et Q sont alors deux parallèles limites du second genre. Il est clair, du reste, que si les deux parallèles P et Q sont tangents, le plan normal à ces deux parallèles au point où ils se touchent n'est autre que le plan des axes, et, par suite, leur point de contact est un point commun aux deux méridiennes.





Supposons, pour fixer les idées, que le plan des axes soit de front, et soit m' la projection verticale d'un point commun aux deux méridiennes principales, de sorte que (m, m') est un point de l'intersection des deux surfaces. Au point (m, m') la tangente à l'intersection étant de bout, la tangente en m' à la projection verticale de l'intersection n'est plus la projection verticale de la tangente. Mais si l'on appelle n' et n'_1 les points de rencontre des axes avec les normales en m' aux méridiennes respectives, la tangente

en m' à la projection verticale de l'intersection s'obtient, dans le cas général, en menant du point m' la perpendiculaire à $n'n'_1$. Cette construction est donc valable dans le cas où le point m' est un point commun aux deux méridiennes. On s'en assure sans difficulté par des considérations de limites, déjà données dans une autre circonstance (494).

On peut observer, à ce sujet, que si une perpendiculaire au plan des axes se déplace en s'appuyant sur l'intersection, comme l'intersection est symétrique par rapport au plan des axes elle la rencontre en deux points symétriques par rapport à ce plan. Si ces deux points, supposés d'abord imaginaires conjugués, deviennent réels, au moment du passage ils sont confondus avec un point du plan des axes et appartenant nécessairement aux deux méridiennes. Si donc on suppose, par exemple, que les axes soient de front, la projection verticale de l'intersection réelle et la partie parasite se rejoignent en des points situés sur les méridiennes. Elles admettent du reste les mêmes tangentes en ces points, de telle sorte qu'elles sont des arcs de la même courbe.

518. **Points à l'infini et asymptotes.** — Pour qu'un point de l'intersection s'éloigne à l'infini, il faut que les parallèles des deux surfaces qui passent par ce point s'éloignent eux-mêmes à l'infini. Ils sont alors à l'infini sur les cônes asymptotes ou, plutôt, sur les cônes des directions asymptotiques relatifs aux deux surfaces. Les directions des points à l'infini dans l'intersection de deux surfaces de révolution sont donc les mêmes que les directions des points à l'infini dans l'intersection des cônes directeurs ou cônes des directions asymptotiques.

En un point à l'infini le plan tangent à une surface de révolution étant confondu avec le plan tangent au cône asymptote (cône qui est à distance finie ou infinie), pour trouver les asymptotes qui correspondent à une direction asymptotique de l'intersection on peut remplacer chaque surface par le cône asymptote correspondant. Ceci revient à dire que la recherche des points à l'infini et des asymptotes de l'intersection de deux surfaces de révolution se ramène à la résolution de ces problèmes pour leurs cônes asymptotes.

519. **Points sur les contours apparents.** — Si le contour apparent est un parallèle, on obtient les points cherchés à l'aide de la sphère auxiliaire qui contient ce parallèle. Si le contour apparent est une méridienne, on coupe l'autre surface par le plan de cette méridienne

et on prend les points de rencontre de la section avec la méridienne considérée.

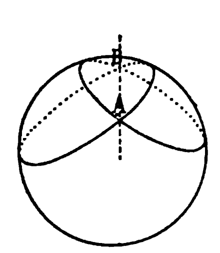
Dans tous les autres cas, la détermination des points sur les contours apparents n'est possible qu'approximativement.

§ IV. — *Projection de l'intersection de deux quadriques de révolution sur un plan de symétrie.*

520. Nature de la projection sur le plan des axes. — Supposons que les axes de deux quadriques de révolution soient dans le même plan. Ce plan est alors un plan de symétrie pour les deux surfaces, et, si on le prend comme plan de projection, la projection de l'intersection sur ce plan est une conique. Ceci résulte du théorème suivant déjà rappelé :

Si deux quadriques ont un plan diamétral commun par rapport à la même direction de cordes, la projection de leur intersection sur ce plan est une conique.

Proposons-nous alors de trouver la nature de cette conique : il suffit, pour cela, d'avoir le nombre de ses points à l'infini. Mais pour obtenir les points à l'infini de l'intersection de deux quadriques de révolution, on peut remplacer ces deux quadriques par deux autres respectivement homothétiques aux premières. Imaginons donc qu'on remplace les deux quadriques par deux autres respectivement homothétiques et circonscrites à la même sphère. Appelons Q et Q_1 ces deux nouvelles quadriques. Comme elles sont circonscrites à la même sphère, elles sont bitangentes en deux points A et B situés sur la droite d'intersection des plans des deux courbes de contact, situés par suite sur une droite perpendiculaire au plan des axes ; il en résulte, ainsi qu'on le démontre en géométrie analytique, qu'elles se coupent suivant deux courbes planes dont les plans passent par AB et forment un faisceau harmonique avec les plans des courbes de contact. Ces deux courbes planes étant situées dans deux plans perpendiculaires au plan des axes, se projettent sur ce plan suivant deux droites qui passent par les points à l'infini de la projection de l'intersection des deux quadriques données sur le même plan ; ces deux droites sont donc les directions des points à l'infini de la projection de l'intersection sur le plan des axes.



Cette projection sera, d'après cela, du genre ellipse, du genre hyperbole ou du genre parabole, selon que ces deux droites seront imaginaires, réelles et distinctes, ou confondues.

En particulier, *si l'une des quadriques est une sphère, la projection sur le plan des axes est une parabole.* En effet, remplaçons la quadrique qui n'est pas une sphère par une quadrique homothétique circonscrite à la sphère. On peut considérer cette quadrique et la sphère comme se coupant suivant deux courbes planes confondues; par suite la projection de l'intersection sur le plan des axes n'a qu'une direction asymptotique qui est la trace, sur ce plan, du plan de la courbe de contact. Donc cette projection est une parabole dont l'axe est parallèle à l'intersection du plan des axes avec le plan de la courbe de contact, trace dont la direction est évidemment perpendiculaire à l'axe de révolution de la quadrique qui n'est pas une sphère.

Lorsque l'une des quadriques est un hyperboloïde, les points à l'infini sur cette quadrique étant les mêmes que sur le cône asymptote, on peut, pour avoir la nature de la projection de l'intersection sur le plan des axes, remplacer cette même quadrique par son cône asymptote. D'après cela :

1° Si les deux surfaces sont des hyperboloïdes, la projection de l'intersection sur le plan des axes est du genre hyperbole; car les cônes asymptotes transportés parallèlement à eux-mêmes de manière qu'ils soient circonscrits à la même sphère se coupent suivant deux courbes planes distinctes;

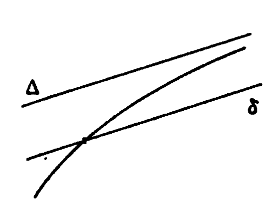
2° Si l'une des surfaces est un ellipsoïde allongé et l'autre un hyperboloïde, la projection est du genre hyperbole également; en effet, prenons comme sphère inscrite celle qui a pour grand cercle l'équateur de l'ellipsoïde, et circonscrivons à cette sphère un cône égal au cône asymptote de l'hyperboloïde. Il suffit alors de faire la figure pour s'assurer que ce cône circonscrit et l'ellipsoïde se coupent suivant deux courbes planes distinctes.

3° Si l'une des surfaces est un ellipsoïde aplati et l'autre un hyperboloïde, la projection de l'intersection sur le plan des axes est du genre ellipse; en effet, il suffit de recommencer les opérations du deuxième cas en prenant comme sphère inscrite celle qui a pour grand cercle l'équateur de l'ellipsoïde; on voit ainsi que l'ellipsoïde et le cône circonscrit à cette sphère ne se coupent pas.

4° Si *une seule* des deux surfaces est un ellipsoïde aplati, on voit

par les mêmes considérations que la projection est un arc d'ellipse : c'est le seul cas où l'on puisse avoir un arc d'ellipse.

521. Asymptotes de la projection. — Quand la projection de l'intersection sur le plan des axes est du genre hyperbole, il est aisé d'en avoir les asymptotes. Supposons, pour fixer les idées, que le plan des axes soit le plan horizontal, et soit δ une direction asymptotique de la projection horizontale de l'intersection. Le plan vertical mené par δ coupe les deux quadriques suivant deux coniques Γ et Γ_1 dont les quatre points de rencontre sont deux à deux symétriques par rapport au plan horizontal et se projettent sur δ; mais la droite δ ne rencontre qu'en un point à distance finie la projection horizontale de l'intersection, l'autre point de rencontre étant à l'infini. Il en résulte que deux des points communs aux coniques Γ et Γ_1 déterminées dans les deux quadriques sont à l'infini; par suite ces deux coniques sont homothétiques, de sorte que le plan vertical mené par δ est un plan de sections homothétiques dans les deux quadriques. Si la droite δ se déplace parallèlement à elle-même, les deux coniques Γ et Γ_1 se déplacent et leurs deux autres points de rencontre s'éloignent indéfiniment lorsque δ se rapproche indéfiniment d'une asymptote Δ de la projection horizontale de l'intersection. Pour cette position de la droite δ les deux coniques Γ et Γ_1 sont homothétiques et concentriques.



Or le lieu du centre de Γ quand son plan se déplace parallèlement à lui-même est le diamètre conjugué de ce plan par rapport à la première quadrique; ce diamètre est d'ailleurs évidemment dans le plan des axes. Il en résulte que l'asymptote Δ passe par le point de rencontre des diamètres conjugués du plan vertical mené par δ par rapport aux deux quadriques; donc, en menant par ce point de rencontre la parallèle à la direction asymptotique δ, on aura l'asymptote correspondante Δ de la projection horizontale. On opère de même pour trouver l'autre asymptote.

522. Remarque. — Les considérations développées au numéro précédent montrent qu'en déterminant les directions asymptotiques de la projection de l'intersection sur le plan des axes, on a déterminé par cela même des plans qui coupent les deux quadriques suivant des

courbes homothétiques. Dans deux quadriques il y a en général trois couples de plans jouissant de cette propriété. On s'en assure et on les obtient en transportant les cônes asymptotes parallèlement à eux-mêmes de manière à leur donner le même sommet. Ces deux cônes ont alors quatre génératrices communes qui peuvent être associées deux à deux de trois manières, et tout plan passant par deux de ces génératrices est un plan tel que tout plan parallèle coupe les deux quadriques suivant deux coniques homothétiques. Il y a donc bien trois couples de plans jouissant de cette propriété. Un seul, parmi ces trois couples, est composé de deux plans perpendiculaires au plan des axes, quand les axes sont dans le même plan.

523. **Théorème.** — *Lorsque deux quadriques de révolution ont leurs axes de révolution parallèles, et que les plans de symétrie perpendiculaires à ces axes coïncident, la projection de leur intersection sur ce plan de symétrie commun ou sur tout plan parallèle est un cercle.*

Prenons en effet le plan de symétrie commun pour plan des xy, et pour axe des z l'axe de révolution d'une des surfaces. L'équation de cette surface sera alors de la forme

$$A(x^2+y^2)+A''z^2+D=0;$$

celle de la deuxième surface sera

$$A_1[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]+A''_1z^2+D_1=0.$$

Pour obtenir l'équation de la projection de leur intersection sur le plan des xy, il suffit d'éliminer z, ce qui donne

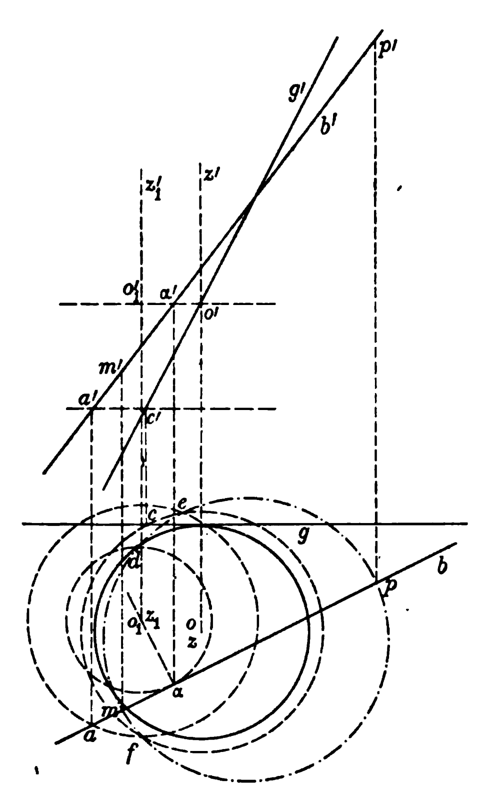
$$AA''_1(x^2+y^2)-A_1A''[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]+DA''_1-A''D_1=0.$$

On obtient donc bien ainsi l'équation d'une circonférence.

524. **Application.** — *Méthode de M. Rouché pour déterminer les points de rencontre d'une surface gauche de révolution et d'une droite.*

Proposons-nous, d'après cela, de déterminer les points de rencontre d'une droite $(ab,\ a'b')$ avec la surface gauche dont l'axe est $(oz,\ o'z')$, et dont $(cg,\ c'g')$ est une génératrice principale. Pour cela, déterminons d'abord le point de rencontre de $(ab,\ a'b')$ avec le plan du cercle de gorge de la surface gauche. Puis considérons le point $(\alpha,\ \alpha')$ ainsi obtenu comme le pied, sur $(ab,\ a'b')$, de la perpendiculaire commune à cette droite et à une autre droite verticale. Cette droite verticale

n'est pas déterminée, et il suffit que sa projection horizontale soit un point de la perpendiculaire à ab menée par α. Dans l'épure on a choisi la verticale $(o_1z_1, o'_1z'_1)$.



Imaginons enfin la surface gauche engendrée par $(ab, a'b')$ en tournant autour de $(o_1z_1, o'_1z'_1)$. Cette surface gauche et la surface proposée remplissant les conditions énoncées plus haut, la projection horizontale de leur intersection est un cercle. On a immédiatement quatre points de ce cercle à l'aide des deux plans horizontaux $\alpha'o'$ et $a'c'$. Trois seulement de ces points, les points d, e, f, ont été marqués sur l'épure. La projection horizontale de l'intersection des deux surfaces gauches est donc la circonférence passant par les trois points d, e, f. Cette circonférence rencontrant ab en m et en p, on en conclut que les points cherchés sont (m, m') et (p, p').

525. Exécution d'une épure. — *Intersection de deux quadriques de révolution dont les axes sont dans le même plan de front.*

L'une des quadriques est une surface gauche à axe vertical $(\alpha, \alpha'z')$; elle est définie par son axe et par une génératrice principale (G, G'). L'autre est un ellipsoïde de révolution allongé défini par sa méridienne principale $b'p'p'_1a'\gamma'$, et dont l'axe est $(\alpha\delta, \alpha'\delta')$. Les axes se rencontrent donc au point (α, α').

Détermination d'un point de l'intersection. — Prenons un point (g, g') sur la génératrice (G, G') de la surface gauche, et cherchons un

point de l'intersection situé sur le parallèle du point (g, g'). Pour cela, cherchons d'abord les projections du parallèle, puis décrivons une sphère auxiliaire passant par ce parallèle et ayant pour centre le point de rencontre (α, α') des axes. Le contour apparent de cette sphère sur le plan vertical est la circonférence de centre α' et passant par les points β'_1 et γ'_1; elle rencontre la méridienne de l'ellipsoïde aux points β' et γ' auxquels correspond un parallèle projeté verticalement en $\beta'\gamma'$ et qui est un parallèle commun à l'ellipsoïde et à la sphère auxiliaire. Ce parallèle et le parallèle du point (g, g') se coupent en deux points : l'un quelconque de ces points, (m, m') par exemple, est l'un des points cherchés.

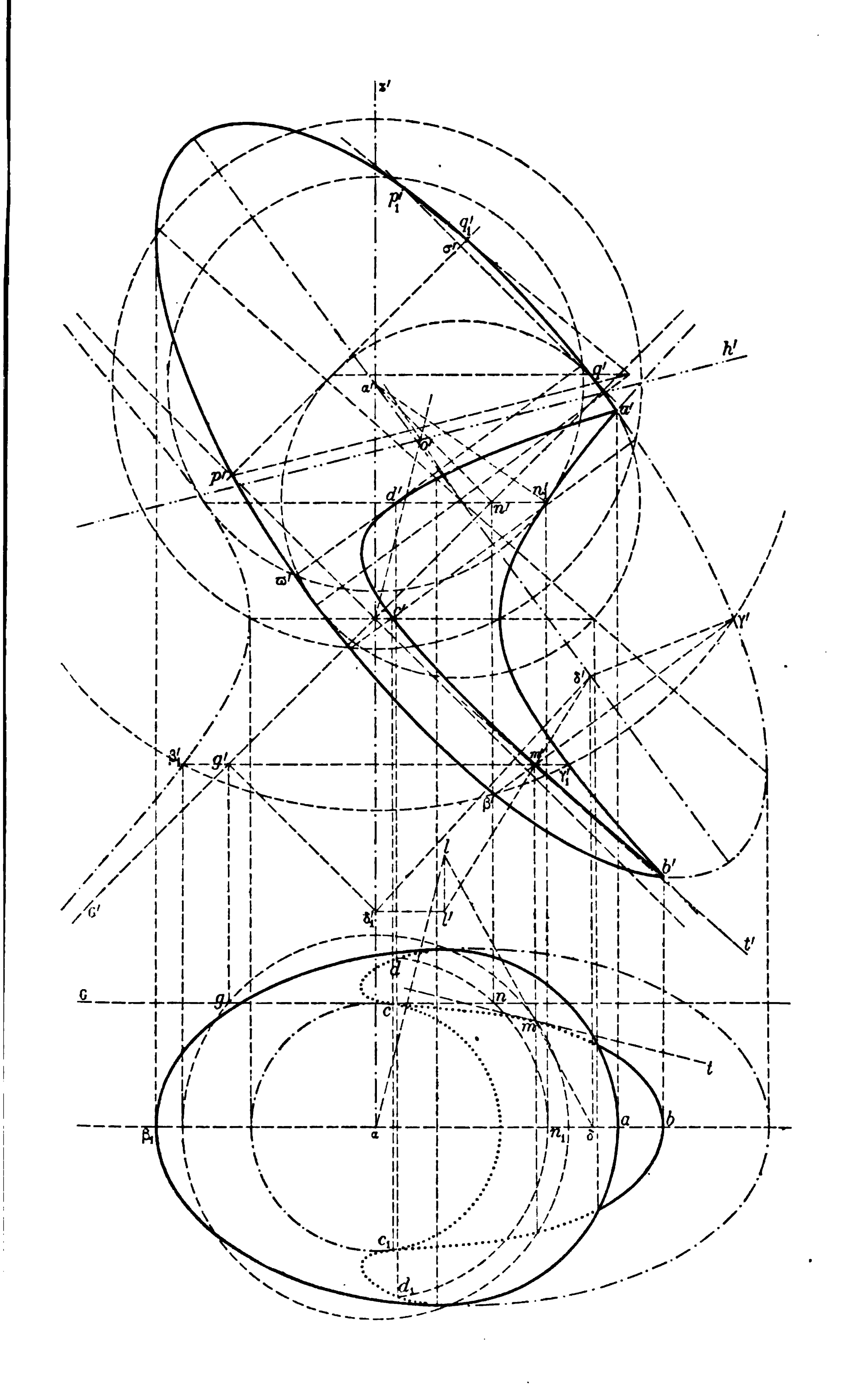
Tangente au point (m, m'). — C'est la perpendiculaire menée par ce point au plan des deux normales. La normale à l'ellipsoïde au point projeté verticalement en γ' rencontre l'axe de cette surface au point (δ, δ') ; la normale à l'ellipsoïde au point (m, m') est donc projetée en $(m\delta, m'\delta')$. La normale à l'hyperboloïde au point (g, g') est perpendiculaire à la génératrice (G, G') qui est de front ; elle est donc projetée verticalement suivant la perpendiculaire à G' menée par le point g' et rencontre l'axe de l'hyperboloïde au point (α, δ'_1). Il en résulte que $\delta'\delta'_1$ est la projection verticale d'une ligne de front du plan des deux normales et, par conséquent, que la tangente en m' à la projection verticale de l'intersection est la perpendiculaire $m't'$ menée à $\delta'\delta'_1$ par le point m'.

Une horizontale du plan des deux normales est celle qui est projetée verticalement en $\delta'_1 l'$ et horizontalement en αl ; donc la tangente en m à la projection horizontale de l'intersection est la perpendiculaire mt menée à αl par le point m. Ainsi la tangente à l'intersection au point (m, m') est $(mt, m't')$.

Points sur les contours apparents. — Les points situés sur les contours apparents verticaux sont les points de rencontre des méridiennes principales ; ils sont projetés en (a, a') et en (b, b').

Les points situés sur le contour apparent horizontal de l'hyperboloïde s'obtiennent par la méthode générale au moyen de la sphère auxiliaire qui passe par le cercle de gorge ; ils sont projetés en (c, c') et en (c_1, c').

Les points situés sur le contour apparent horizontal de l'ellipsoïde ne peuvent être obtenus qu'approximativement et après le tracé de la



projection verticale. La courbe de contact du cylindre vertical circonscrit à l'ellipsoïde est située dans un plan de bout; la trace verticale de ce plan rencontre la projection verticale de l'intersection des deux surfaces en un point dont la ligne de rappel fournit les points situés sur le contour apparent en projection horizontale.

Ligne des points doubles en projection horizontale. — On l'obtient par le procédé ordinaire en cherchant l'intersection des plans de contour apparent horizontal : c'est une ligne de bout dans le cas actuel.

Parallèles limites. — Il n'y a ici qu'un parallèle limite pour l'hyperboloïde. Pour l'obtenir, il faut mener du point (α, α') une normale à l'hyperboloïde. Une de ces normales étant perpendiculaire à la génératrice de front (G, G') est projetée verticalement suivant la perpendiculaire à G' menée par α'. Son pied est projeté en (n, n'), et, si on l'amène dans le plan de front de l'axe $(\alpha, \alpha' z')$ par une rotation, elle est projetée en $(\alpha n_1, \alpha' n'_1)$. La sphère limite correspondante a donc pour rayon $\alpha' n'_1$; elle coupe l'ellipsoïde suivant un parallèle projeté verticalement en $\varpi' d'$ et qui rencontre en deux points (d, d') et (d_1, d') le parallèle du point (n, n'), c'est-à-dire le parallèle de contact de l'hyperboloïde et de la sphère limite. Ces deux points sont ceux qui sont situés sur le parallèle limite, et la droite $\varpi' d'$ est tangente en d' à la projection verticale de l'intersection.

Points à l'infini et asymptotes de la projection verticale. — En vertu de ce qui précède (520), la projection verticale de l'intersection est un arc d'hyperbole. Pour obtenir ses directions asymptotiques, considérons la sphère inscrite dans l'ellipsoïde suivant l'équateur, et circonscrivons à cette sphère un cône égal au cône asymptote de l'hyperboloïde. Le contour apparent de ce cône sur le plan vertical se compose de deux tangentes au contour apparent sur le plan vertical de la sphère inscrite suivant l'équateur de l'ellipsoïde; l'une de ces tangentes est parallèle à G', et elles se coupent au point σ'. On en conclut que $p'q'$ et $p'_1 q'_1$ sont les directions asymptotiques de la projection verticale.

Cherchons l'asymptote parallèle à $p'q'$ par exemple. Pour cela, prenons les diamètres conjugués de $p'q'$ dans chacune des deux méridiennes, et, par le point de rencontre, o', de ces deux droites, menons la parallèle $o'h'$ à $p'q'$; nous aurons ainsi l'asymptote cherchée, et on obtiendrait de même celle qui est parallèle à $p'_1 q'_1$.

Ponctuation. — Pour faire la ponctuation, on a représenté le solide commun aux deux corps supposés pleins.

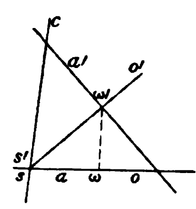
EXERCICES SUR LE CHAPITRE III

1. Construire l'intersection d'une sphère et d'un cône de révolution dont l'axe est dans le plan de front mené par le centre de la sphère. Trouver la nature de la projection verticale de l'intersection.

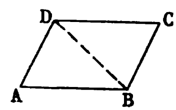
2. On donne un cercle dans un plan de front et deux droites situées dans le même plan. Le cercle en tournant successivement autour des deux droites engendre deux tores ; construire l'intersection des deux surfaces, et trouver la nature de la projection verticale de cette ligne.

3. Un tore à axe vertical est défini par son axe et par son contour apparent sur le plan vertical. Par le point a' le plus à gauche du cercle de gauche on mène la tangente supérieure au cercle de droite, et au point s', autre que a', où cette tangente rencontre le cercle de gauche on mène la tangente à ce cercle. On prend enfin le point s' comme sommet d'un cône de révolution dont les génératrices principales sont les deux tangentes considérées. Construire l'intersection du tore et du cône et trouver les points remarquables de l'intersection.

4. Un cône et un cylindre de révolution ont leurs axes perpendiculaires entre eux dans le même plan de front. L'axe du cône est $(os, o's')$ et son contour apparent sur le plan vertical est osc ; l'axe du cylindre est $(a\omega, a'\omega')$ et son rayon est connu. Intersection des deux surfaces, points remarquables, nature de la projection verticale de cette intersection et ligne des points doubles en projection horizontale.



5. On donne un triangle ABC. On fait tourner AB autour de AC et AC autour de BC. Intersection des deux cônes de révolution ainsi définis.



6. On donne un parallélogramme ABCD dans le plan horizontal. On fait tourner AB autour de CD et autour de BD. Intersection des deux surfaces de révolution ainsi engendrées.

7. Deux ellipses doublement tangentes situées dans le plan vertical de

projection tournent, l'une autour de son grand axe, et l'autre autour de son petit axe. Intersection des deux ellipsoïdes ainsi engendrés.

8. Intersection de deux cylindres de révolution de rayons respectifs r et r', dont les axes sont deux droites rectangulaires du plan horizontal.

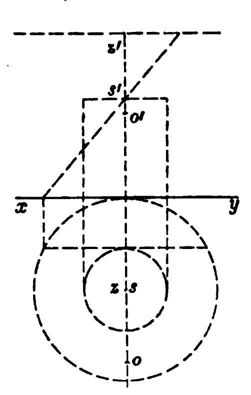
9. Une sphère a son centre sur une génératrice d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical et passe par un point donné de cette génératrice. Construire l'intersection des deux surfaces.

10. Deux cônes de révolution engendrés par la même droite ont leurs axes parallèles au plan vertical. Construire leur intersection.

11. Construire l'intersection de deux cônes de sommets donnés circonscrits à la même sphère.

12. Par un point B situé dans le plan horizontal on mène les deux tangentes BA et BC à une ellipse située dans le même plan. Construire l'intersection des deux surfaces obtenues en faisant tourner l'ellipse autour de AB et AB autour de BC.

13. Cadre 27^{cm} sur 44^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre, à 23^{cm} du bord inférieur.



Représenter par ses deux projections la partie, extérieure à une sphère donnée, du solide compris entre un hyperboloïde de révolution à une nappe, son cône asymptote, un plan horizontal à la cote 0^{m},200 et le plan horizontal de projection.

L'hyperboloïde a son axe (z, z') vertical, à 0^{m},110 du plan vertical de projection et au milieu de la feuille ; son collier, dont la cote vaut 0^{m},120, et sa trace horizontale ont respectivement des rayons égaux à 0^{m},050 et à 0^{m},110.

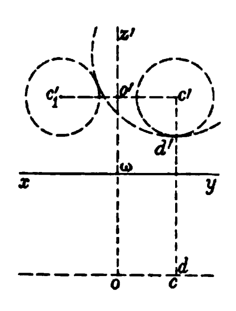
La sphère dont le centre (o, o') se trouve sur le plan de profil conduit par l'axe de l'hyperboloïde à 0^{m},198 du plan vertical et à 0^{m},102 du plan horizontal passe par le sommet (s, s') du cône asymptote.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque des lignes d'intersection de la sphère avec l'hyperboloïde et son cône asymptote et les tangentes en ces points.

(R. Malloizel.)

14. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.

Un tore dont l'axe $(o, o'z')$ est vertical, $x\omega = \omega y$, $\omega o = 10^{cm},5$, est engendré par une circonférence (c, c') située dans le plan de front passant par l'axe; son rayon est de 4^{cm}, et $o'c' = 6^{cm}$. Le centre c' est à 8^{cm} de la ligne de terre.



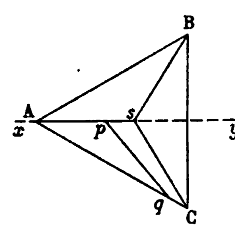
Une sphère dont le centre est sur la verticale passant par le point (c, c') est tangente au tore au point (d, d') et en un point de la circonférence c'_1.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection de la sphère et du tore ; 2° de représenter le tore entaillé par la sphère.

R. Malloizel.)

15. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à 16^{cm} du bord inférieur.

$x\text{A} = 1^{cm}$; $\text{AB} = \text{BC} = \text{CA} = 25^{cm}$; $sp = 4^{cm}$; $qc = 3^{cm}$.



Un tétraèdre régulier repose par sa base ABC sur le plan horizontal.

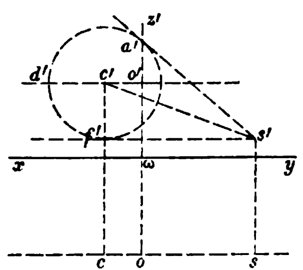
Un cône de révolution a pour sommet le point A et pour base la circonférence inscrite dans le triangle SBC.

Un hyperboloïde de révolution a pour axe la verticale qui passe par le sommet S et pour génératrice la droite du plan ASC qui se projette suivant pq.

Trouver la projection horizontale de l'intersection du cône et de l'hyperboloïde, et représenter la partie du tétraèdre supposé plein extérieure aux deux surfaces précédentes.

(R. Malloizel.)

16. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



$x\omega = \omega y$, $\omega o = 10^{cm},3$, $\omega o' = 8^{cm}$, $o'c' = 4^{cm}$, $c'd' = 6^{cm}$; $a's'$ tangente au cercle c' en a' sur $\omega z'$; $f's'$ tangente au cercle c' et parallèle à xy.

Un tore a pour axe la verticale $(o, \omega z'$ et est engendré par le cercle (c, c') situé dans le plan de front passant par l'axe.

Un cône de révolution a pour axe la droite $(sc, s'c')$ et pour méridienne principale les droites $a's'$ et $f's'$.

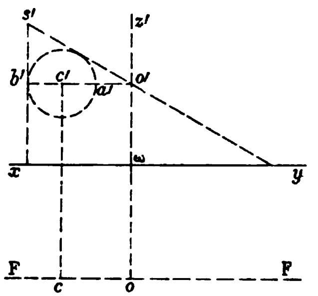
On demande les projections de l'intersection du tore et du cône.

Représenter le tore entaillé par le cône.

Développement du cône et de la courbe d'intersection.

(R. MALLOIZEL).

17. Cadre : 27cm sur 42cm. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.



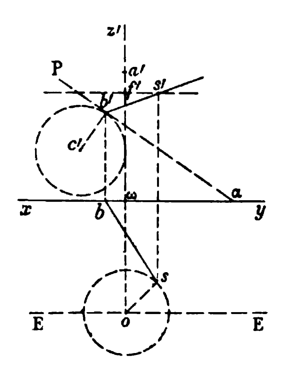
Un tore a son axe vertical (o, $\omega z'$); ω est au milieu de la feuille, $\omega o = 10^{cm}$; il est engendré par une circonférence (c, c') de rayon $c'a' = 3^{cm}$ situé dans le plan de front FF passant par l'axe. $o'\omega = 7^{cm}$, $o'c' = 6^{cm}$.

Un cône de révolution a son axe dans le plan de front FF; la méridienne principale du cône se compose des deux droites $o's'$ et $s'b'$ ($o's'$ est la tangente menée de o' au cercle c'; $s'b'$ est perpendiculaire à la ligne de terre). La projection verticale de l'axe est $s'c'$.

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du tore et du cône ; 2° de représenter le cône limité au plan horizontal et entaillé par le tore. (R. MALLOIZEL.)

18. Cadre 27cm sur 42cm. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu.

Un paraboloïde de révolution dont l'axe (o, $\omega z'$) est vertical, $x\omega = \omega y$, $o\omega = 10^{cm},5$, est engendré par une parabole située dans le plan de front EE. La projection verticale f' du foyer de la parabole est telle que $\omega f' = 10^{cm}$, la projection du sommet est en a', $f'a' = 2^{cm}$.

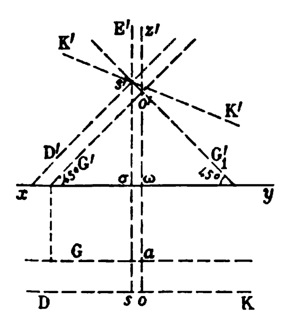


On considère le point (s, s') situé sur le parallèle du paraboloïde dont le plan passe par f' et tel que os fait 45° avec xy. On mène le plan tangent en ce point au paraboloïde et on détermine sa trace verticale αP ; dans ce plan on mène la droite (sb, $s'b'$) telle que $\omega b = 2^{cm}$. On trace une circonférence de rayon $4^{cm},3$ tangente à αP au point b' et en dessous. Cette circonférence située dans le plan vertical est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la droite (sb, $s'b'$).

On demande : 1° de trouver les projections de l'intersection du paraboloïde et du cylindre ; 2° de représenter le paraboloïde entaillé par le cylindre et limité au plan horizontal. (R. MALLOIZEL.)

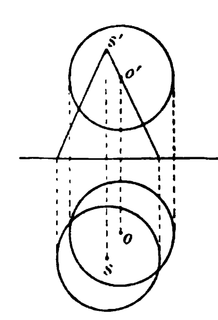
19. Cadre 27^{cm} sur 42^{cm}. — Ligne de terre parallèle au petit côté du cadre et au milieu. $\omega y = \omega x$.

Un hyperboloïde de révolution à une nappe a pour axe la verticale $(o, \omega z')$, $\omega o = 10^{cm},5$. Son centre est le point (o, o'), $\omega o' = 9^{cm}$. Le cercle de gorge a pour rayon $oa = 3^{cm}$. La génératrice (G, G′) fait un angle de 45° avec le plan horizontal.



Un cône de révolution a son sommet en (s, s') ; le point s' est sur G'_1 et $\sigma s' = 10^{cm}$. L'axe du cône est dans le plan de front passant par l'axe de l'hyperboloïde. La méridienne principale du cône se compose de la verticale $(s, s'E')$ passant par le sommet du cône et de la droite $(sD, s'D')$ parallèle à la droite (G, G′). La projection verticale de l'axe du cône est la bissectrice $s'K'$ de l'angle obtus $E's'D'$.

On demande les projections de l'intersection du cône et de la surface gauche de révolution. On représentera le solide commun, qu'on limitera au plan horizontal et à un plan horizontal de cote 15^{cm}.



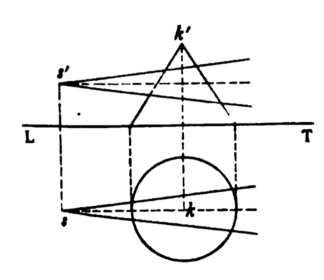
On fera la construction d'un point quelconque et de la tangente en ce point, la construction des points sur les contours apparents et la construction des asymptotes. (R. Malloizel.)

20. Intersection d'une sphère avec un cône de révolution droit.

L'épure servant de composition de dessin devra être passée à l'encre de Chine.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours supplémentaire 1890.*)

21. Pénétration d'un cône de révolution dont l'axe est parallèle à LT, de sommet (s, s'), dans un cône de révolution dont l'axe est vertical ; les axes des cônes se rencontrant.



Tangente à l'intersection.

Développement des surfaces.

Représenter les deux cônes par des génératrices équidistantes.

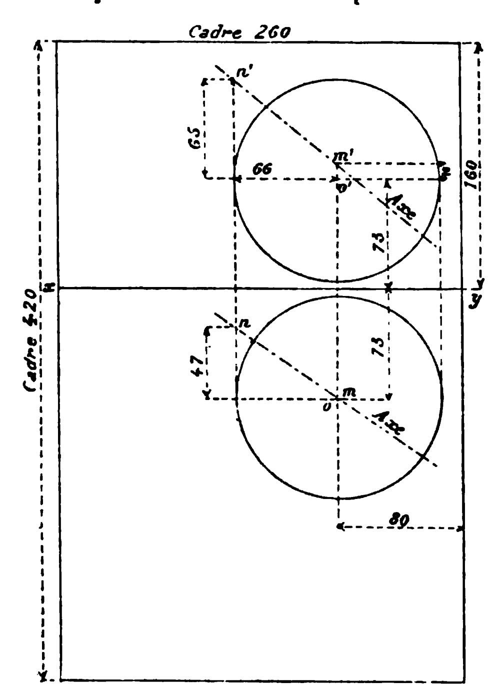
Dégager et figurer à part le solide commun.

Passer toute l'épure à l'encre de Chine.

(*Ecole des mines de Saint-Etienne, concours de 1893.*)

22. Sphère et cylindre de révolution. — Une sphère a pour centre le point (o, o'). Son rayon est égal à 66mm.

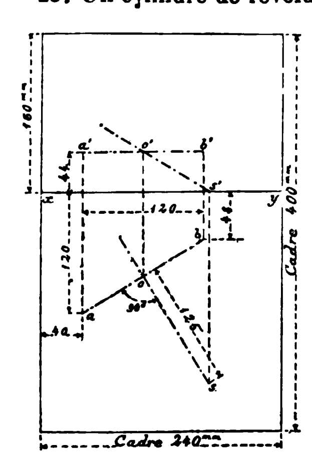
Un cylindre de révolution a pour axe la droite (mn, $m'n'$). En projection horizontale le point m coïncide avec le point o ; en projection verticale le point m' est à 10mm au-dessus du point o'. Le rayon du cylindre est déterminé par la condition que le cylindre soit tangent à la sphère. La génératrice de contact sera donc confondue, en projection horizontale, avec la droite mn. Il y aurait deux solutions : on choisira celle qui répond à un point de contact situé au-dessus de l'équateur.



On demande de déterminer l'intersection des deux surfaces et de représenter la sphère seule entaillée par le cylindre.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1888.*)

23. Un cylindre de révolution a pour axe la droite horizontale (ab, $a'b'$) ; il est tangent au plan horizontal et il est limité par deux plans de section droite passant par les extrémités (a, a') et (b, b') de l'axe.



Un cône, également de révolution, a pour sommet le point (s, s') situé sur le plan horizontal ; son axe passe par le point (o, o') milieu de l'axe du cylindre et il est, lui aussi, tangent au plan horizontal. En projection horizontale, les axes des deux surfaces sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

On demande de chercher l'intersection des deux surfaces et de représenter le cylindre seul en supposant le cône enlevé après avoir fait son entaille dans le cylindre.

L'épure devra indiquer la marche suivie pour trouver un point courant de l'intersec-

tion et la tangente en ce point. Elle comportera également les constructions faites pour trouver les points les plus remarquables de l'intersection.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1890.*)

24. Une sphère de 65^{mm} de rayon a son centre situé à 100^{mm} de chacun des plans de projection.

Un cylindre de révolution, de 50^{mm} de rayon, a pour axe une droite dont la projection horizontale passe par la projection horizontale du centre de la sphère ; de plus, le cylindre est tangent intérieurement à la sphère en un point situé plus haut que le centre de cette dernière ; enfin cet axe fait avec le plan horizontal un angle de 45° et avec le plan vertical un angle de 30°, ce qui achève de déterminer sa position.

On demande :

1° De chercher l'intersection des deux surfaces ;

2° De représenter le cylindre seul entaillé par la sphère ; ce cylindre sera limité par deux plans horizontaux choisis à volonté.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1892.*)

25. Un cône de révolution repose par sa base, qui est un cercle, sur le plan horizontal. Ses dimensions sont les suivantes : diamètre du cercle de base, 110^{mm} ; hauteur, 130^{mm}.

La circonférence de base est tangente à la ligne de terre.

Une sphère de 100^{mm} de diamètre a son centre situé dans un des deux plans méridiens du cône inclinés à 45° sur le plan vertical ; peu importe lequel. Ce centre est situé à 35^{mm} au-dessus du plan horizontal et à 15^{mm} de l'axe du cône ; il est plus éloigné du plan vertical de projection que n'en est cet axe.

On demande, après avoir cherché les intersections des surfaces en présence, savoir : cône, sphère et plan horizontal, de représenter le solide intercepté entre ces trois surfaces.

(*Ecole des Ponts et Chaussées, cours préparatoires, concours de 1893.*)

26. On prendra comme ligne de terre le petit axe de la feuille.

Un tétraèdre régulier (SABC, S'A'B'C') repose par la face (ABC, A'B'C') sur le plan horizontal. Cette face a pour centre le point S : $x = -2^{cm}$, $y = 10^{cm}$, et pour sommet le point A : $x = -11^{cm}$, $y = 10^{cm}$.

On considère :

1° Le cône de révolution ayant pour sommet (A, A') et pour base la circonférence inscrite dans la face opposée (SBC, S'B'C') ;

2° La surface gauche de révolution engendrée par les arêtes (SB, S'B'), (SC, S'C') en tournant autour de la verticale menée par le centre de la face (SBC, S'B'C').

Représenter dans les deux projections, le solide commun au cône et à l'hyperboloïde.

(*Ecole normale, concours de 1885.*)

27. On donne les points :

(a, a') : $x = -10$, $y = 10$, $z = 16$;
(b, b') : $x = -2$, $y = 10$, $z = 8$.

1° Dans le plan de front ab, on considère la circonférence décrite sur $(ab, a'b')$ comme diamètre ; c'est la méridienne principale d'un tore ayant pour axe la verticale

o, $x = 0$, $y = 10$.

2° Dans le plan de bout $a'b'$, on considère la circonférence décrite sur $(ab, a'b')$ comme diamètre ; c'est la méridienne d'un deuxième tore ayant pour axe la ligne de bout

ω', $x = 0$, $z = 6$.

Représenter la surface opaque du tore à axe vertical contenue dans le tore à axe de bout.

(*École normale, concours de 1894.*)

28. On donne le triangle $(soa, s'o'a')$:

(s, s') : $x = 2^{cm}$, $y = 10^{cm}$, $z = 10^{cm}$;
(o, o') : $x = -6^{cm}$, $y = 4^{cm}$, $z = 10^{cm}$;
(a, a') : $x = 4^{cm}$, $y = 4^{cm}$, $z = 10^{cm}$.

Le point (s, s') est le sommet d'un cône admettant pour plan principal le plan horizontal s', pour axe la droite $(so, s'o')$; pour génératrice principale $(sa, s'a')$ et pour base dans le plan de front oa une certaine circonférence (c, c') qui est déterminée. On considère d'autre part le tore engendré par cette même circonférence (c, c') tournant autour de la verticale o.

Représenter le solide commun au tore et au cône.

(*Ecole normale, concours de 1895.*)

COMPLÉMENTS ET NOTES

* COMPLÉMENTS ET NOTES

QUESTIONS D'EXAMENS

§ I.

Quelques problèmes sur les surfaces réglées du second degré.

526. **Généralités sur ces surfaces.** — Les seules surfaces réglées du second degré qui ne sont pas des cônes ou des cylindres sont l'*hyperboloïde à une nappe* et le *paraboloïde hyperbolique.*

L'hyperboloïde à une nappe est engendré par une droite qui s'appuie sur trois droites fixes ou directrices non situées deux à deux dans le même plan et non parallèles au même plan : la surface gauche de révolution est un hyperboloïde à une nappe.

Il est aisé, d'après cela, de déterminer une génératrice quelconque de cette surface. Soient en effet A, B, C les trois directrices. Toute génératrice rencontrant les trois directrices est située dans un plan passant par l'une quelconque d'entre elles et rencontrant les deux autres aux mêmes points que la génératrice. Il en résulte que si un plan quelconque passant par A rencontre B et C aux points respectifs P et Q, la droite PQ est une génératrice de l'hyperboloïde.

Le paraboloïde hyperbolique peut être engendré de deux manières : soit par une droite assujettie à rencontrer deux droites fixes, tout en demeurant parallèle à un plan fixe ; soit par une droite assujettie à rencontrer trois droites fixes, parallèles au même plan mais non situées deux à deux dans le même plan. Quel que soit le mode de génération adopté, la construction d'une génératrice quelconque de la surface en résulte bien facilement. Dans le premier cas il suffit de couper les deux directrices par un plan parallèle au plan directeur; dans le second cas, on procède comme pour l'hyperboloïde à une nappe.

L'hyperboloïde à une nappe admet deux systèmes de génératrices rectilignes jouissant des propriétés suivantes :

Deux génératrices de même système ne se rencontrent jamais et ne sont jamais parallèles.

Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours ou sont parallèles.

Par chaque point de la surface il passe une génératrice de chaque système et une seule, et ces deux génératrices déterminent le plan tangent en ce point.

Si, par le centre de la surface, on mène les parallèles aux génératrices de l'un ou de l'autre système, le lieu géométrique de ces parallèles est un cône de second ordre qu'on appelle le *cône asymptote* de la surface.

Il suit de là que si l'on considère une génératrice G de ce cône, il y a une génératrice de chaque système parallèle à G; ces deux génératrices se rencontrent à l'infini et déterminent un plan tangent dont le point de contact est à l'infini : ce plan s'appelle un *plan asymptote*.

Un plan asymptote est tangent au cône asymptote, de sorte que le cône asymptote peut être considéré comme l'enveloppe des plans asymptotes, et tout plan tangent au cône asymptote coupe la surface suivant deux droites parallèles à la génératrice de contact du plan et du cône.

Le paraboloïde hyperbolique admet également deux systèmes de génératrices rectilignes jouissant des propriétés suivantes :

Les génératrices de l'un des systèmes sont parallèles à un plan P et les génératrices de l'autre système sont parallèles à un plan Q : les plans P et Q s'appellent les *plans directeurs* de la surface, et il y a une génératrice de cette surface parallèle à toute direction de l'un des plans directeurs. Il y a toutefois exception quand la direction est l'intersection des deux plans directeurs.

Deux génératrices de même système ne se rencontrent jamais et ne sont pas parallèles.

Deux génératrices de systèmes différents se rencontrent toujours à distance finie quand elles sont toutes les deux à distance finie.

Par tout point de la surface il passe une génératrice de chaque système et une seule, et ces deux génératrices déterminent le plan tangent à la surface en ce point.

Tout plan parallèle à un plan directeur coupe la surface suivant une droite à distance finie et suivant une droite à l'infini. On peut donc considérer ce plan comme un plan tangent dont le point de contact est à l'infini sur la génératrice à distance finie.

Ajoutons que ces dernières propriétés, qu'il s'agisse de l'hyperboloïde à une nappe ou du paraboloïde hyperbolique, se démontrent dans tous les cours de Géométrie analytique. Nous nous contenterons donc de les avoir rappelées.

527. **Plan tangent en un point.** — Le plan tangent en un point est déterminé par les deux génératrices de la surface qui passent par ce point. D'après cela, soient A et B deux génératrices de même système, C et D

deux autres génératrices n'appartenant pas au même système que A et B, et M le point. Le plan tangent en M est déterminé : 1° par la droite qui passe par M et qui s'appuie sur A et sur B ; 2° par la droite qui passe par M et qui s'appuie sur C et sur D.

Dans la plupart des cas on connait l'une de ces droites et il suffit alors de construire l'autre.

Quand la surface est un paraboloïde, les constructions de ces deux droites se simplifient en observant qu'elles sont parallèles respectivement aux deux plans directeurs.

528. **Point de contact du plan passant par une génératrice.** — Tout plan passant par une génératrice d'une quadrique réglée est tangent en un point de cette génératrice. Il coupe la surface suivant une autre génératrice dont le point de rencontre avec la première est le point de contact demandé. Si on appelle G la génératrice donnée, G_1 et G_2 deux autres génératrices de même système que G, le plan considéré passant par G coupe G_1 et G_2 aux points respectifs A_1 et A_2 dont la ligne de jonction rencontre G au point demandé.

529. **Plans tangents passant par un point donné à distance finie ou infinie.** — Le problème étant indéterminé, on le détermine en assujettissant le point de contact à être sur une génératrice donnée. Le plan tangent est alors celui qui passe par cette génératrice et par le point, et l'on a vu plus haut comment on détermine son point de contact.

530. **Contours apparents de la surface.** — Le contour apparent horizontal étant le lieu des points de contact des plans tangents verticaux, on l'obtient en cherchant les points de contact des plans projetant horizontalement les diverses génératrices.

On obtient d'une manière analogue le contour apparent vertical.

531. **Section plane d'un paraboloïde hyperbolique.** — On obtient un point quelconque de la section et la tangente en ce point par la méthode ordinaire.

On obtient les points à l'infini en cherchant les génératrices qui sont parallèles au plan sécant. Soient P le plan sécant, P_1 et P_2 les deux plans directeurs, Δ_1 et Δ_2 les droites suivant lesquelles le plan P coupe les deux plans respectifs P_1 et P_2. Les directions de Δ_1 et de Δ_2 sont les directions asymptotiques.

Pour avoir les asymptotes, il faut trouver d'abord la génératrice du premier système parallèle à Δ_1 et la génératrice du deuxième système parallèle à Δ_2. Si G_1 et G_2 sont ces deux génératrices respectives, il faut ensuite déterminer les intersections du plan P avec les plans tangents au point à l'infini sur G_1 et au point à l'infini sur G_2. Ces deux plans tan-

gents sont d'ailleurs les plans menés par G_1 parallèlement à P_1 et par G_2 parallèlement à P_2.

Ajoutons que G_1 est parallèle à Δ_1 et rencontre deux génératrices quelconques non parallèles à P_1. Remarque analogue pour G_2.

532. **Points de rencontre d'une droite et d'un paraboloïde hyperbolique.** — La section du paraboloïde par l'un des plans projetant la droite est une hyperbole dont on sait déterminer les asymptotes et un point. On sait donc trouver les points de rencontre de cette hyperbole et de la droite : ces points sont les points demandés.

533. **Génératrices communes à deux paraboloïdes qui ont un plan directeur commun et une génératrice commune non parallèle à ce plan.** — Ce problème est un cas particulier du précédent. Si en effet on appelle G la génératrice commune, G_1 et G'_1 deux génératrices de même système que G appartenant respectivement aux deux paraboloïdes, les deux génératrices cherchées passent respectivement par les points de rencontre de G'_1 avec le paraboloïde qui contient G et G_1. Si A est l'un de ces points, une des génératrices cherchées s'appuie sur G et sur G_1 et, de plus, elle est située dans le plan mené par A parallèlement au plan directeur commun ; on a ainsi des conditions surabondantes pour la déterminer.

534. **Trouver sur un hyperboloïde à une nappe les génératrices parallèlles à un plan donné.** — Supposons l'hyperboloïde défini par trois directrices A, B, C, et soit P le plan donné. Considérons le plan P comme l'un des plans directeurs d'un paraboloïde hyperbolique passant par A et par B. Les droites cherchées sont alors les génératrices de ce paraboloïde qui sont parallèles au plan P et qui rencontrent C. Pour les obtenir, il suffit donc de chercher les points de rencontre du paraboloïde et de la droite C, problème qui a été résolu plus haut.

Le problème admet quatre solutions, car deux des génératrices cherchées sont de systèmes différents de A, B, C et deux autres de même système que A, B, C. Ces quatre génératrices sont deux à deux parallèles.

535. **Mener à une quadrique réglée les plans tangents parallèles à un plan donné.** — Appelons P le plan donné et distinguons deux cas suivant que la surface est une hyperboloïde ou un paraboloïde.

1° Si la surface est un hyperboloïde, il suffit de trouver deux génératrices rectilignes de même système parallèles au plan P, problème qu'on vient de résoudre. Les plans menés par ces droites respectives parallèlement au plan P sont les plans tangents demandés.

2° Si la surface est un paraboloïde, en appelant P_1 et P_2 les deux plans directeurs, Δ_1 et Δ_2 les droites d'intersection de ces plans respectifs et du plan P, il suffit de construire la génératrice parallèle à Δ_1 et la génératrice parallèle à Δ_2. Ces deux génératrices de systèmes différents déterminent le seul plan tangent répondant à la question.

536. Section plane d'un hyperboloïde à une nappe. — Supposons toujours l'hyperboloïde défini par trois directrices et soit P le plan sécant. On obtient un point quelconque de la section et la tangente en ce point par le procédé ordinaire.

On obtient les points à l'infini, quand il y en a, en déterminant les génératrices de la surface parallèles au plan P. Nous avons vu que ces génératrices, au nombre de quatre, sont deux à deux parallèles. Soient G_1 et G_1 deux génératrices parallèles et parallèles au plan P; soient de même G_2 et G'_2 deux autres génératrices remplissant les mêmes conditions. L'asymptote parallèle à G_1 et à G'_1 est évidemment l'intersection du plan P avec le plan de ces deux droites; pareillement l'asymptote parallèle à G_2 et à G_2 est l'intersection du plan P avec le plan de ces deux droites.

537. Points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde à une nappe. — Soient A, B, C les trois directrices de l'hyperboloïde et D la droite. Coupons la surface par le plan mené par D parallèlement à l'une des droites A, B ou C, parallèlement à A par exemple : soit P ce plan. La section est une hyperbole dont les points de rencontre avec D sont les points demandés. Il y a tout avantage à définir cette hyperbole par ses asymptotes et par un point, car on sait trouver les points de rencontre d'une droite avec une hyperbole ainsi définie. On a vu d'ailleurs plus haut comment on détermine les asymptotes d'une section plane. Au surplus, ce dernier problème se simplifie dans le cas actuel, puisque l'une des asymptotes est parallèle à A et que l'autre est la deuxième droite d'intersection de l'hyperboloïde avec le plan mené par A parallèlement au plan P.

538. Remarque. — On peut aussi trouver les points de rencontre d'une droite avec une quadrique réglée en cherchant les points doubles de deux divisions homographiques. Mais les constructions, compliquées dans tous les cas, ne sont pas plus simples que celles qui résultent des solutions indiquées aux nos 532 et 537.

On peut voir à ce sujet une note de M. Roubaudi dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (1896, p. 394).

539. Mener à une quadrique réglée les plans tangents passant par une droite. — Si D est la droite donnée, le problème se ramène à celui de la détermination des points de rencontre de D avec la surface.

Soient, en effet, A et B ces deux points. Soit AC une des génératrices qui passent par A et soit BC une génératrice de système différent passant par B. Les deux droites AC et BC définissent l'un des plans tangents cherchés. On en obtient un autre avec les deux autres génératrices qui passent respectivement par A et par B.

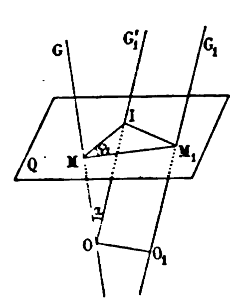
§ II.

Quelques problèmes sur les surfaces réglées en général.

540. **Point central et ligne de striction.** — Appelons G et G_1 deux génératrices infiniment voisines d'une surface réglée, et soit O le pied sur G de la perpendiculaire commune à ces deux droites. Quand G_1 se rapproche indéfiniment de G, le point O tend vers une position limite ω : cette position limite s'appelle le *point central* sur la génératrice G, et on appelle *ligne de striction* de la surface le lieu du point ω quand G se déplace sur la surface.

541. **Plan asymptote.** — Si l'on considère le plan P mené par G parallèlement à G_1, et si l'on suppose que G_1 se rapproche indéfiniment de G, ce plan tend vers une position limite. Dans cette position limite il s'appelle le *plan asymptote* suivant la génératrice G. On l'appelle ainsi parce qu'on peut le considérer comme un plan tangent dont le point de contact est le point à l'infini sur G. En effet, le plan P passe par les points de rencontre de G et de G_1 avec le plan de l'infini ; il contient donc la sécante qui joint deux points à l'infini sur la surface. Or si G_1 se rapproche indéfiniment de G, cette sécante devient une tangente à la surface au point où celle-ci est rencontrée par G ; par suite le plan P devient le plan tangent en ce point.

542. **Paramètre de distribution.** — Si l'on appelle δ la plus courte distance de G et de G_1, α l'angle infiniment petit de ces deux droites, lorsque α tend vers zéro le rapport $\frac{\delta}{\alpha}$ a généralement une limite : cette limite s'appelle le *paramètre de distribution* des plans tangents suivant la génératrice G ; nous en verrons la raison dans un instant, et nous le désignerons, comme d'habitude, par la lettre k.



543. **Variation du plan tangent le long d'une génératrice.** — Considérons deux génératrices voisines G et G_1 d'une surface réglée, et soient OO_1 leur perpendiculaire commune, α leur angle. Supposons que l'on connaisse le plan asymptote suivant la génératrice G, ainsi que le point central sur cette génératrice, et proposons-nous de déterminer la position du plan tangent en un point quelconque M de G. Pour cela, menons par le

point M le plan Q perpendiculaire à G et joignons le point M au point de rencontre M_1 de ce plan avec G_1. Il est clair que le plan tangent en M peut être considéré comme la position limite du plan M_1MG quand G_1 se rapproche indéfiniment de G. Cherchons donc cette position limite. A cet effet, menons par le point O la parallèle OG'_1 à G_1 et appelons I le point où cette droite perce le plan Q. La droite M_1I étant évidemment parallèle à OO_1 est perpendiculaire au plan GOG'_1, de sorte que le triangle M_1IM est rectangle en I. Si donc on pose

$$\widehat{IMM_1} = \varphi_1,$$

on a

$$M_1I = IM \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Mais le triangle rectangle IMO donne

$$IM = OM \operatorname{tg} \alpha,$$

de sorte que

$$M_1I = OM \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi_1 ;$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad OM \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{M_1I}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Il est clair maintenant que l'angle φ_1 n'est autre chose que le rectiligne du dièdre formé par les deux plans GOG_1 et GMM_1, dont les limites respectives, quand G_1 se rapproche indéfiniment de G, sont le plan asymptote suivant OG et le plan tangent en M. D'autre part le point O a pour limite le point central sur G, de sorte que si on appelle φ l'angle du plan tangent en M avec le plan asymptote et ζ la distance du point central au point M, le premier membre de l'égalité (1) a pour limite $\zeta \operatorname{tg} \varphi$. Quant au second membre de la même égalité, on peut l'écrire $\frac{OO_1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$, et, sous cette forme, on voit qu'il a pour limite le paramètre de distribution k. Il en résulte que l'égalité (1) devient à la limite

$$(2) \qquad \zeta \operatorname{tg} \varphi = k.$$

C'est cette égalité qui définit la loi de distribution des plans tangents suivant la génératrice G et c'est pour cette raison que la limite du rapport $\frac{\delta}{\alpha}$ de la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines à leur angle a été appelée le paramètre de distribution.

Si l'on fait varier ζ de $-\infty$ à $+\infty$ on voit, au moyen de la formule (2), que l'angle φ varie de $-\pi$ à 0, c'est-à-dire que le plan tangent tourne de 180° autour de G.

On voit également, au moyen de la formule (2), que le plan tangent au point central est perpendiculaire au plan asymptote; car, pour $\zeta = 0$, on a $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

On voit enfin que si $k = 0$, on a $\varphi = 0$ et le plan tangent est le même tout le long de la génératrice : la surface réglée s'appelle alors une *surface développable*.

544. Théorème. — *Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune ont le même plan tangent en deux points de cette génératrice.*

Sur la génératrice commune G fixons un sens positif et prenons comme origine le point central de la première surface. Appelons alors a l'abscisse du point central de la deuxième surface, x l'abscisse d'un point de G en lequel les deux surfaces ont le même plan tangent, φ l'angle de ce plan tangent avec le plan asymptote à la première surface, α l'angle des deux plans asymptotes, k et k_1 les paramètres de distribution respectifs.

En appliquant la formule (2) aux deux surfaces respectives, on a alors

$$x \operatorname{tg} \varphi = k,$$
$$(x - a) \operatorname{tg} (\varphi - \alpha) = k_1.$$

L'élimination de φ entre ces deux équations conduit à l'équation du second degré

$$x^2 \operatorname{tg} \alpha + (k_1 - k - a \operatorname{tg} \alpha) x + ak + kk_1 \operatorname{tg} \alpha = 0, \tag{3}$$

et la proposition en résulte.

545. Corollaire. — *Deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune et les mêmes plans tangents en trois points de cette droite se* **raccordent** *tout le long de la génératrice commune, c'est-à-dire ont les mêmes plans tangents en tous les points de cette droite.*

Dans ce cas en effet l'équation (3) admet plus de deux solutions et est, par suite, une identité. On voit d'ailleurs que les conditions de raccordement, *au nombre de trois*, sont

$$a = 0, \qquad k_1 = k, \qquad \alpha = 0.$$

546. Hyperboloïdes de raccordement. — Considérons, d'après cela, trois points A_1, A_2, A_3 situés sur une génératrice G d'une surface réglée, et les plans tangents P_1, P_2, P_3 menés à la surface en ces trois points. Soit Δ_1 une tangente à la surface au point A_1, c'est-à-dire une droite menée par A_1 dans le plan P_1. Soient, de même, Δ_2 et Δ_3 deux droites analogues situées dans les plans respectifs P_2 et P_3. Si l'on prend les trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 comme directrices d'un hyperboloïde H, cet hyperboloïde et la surface réglée auront les mêmes plans tangents aux points A_1, A_2, A_3 et, par suite, se raccorderont tout le long de la génératrice G.

Pour cette raison l'hyperboloïde H s'appelle un *hyperboloïde de raccordement*, et pour déterminer le plan tangent à la surface en un point quelconque de G, on peut la remplacer par l'hyperboloïde H.

On voit, d'ailleurs, qu'il y a une infinité d'hyperboloïdes de raccordement.

En particulier, on peut choisir un hyperboloïde de raccordement rencontrant une droite donnée D : il suffit, pour cela, de faire passer les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 par les points de rencontre respectifs de D avec les plans P_1, P_2, P_3. Cette remarque est très importante pour les applications.

547. **Paraboloïde de raccordement.** — Quand les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont parallèles à un même plan, l'hyperboloïde de raccordement devient un paraboloïde de raccordement. Il y a évidemment une infinité de paraboloïdes de raccordement.

548. **Paraboloïde des normales.** — Parmi les paraboloïdes de raccordement, considérons en particulier celui dont un plan directeur est perpendiculaire à la génératrice. Si on le fait tourner de 90° autour de cette génératrice, chacune de ses génératrices perpendiculaires à G devient normale à la surface réglée. Il en résulte que *le lieu des normales à une surface réglée aux divers points d'une génératrice est un paraboloïde hyperbolique :* on l'appelle le *paraboloïde des normales.*

Si on appelle Δ une génératrice du paraboloïde des normales de même système que G, l'hyberboloïde de révolution engendré par G en tournant autour de Δ est de raccordement pour la surface réglée ; car cette surface et l'hyperboloïde ont les mêmes normales en tous les points de G et ces normales sont les génératrices du paraboloïde des normales perpendiculaires à G.

Ainsi, *les génératrices du paraboloïde des normales de même système que* G *constituent, par leur ensemble, le lieu des axes des hyperboloïdes de révolution qui se raccordent avec la surface réglée tout le long de* G.

549. **Application.** — *Deux surfaces réglées ayant une génératrice commune, trouver les points de cette droite en lesquels les plans tangents aux deux surfaces sont les mêmes.*

Si on remplace les deux surfaces par deux paraboloïdes de raccordement ayant un plan directeur commun, la question est ramenée à celle de la détermination des génératrices communes à ces deux paraboloïdes, problème déjà résolu (533).

§ III.

Exercices avec l'indication des solutions.

I. — *Une droite* D *donnée par ses projections tourne successivement autour d'un axe vertical et autour d'un axe de bout. Intersection des deux surfaces de révolution ainsi engendrées.*

Ces surfaces sont des hyperboloïdes de révolution à une nappe ayant une génératrice commune, D. Elles se coupent suivant cette génératrice et suivant une cubique gauche Γ. Pour avoir un point quelconque de Γ, on imagine sur la première surface une génératrice G *qui n'est pas de même système que* D. Cette génératrice rencontre la deuxième surface en

deux points dont un n'est pas sur D et appartient à Γ. Pour obtenir ce point, on observe que le plan des deux droites D et G coupe la deuxième surface suivant la droite D et suivant une autre droite G_1 dont l'intersection avec G définit le point cherché.

La tangente à l'intersection en ce point est l'intersection des plans tangents. Il y a avantage à déterminer chacun de ces plans tangents par les deux génératrices qu'il contient.

Les directions asymptotiques et les asymptotes de l'intersection s'obtiennent par la méthode ordinaire (518).

II. — *Trouver le sommet du paraboloïde engendré par une horizontale s'appuyant sur deux droites quelconques.*

La direction de l'axe est l'intersection de deux plans directeurs, c'est-à-dire l'intersection du plan horizontal et d'un plan parallèle aux deux droites données Δ et Δ_1. Un plan quelconque perpendiculaire à l'axe coupe les deux plans directeurs suivant les deux droites respectives D et D_1. Le plan tangent au sommet est parallèle à ces deux droites, et il est par suite déterminé par les droites qui s'appuient sur Δ et sur Δ_1 et qui sont respectivement parallèles à D et à D_1.

III. — *Section faite par un plan de bout dans un paraboloïde engendré par une horizontale s'appuyant sur deux droites quelconques.*

Soient D et Δ les deux directrices. On obtient un point quelconque de la section par la méthode générale, qui consiste à déterminer le point de rencontre d'une génératrice de la surface avec le plan sécant.

Pour obtenir la tangente en ce point, on détermine l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface au point considéré. On détermine le plan tangent au moyen des deux génératrices qu'il contient et dont l'une est la génératrice horizontale qui a fourni le point ; quant à l'autre, on en connaît la projection verticale, qui passe par la projection verticale du point et par l'intersection des projections verticales des deux droites D et Δ : ceci résulte de ce qu'elle rencontre toutes les génératrices horizontales de la surface et en particulier la génératrice de bout. On achève de la déterminer par son point de rencontre avec une génératrice horizontale quelconque.

Les directions asymptotiques sont celles des génératrices parallèles au plan sécant. L'une est de bout, et l'autre a sa projection verticale parallèle à la trace verticale du plan sécant ; sa projection verticale passe d'ailleurs par l'intersection des projections verticales de D et de Δ. Les asymptotes correspondantes sont les droites d'intersection du plan sécant avec les plans parallèles aux plans directeurs et menés respectivement par les génératrices parallèles au plan sécant.

Si le plan sécant était quelconque, les divers éléments de la section s'obtiendraient par des constructions analogues.

IV. — *Un cylindre de révolution à axe vertical est défini par sa base dans le plan horizontal. On considère le paraboloïde engendré par une horizontale qui s'appuie sur une génératrice* G *du cylindre et sur une droite quelconque* D; *trouver l'intersection des deux surfaces.*

On a à trouver l'intersection de deux quadriques qui ont une génératrice commune, G. Cette intersection se compose donc de la génératrice G et d'une cubique gauche Γ. On obtient un point quelconque de cette cubique par la méthode générale qui consiste à déterminer les points de rencontre de l'une des surfaces avec une génératrice de l'autre surface. On cherche donc le deuxième point de rencontre d'une génératrice horizontale du paraboloïde avec le cylindre. Les développements du problème précédent peuvent être repris ici pour la détermination de la tangente. Il est bon d'ailleurs d'observer que les projections horizontales des génératrices non horizontales du paraboloïde sont parallèles à la projection horizontale de D, parce que le deuxième plan directeur est vertical et parallèle à D. Cette remarque permet de simplifier les constructions.

L'intersection présente un point à l'infini et l'asymptote correspondante est la génératrice G. Celle-ci est rencontrée par l'intersection en un deuxième point à distance finie (le premier est à l'infini), qui est évidemment situé dans le plan tangent au cylindre suivant la génératrice G, parce qu'en ce point les deux surfaces ont le même plan tangent. On obtient alors le point cherché en déterminant la génératrice horizontale du paraboloïde située dans le plan tangent au cylindre le long de la génératrice G.

Des considérations analogues permettent de résoudre le problème suivant :

V. — *On donne deux droites* D *et* Δ. *On fait tourner* D *autour de la verticale de l'un de ses points, et l'on demande de construire l'intersection de ce cône et du paraboloïde engendré par une horizontale qui s'appuie sur* D *et sur* Δ.

VI. — *Contour apparent sur le plan horizontal du paraboloïde engendré par une horizontale qui s'appuie sur deux droites données* D *et* Δ.

Soit H une génératrice horizontale quelconque du paraboloïde. Le plan vertical mené par H est un plan tangent dont le point de contact est sur le contour apparent horizontal. On obtient ce point en cherchant la génératrice de même système que D et Δ située dans le plan vertical qui contient H. On la détermine facilement ici, en observant qu'elle passe par un point connu et qu'elle s'appuie sur deux horizontales quelconques.

VII. — *On considère un cercle* C *dans un plan horizontal et deux droites* D *et* Δ *qui rencontrent respectivement le cercle en* A *et en* B. *Le cercle* C *et les deux droites* D et Δ *définissent une quadrique. Trouver : 1° le lieu des centres des cercles horizontaux de ces quadriques ; 2° un point du contour apparent horizontal de la surface.*

1° On détermine d'abord une troisième génératrice de la surface, par exemple la deuxième génératrice qui passe par le point A, et qui est dans le plan tangent à la surface en ce point. On peut alors déterminer une section circulaire horizontale quelconque par trois points, ce qui permet de déterminer le centre de cette section.

En joignant ce point au centre du cercle C, on a le lieu des centres demandé : ce lieu est une droite D_1.

2° Soit C_1 une section circulaire horizontale. Le cône circonscrit à la quadrique le long de C_1 a son sommet sur D_1. On obtient ce sommet par l'intersection de D_1 et du plan tangent en un point de C_1. On mène alors à ce cône les plans tangents verticaux, et on prend leurs points de contact avec le cercle C_1.

VIII. — *Une quadrique étant définie par trois droites* D_1, D_2, D_3, *dont on donne les projections, trouver le point de contact du plan qui passe par l'une d'elles et par un point donné.*

Supposons que ce plan passe par D_1 ; il coupe alors D_2 et D_3 respectivement en A_2 et en A_3. Le point demandé est l'intersection des deux droites A_2A_3 et D_2.

Rappelons à ce sujet que si par chacune des trois droites données on mène les couples de plans parallèles aux deux autres, on obtient un parallélépipède dont le centre coïncide avec le centre de la quadrique.

IX. — *On considère le paraboloïde hyperbolique défini par trois génératrices parallèles à un plan* P. *Mener à ce paraboloïde un plan tangent parallèle à un plan* Q.

Soient G_1, G_2, G_3 les trois génératrices données. Soient, d'autre part, D_1, D_2 deux génératrices rencontrant les trois premières. Soient enfin D l'intersection des deux plans P et Q et D_3 la parallèle à D s'appuyant sur D_1 et sur D_2. Le plan demandé est le plan mené par D_3 et parallèle au plan P.

X. — *Contour apparent horizontal d'un paraboloïde dont on donne deux directrices et un plan directeur non parallèle à ces deux droites.*

On cherche le point du contour apparent horizontal situé sur une génératrice quelconque, G, de la surface, ce qui revient à trouver le point de contact du plan vertical mené par G. On détermine, pour cela, les points de rencontre de ce plan vertical avec deux génératrices de même système que G, et on se ramène ainsi à une construction faite pour le problème VIII.

XI. — *On considère le paraboloïde hyperbolique engendré par une horizontale qui s'appuie sur deux droites dont l'une est de front. On fait tourner cette droite autour d'une autre droite qui lui est parallèle. Intersection du paraboloïde et du cylindre ainsi engendré.*

Les deux surfaces ayant une génératrice commune, l'intersection se compose de cette génératrice et d'une cubique gauche qui rencontre la génératrice en un point à distance finie et en un point à l'infini.

En rapprochant ce problème du problème IV, on verra facilement la manière de le traiter dans tous ses détails.

XII. — *Une conique dans un plan horizontal et deux droites qui la rencontrent et qui ne sont pas dans le même plan définissent une quadrique. Section de la quadrique par un plan de bout. Points de contour apparent horizontal situés sur la conique.*

Soient G et G_1 les deux droites et Γ la conique. Par tout point de Γ il passe une droite rencontrant G et G_1 et dont le point de rencontre avec le plan sécant est un point de l'intersection.

Le plan tangent à la surface en ce point est déterminé par les deux génératrices de systèmes différents qui y passent. On en connaît une et on détermine facilement l'autre en observant qu'elle est de même système que G et que G_1 et qu'elle rencontre Γ. Le plan tangent à la surface étant déterminé, on sait déterminer la tangente.

Pour trouver les points du contour apparent horizontal situés sur Γ, on considère le cône circonscrit à la surface suivant cette conique, et on lui mène les plans tangents verticaux. On peut déterminer le sommet du cône par l'intersection de trois plans tangents dont les points de contact sont sur Γ.

XIII. — *Sur un hyperboloïde de révolution à une nappe à axe vertical on prend deux génératrices* A, B *et on considère une troisième droite donnée*, C, *dont la projection horizontale passe par le point de rencontre des projections horizontales de* A *et de* B. *En considérant les trois droites* A, B, C *comme les directrices d'un second hyperboloïde, on demande de déterminer l'intersection des deux surfaces.*

Les deux surfaces ont deux génératrices communes A et B de même système. L'intersection se compose donc de ces deux droites et de deux autres génératrices qui rencontrent A et B : il s'agit alors de trouver ces deux génératrices. Pour cela, on observe qu'elles doivent rencontrer toutes les génératrices du second hyperboloïde qui sont de même système que A et que B. Or, parmi ces génératrices, il est aisé de voir qu'il y en a une qui est verticale : en effet, puisque les projections horizontales de A, B, C passent par le même point, la verticale de ce point rencontre A, B, C et est, par suite, une génératrice du second hyperboloïde et de système différent de A, B, C ; comme les génératrices d'un hyperboloïde sont deux à deux parallèles, il y a, sur le second hyperboloïde, une autre génératrice verticale, qui est nécessairement de même système que A, B, C. Pour l'obtenir, il suffit de construire les projections horizontales de deux génératrices de l'autre système ; par exemple, en menant le plan qui projette verticalement A, et en joignant les points de rencontre de ce plan avec

B et C on en obtient une ; on obtient l'autre d'une manière analogue avec le plan qui projette verticalement B. Soit donc Δ la deuxième génératrice verticale du second hyperboloïde ; elle rencontre l'hyperboloïde de révolution en deux points, et les génératrices communes sont les génératrices de cet hyperboloïde qui passent par ces deux points et qui rencontrent A et B.

Si la droite C est une droite quelconque, le problème qu'on vient de résoudre fournit une méthode pour trouver les points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

XIV — *Etant donné un hyperboloïde de révolution à axe vertical, lui mener les plans tangents qui passent par une droite perpendiculaire à l'axe.*

XV. — *Le plan horizontal étant un plan directeur commun à deux paraboloïdes hyperboliques, trouver les points à l'infini et les asymptotes de l'intersection de ces deux surfaces.*

Soient P le plan directeur non horizontal du premier paraboloïde et Q le plan directeur analogue du second. L'intersection Δ de ces deux plans est une première direction asymptotique de l'intersection. Soient G_1 et G_2 les deux génératrices parallèles à Δ et appartenant respectivement aux deux paraboloïdes. L'asymptote parallèle à Δ est l'intersection de deux plans : le premier mené par G_1 parallèlement au plan P ; le deuxième mené par G_2 parallèlement au plan Q.

Les deux paraboloïdes ont d'ailleurs en commun la droite à l'infini dans le plan horizontal et se coupent, par suite, suivant cette droite et suivant une cubique gauche qui la rencontre en deux points. Il s'agit maintenant de déterminer ces deux points et les tangentes correspondantes. Pour cela, coupons les deux paraboloïdes par un plan horizontal variable H ; nous obtenons ainsi deux génératrices A et B situées respectivement sur les deux paraboloïdes. Quand H varie, ces deux génératrices tracent deux divisions homographiques sur la droite de l'infini. Si donc par un point quelconque ω du plan horizontal de projection, on mène les parallèles respectives a et b à A et à B, ces deux droites a et b engendrent deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles donnent les directions des points à l'infini demandés : soient d_1 et d_2 ces deux directions.

Il reste maintenant à trouver les asymptotes correspondantes. Cherchons par exemple l'asymptote parallèle à d_1. A cet effet, appelons D_1 la génératrice du premier paraboloïde parallèle à d_1 et D_2 la génératrice analogue du second. Observons d'ailleurs que D_1 et D_2 sont dans le même plan horizontal H_1, de sorte que l'asymptote cherchée est située dans ce plan, *qui est un plan tangent commun aux deux surfaces*. L'asymptote est de plus une génératrice du cylindre du *second degré* qui a pour directrice la cubique d'intersection et dont les génératrices sont parallèles à D_1. Ce cylindre est un cylindre hyperbolique dont un plan

directeur est horizontal, et le plan H_1 le coupe suivant une génératrice qui est l'asymptote demandée.

XVI. — *On considère le paraboloïde engendré par une horizontale qui glisse sur deux droites quelconques ne se rencontrant pas. Trouver le pôle, par rapport à ce paraboloïde, d'un plan de bout donné.*

Soit P le plan de bout donné. On détermine d'abord le point de contact du plan tangent parallèle au plan P. Par ce point on mène la parallèle à la direction des diamètres (intersection des deux plans directeurs), et l'on cherche l'intersection de cette parallèle avec le plan tangent en un point quelconque de la section faite par le plan P dans le paraboloïde.

NOTE

SUR L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UNE QUADRIQUE ADMETTANT DES SECTIONS PLANES ELLIPTIQUES

Par **M. V. Hioux** (*).

I. — Nous établirons d'abord les propositions suivantes :

Théorème I. — *Lorsque deux quadriques ont un plan principal commun, si un plan* P *les coupe suivant des ellipses se projetant sur ce plan suivant des cercles :*

1° *Leurs autres plans principaux sont parallèles deux à deux ;*

2° *Leur ligne d'intersection se projette sur le plan principal commun suivant un cercle.*

Désignons par Q et Q_1 les quadriques données, prenons pour plan principal commun le plan des xy et pour plans coordonnés les plans principaux de la quadrique Q.

Les équations des deux quadriques seront de la forme

(Q) $z^2 + Ax^2 + A'y^2 + H = 0$ ou $z^2 + f(x, y) = 0$,

(Q_1) $z^2+A_1x^2+A'_1y^2+2B''_1xy+2D_1x+2E_1y+F_1=0$, ou $z^2+f_1(xy)=0$.

Un plan P non parallèle à celui des xy aura pour équation

(P) $z = mx + ny + p$.

Les deux projections ont respectivement pour équations

$$f(x, y) + (mx + ny + p)^2 = 0,$$
$$f_1(x, y) + (mx + ny + p)^2 = 0.$$

A cause de la forme de $f(x, y)$, la première projection ne saurait être un cercle que si l'on a $mn = 0$.

Supposons par exemple $n = 0$. Dès lors, pour que la seconde projection soit un cercle, on doit avoir $B''_1 = 0$.

Donc : 1° les deux coniques principales $f(x, y) = 0$ et $f_1(x, y) = 0$ ont nécessairement leurs axes parallèles, et par conséquent les plans principaux de Q et Q_1 qui passent par ces axes sont parallèles deux à deux.

D'autre part, avec $n = 0$ et $B''_1 = 0$, on doit avoir

$$m^2 + A = A' \qquad \text{et} \qquad m^2 + A_1 = A'_1,$$

ce qui entraîne la condition

$$A - A_1 = A' - A'_1.$$

(*) Cette note a paru dans la *Revue de Mathématiques spéciales*, 1896, p. 297.

Mais en éliminant z^2 entre les équations de Q et de Q_1, on obtient l'équation

$$(A - A_1)x^2 + (A' - A'_1)y^2 - 2D_1x - 2E_1y + H - F_1 = 0,$$

puisque $B''_1 = 0$, et on constate que cette équation représente un cercle. Le théorème est ainsi complètement démontré.

II. — Théorème II. — *Réciproquement, lorsque deux quadriques ont un plan principal commun, si leur ligne d'intersection se projette sur ce plan suivant un cercle :*

1° Leurs autres plans principaux sont parallèles ;

2° Un même plan P *peut les couper l'une et l'autre suivant des coniques se projetant sur le plan principal commun suivant des cercles.*

Les équations de Q et de Q_1 étant les mêmes que ci-dessus, la projection de leur ligne d'intersection sur le plan principal commun étant un cercle par hypothèse, on devra dans l'équation $Q - Q_1 = 0$ faire $B''_1 = 0$, ce qui entraîne le parallélisme des autres plans principaux. On aura en outre $A - A_1 = A' - A'_1$.

Mais, pour la quadrique Q par exemple, un plan P répondant à la question aura une équation telle que

$$z = mx + p \qquad \text{ou} \qquad z = ny + p.$$

Les sections faites par le premier plan dans les deux quadriques sont représentées en projection par les deux équations

$$f(x, y) + (mx + p)^2 = 0,$$
$$f_1(x, y) + (mx + p)^2 = 0.$$

Pour que la première soit un cercle, il faut que m satisfasse à la relation $m^2 + A = A'$, d'où $m^2 = A' - A$, ce qui exige $A' - A > 0$, condition que nous admettons.

Mais de la condition précédente on tire

$$A' - A = A'_1 - A_1.$$

Dès lors $\quad m^2 = A'_1 - A_1 \quad$ ou $\quad m^2 + A_1 = A'_1,$

ce qui prouve que la seconde projection est également un cercle, puisque $B''_1 = 0$. Le théorème est donc complètement démontré.

Remarques. — En démontrant le premier théorème, on a constaté pour la quadrique Q par exemple, que :

Si une section elliptique se projette suivant un cercle sur un plan principal, le plan de cette section est perpendiculaire à un autre plan principal.

Cette propriété peut se rapprocher de la propriété semblable concernant les plans cycliques.

En outre, si on se reporte à l'équation

$$f(x, y) + (mx + p)^2 = 0,$$

on voit que *la projection est un cercle focal de la conique principale* $f(x, y) = 0$.

Soit Σ le cylindre parallèle à l'axe des z ayant pour base ce cercle focal. La ligne d'intersection de Q et de Σ se compose de deux courbes planes, car on a

$$Q - \Sigma = z^2 - (mx + p)^2 = 0.$$

Le cylindre Σ est bitangent à la quadrique. Les points de contact des plans tangents communs sont les points de rencontre de la droite $mx+p=0$ et de $f(x, y)=0$.

Quand m est connu, si on fait varier p on a une série de plans P répondant à la question.

III. — Problème I. — *Etant donnée une quadrique, déterminer les plans de sections elliptiques qui se projettent sur un de ses plans principaux suivant des cercles.*

Prenons comme quadrique un ellipsoïde à trois axes inégaux et désignons par a, b, c les longueurs de ses demi-axes $(a > b > c)$.

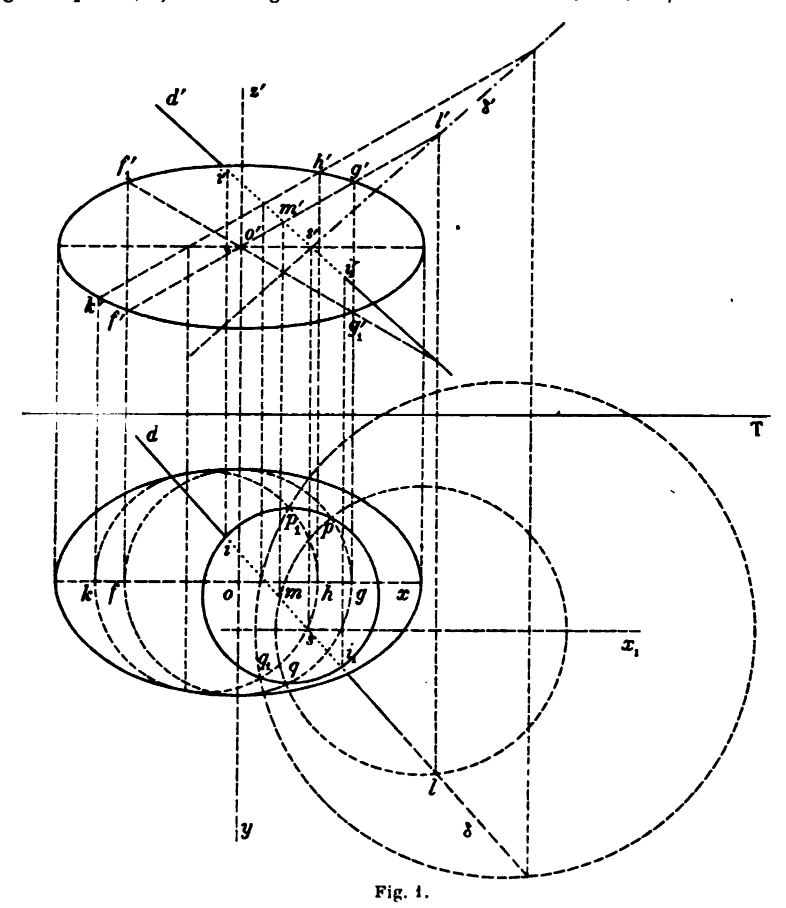


Fig. 1.

Plaçons l'ellipsoïde de façon que le plan de l'ellipse (a, b) soit parallèle au plan horizontal de projection (*fig.* 1) et le plan de l'ellipse (a, c) paral-

lèle au plan vertical. L'axe $2a$ se trouve être parallèle à la ligne de terre, l'axe $2b$ est perpendiculaire au plan vertical et l'axe $2c$ perpendiculaire au plan horizontal. Les contours apparents de la quadrique sont la projection horizontale de l'ellipse (a, b) et la projection verticale de l'ellipse (a, c).

Si on considère un cercle focal de l'ellipse (a, b), on vient de voir que ce cercle est la projection sur le plan de cette ellipse de deux sections elliptiques de la quadrique.

Parmi les cercles focaux ayant leurs centres sur l'axe $2a$, choisissons celui de centre O et de diamètre $2b$. Le cylindre Σ qui lui correspond est coupé par le plan de front de l'ellipse (a, c) suivant deux génératrices qui rencontrent cette ellipse en quatre points dont les projections verticales sont f', f'_1 et g', g'_1. Les droites $f'g'$ et $f'_1g'_1$ sont les traces verticales des plans des deux ellipses qui constituent l'intersection du cylindre Σ et de la quadrique. Ces plans sont perpendiculaires au plan vertical, et tout plan parallèle à l'un d'eux coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse se projetant sur le plan de l'ellipse (a, b) suivant un cercle focal de cette ellipse ayant son centre sur l'axe $2a$.

Le plan principal de projection étant le plan de l'ellipse (a, b), il n'y a pas lieu, en descriptive, de considérer les cercles focaux ayant leurs centres sur l'axe $2b$, car l'ellipsoïde est intérieur aux cylindres Σ qui leur correspondent.

IV. — Problème II. — *Construire un cône contenant une droite donnée ayant un plan principal commun avec une quadrique donnée, et dont l'intersection avec la quadrique se projette sur ce plan suivant un cercle.*

Conservons comme quadrique l'ellipsoïde considéré plus haut (*fig.* 1) et soit $(sd, s'd')$ la droite donnée rencontrant en (s, s') le plan de l'ellipse (a, b) qui servira de plan principal commun.

Les autres plans principaux de la quadrique et du cône devant être parallèles, ces plans seront pour le cône cherché le plan de front et le plan de profil passant par son sommet. Le plan mené par la génératrice donnée (D) et par l'axe vertical du cône le coupera suivant une seconde génératrice (Δ), symétrique de (D) par rapport au plan principal commun et figurée par $(s\delta, s'\delta')$.

Le plan de bout P, de trace verticale $f'g'$, coupe les deux génératrices (D) et (Δ) en (m, m') et en (l, l'). Il doit couper le cône suivant une ellipse se projetant horizontalement suivant un cercle passant par m et l et dont le centre se trouve sur sx_1 parallèle à la ligne de terre, parallèle par suite à l'axe $2a$ de l'ellipsoïde. Le cylindre ayant ce cercle pour base est coupé par le plan P suivant une ellipse qui peut servir de base au cône de sommet (s, s').

Le cône se trouve ainsi parfaitement déterminé.

Son intersection avec l'ellipsoïde se projettera suivant un cercle sur le plan de l'ellipse (a, b), c'est-à-dire sur le plan horizontal.

REMARQUE. — 1° Le cône en question peut avoir ses deux nappes de part et d'autre du plan principal commun ou de part et d'autre du plan de profil perpendiculaire à l'axe $2a$ de l'ellipsoïde. Mais cela n'a aucune importance, car pour l'épure on ne fait intervenir que les deux génératrices (D) et (Δ). Il est donc inutile de figurer le cône.

2° Il peut arriver que les projections verticales de ces droites soient respectivement parallèles aux traces $f'g'$ et $f'_1g'_1$ des plans de sections elliptiques considérés. Alors le cône est un système de deux plans dont l'un suffit pour trouver l'intersection cherchée.

V. — Ces diverses questions traitées, on peut facilement résoudre le problème de géométrie descriptive que l'on avait en vue.

Supposons que la quadrique donnée soit l'ellipsoïde représenté figure 1 de manière que deux de ses plans principaux soient parallèles aux plans de projection.

Ayant choisi pour plan principal commun à cet ellipsoïde et au *cône auxiliaire* le plan de l'ellipse (a, b), on commence par résoudre le problème I, ce qui fournit les traces verticales $f'g'$ et $f'_1g'_1$ des plans de sections elliptiques se projetant horizontalement suivant des cercles.

A la droite donnée $(sd, s'd')$ perçant le plan principal commun en (s, s') on associe sa symétrique $(s\delta, s'\delta')$ par rapport à ce plan.

Le plan cyclique (en projection) de trace verticale $f'g'$ coupe l'ellipsoïde et le cône auxiliaire suivant deux ellipses dont les projections horizontales sont les deux cercles mentionnés dans le problème II. Ces deux cercles se coupent en deux points p et q.

Un second plan de bout, de trace verticale $k'h'$, parallèle à $f'g'$, coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse dont la projection horizontale est un cercle de diamètre kh. Le même plan coupe le cône suivant une ellipse se projetant horizontalement suivant un cercle dont le centre est sur sx_1 et dont on a deux points sur ds. Ces deux cercles se coupent en p_1 et q_1.

Par trois des quatre points p, q, p_1, q_1, on fait passer un cercle qui passe nécessairement par le quatrième puisque la projection horizontale cherchée est un cercle.

Ce cercle coupe sd en deux points i et i_1 qui sont les projections horizontales des points de rencontre demandés. Ces points sont (i, i') et (i_1, i'_1).

Les plans tangents en ces points ont pour intersection la polaire conjuguée de la droite donnée par rapport à l'ellipsoïde.

REMARQUE. — Si $s'd'$ était parallèle à $f'_1g'_1$, le plan de bout de trace verticale $s'd'$ couperait l'ellipsoïde suivant une ellipse se projetant horizontalement suivant un cercle, lequel couperait sd en deux points. On aurait donc immédiatement les projections horizontales des points de rencontre demandés et on en déduirait les projections verticales.

Substitution au cône auxiliaire d'un hyperboloïde homothétique.

VI. — Si le cône auxiliaire n'est pas un système de deux plans, on peut

lui substituer un hyperboloïde à une nappe dont il soit le cône asymptote. Supposons (*fig.* 2) que le plan de l'ellipse (a, b) soit dans le plan horizontal de projection et que le cône auxiliaire, de sommet (s, s'), ait ses deux nappes de part et d'autre de ce plan.

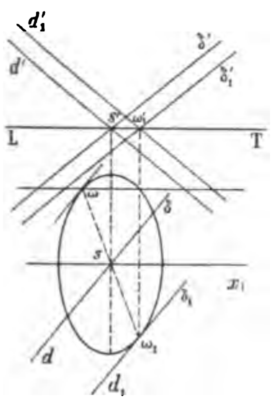


Fig. 2

Un hyperboloïde à une nappe ayant pour cône asymptote le cône auxiliaire sera coupé par le plan principal commun suivant une ellipse de centre (s, s'), projection d'une section plane horizontale du cône.

Soit $\omega\omega_1$ le diamètre conjugué de sd dans cette ellipse de gorge de l'hyperboloïde (H).

Le plan tangent à (H) au point ω_1 le coupe suivant deux génératrices respectivement parallèles aux deux génératrices de son cône asymptote, représentées en $(sd, s'd')$ et en $(s\delta, s'\delta')$.

Faisons subir à l'hyperboloïde une translation égale et parallèle à $s\omega$. Son centre s viendra en ω ; et comme le point ω_1 vient en s, les deux génératrices qui se croisent en ω_1 viendront se placer sur les génératrices correspondantes du cône.

Après ce déplacement, comme avant, le cône, l'hyperboloïde et l'ellipsoïde admettent les mêmes plans de sections elliptiques se projetant suivant des cercles sur leur plan principal commun.

Les cercles provenant de l'hyperboloïde ont leurs centres sur l'axe parallèle à la ligne de terre et passant par son centre ω. En outre cet hyperboloïde admet comme génératrices les droites $(sd, s'd')$ et $(s\delta, s'\delta')$. On peut donc *sans le figurer* l'utiliser pour résoudre le problème proposé. D'ailleurs, dans sa première position on peut lui donner comme ellipse de gorge la projection d'une section horizontale arbitraire de son cône asymptote.

On peut donc dans sa nouvelle position supposer son centre ω sur l'axe $2a$ de l'ellipsoïde, sans s'astreindre à fixer la position de ce centre.

Le plan de front passant par le centre de l'ellipsoïde sera dès lors un second plan principal commun aux deux quadriques.

Les couples de cercles à tracer sur le plan horizontal auront leurs centres sur une même droite parallèle à la ligne de terre.

Telle est la solution de M. Rémoy publiée dans la Géométrie descriptive de M. Caron.

Toutefois, si le point s se trouvait sur l'axe $2a$ de l'ellipsoïde, l'emploi du cône serait tout indiqué.

Si la quadrique donnée est de révolution autour d'un axe vertical, par exemple, le cône auxiliaire est aussi de révolution autour d'un axe parallèle au premier. Deux sections planes horizontales suffiront pour

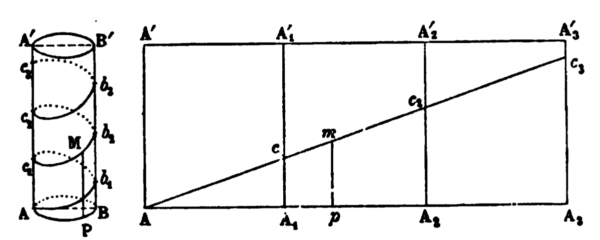
déterminer l'intersection d'une droite et d'une pareille quadrique.

Dans le cas de la surface gauche de révolution, le procédé de M. Rouché peut être remplacé par la méthode du cône auxiliaire en question, laquelle est tout à fait générale et peut s'appliquer facilement, soit à l'ellipsoïde, soit au paraboloïde de révolution.

NOTIONS SUR L'HÉLICE

Définition de l'hélice. — On appelle *hélice* une ligne tracée sur la surface d'un cylindre et dont la transformée par développement est une ligne droite. En d'autres termes, l'hélice est la courbe en laquelle se transforme une droite d'un plan quand on enroule ce plan sur la surface d'un cylindre. Nous supposerons, dans ce qui suit, que le cylindre est un cylindre circulaire droit.

Soit alors $Ac_1c_2c_3\dots$ une droite d'un plan. Divisons ce plan en rectangles $AA_1A'A'_1$, $A_1A_2A'_1A'_2$, etc., tels que chacun d'eux s'enroule exactement sur le cylindre. La portion Ac_1 de la droite considérée devient ainsi, sur la surface du cylindre, un arc de courbe Ab_1c_1 qui part du point A de la génératrice AA' et aboutit au point c_1 de la même génératrice. De même,



la portion c_1c_2 de la droite devient un arc $c_1b_2c_2$, à la suite du premier, et identique au premier, et ainsi de suite. Chacun de ces arcs s'appelle une *spire* de l'hélice, et la longueur Ac_1 sur le cylindre, égale à la longueur A_1c_1 sur le plan, s'appelle le *pas* de l'hélice.

Il suit de la définition de l'hélice que cette ligne est indéfinie, si la surface du cylindre est indéfinie, et qu'elle est rencontrée par chaque génératrice en une infinité de points. L'arc d'hélice compris entre deux points de rencontre consécutifs est ce que nous avons appelé une spire ; de même la portion de la génératrice comprise entre ces deux points est le pas de l'hélice.

On appelle *abscisse curviligne* d'un point M de l'hélice, l'arc AP de la section droite du cylindre, ou cet arc augmenté d'une fois, de deux fois, etc. la longueur de cette section droite, suivant que le point M a été obtenu en enroulant le premier rectangle, le deuxième rectangle, etc. Si

le point M a été obtenu en enroulant le premier rectangle, l'abscisse curviligne est l'arc AP ; si le point M a été obtenu en enroulant le deuxième rectangle à la suite du premier, l'abscisse curviligne est égale à l'arc AP augmenté de la longueur de la section droite, etc.

Dans tous les cas la longueur MP s'appelle l'*ordonnée* du point M par rapport à la section droite qui passe par le point A du cylindre : elle est égale à la distance au côté AA_3 du rectangle $AA_3A'A'_3$, du point de la droite $Ac_1c_2c_3\ldots$ qui est la transformée de l'hélice quand on développe la surface du cylindre sur un plan.

Théorème. — *Le rapport entre l'ordonnée d'un point quelconque de l'hélice et son abscisse curviligne est constant et égal au rapport du pas à la circonférence de base du cylindre.*

Soient M (fig. précédente) un point de l'hélice et m le point correspondant du plan quand on développe la surface latérale du cylindre sur ce plan. L'abscisse curviligne et l'ordonnée du point M sont respectivement égales à Ap et à mp. Or, les deux triangles semblables Amp et Ac_1A_1 donnent l'égalité

$$\frac{mp}{Ap} = \frac{c_1A_1}{AA_1},$$

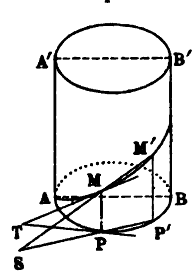
dans laquelle c_1A_1 est égale au pas et AA_1 à la longueur de la circonférence de base. La proposition résulte évidemment de là.

Théorème. — *La tangente en un point quelconque d'une hélice fait un angle constant avec les génératrices du cylindre.*

Nous avons prouvé que le développement de la surface latérale d'un cône ou d'un cylindre conserve les longueurs et les angles des lignes tracées sur cette surface. Or, la droite qui est la transformée par développement de l'hélice fait des angles constants avec les génératrices du cylindre ; il en résulte que la tangente à l'hélice fait un angle constant avec ces génératrices.

Voici, au surplus, la démonstration directe de cette proposition.

Soient M et M' deux points voisins d'une hélice. Menons les génératrices MP et M'P' de ces deux points ainsi que les sécantes MM' et PP' ; ces deux sécantes sont situées dans le même plan et se rencontrent en un point S, de sorte que les deux triangles semblables SMP et SM'P' donnent



$$(1) \qquad \frac{MP}{SP} = \frac{M'P'}{SP'}.$$

Mais, d'après le théorème précédent, on a

$$\frac{MP}{\text{arc } AP} = \frac{M'P'}{\text{arc } AP'}.$$

En divisant ces égalités membre à membre, il vient

$$\frac{SP}{\text{arc } AP} = \frac{SP'}{\text{arc } AP'};$$

d'où, en retranchant les numérateurs entre eux et

les dénominateurs entre eux,

$$\frac{\text{SP}}{\text{arc AP}} = \frac{\text{SP}'}{\text{arc AP}'} = \frac{\text{corde PP}'}{\text{arc PP}'}.$$

Cela posé, supposons que le point M′ se rapproche indéfiniment du point M ; alors les sécantes MM′ et PP′ ont pour limites respectives la tangente en M à l'hélice et la tangente en P à la section droite, tangentes qui se rencontrent en un point T, position limite du point S ; d'autre part, le rapport $\frac{\text{corde PP}'}{\text{arc PP}'}$ est le rapport d'une corde à son arc et a pour limite l'unité ; il en résulte que l'on a

$$\lim \frac{\text{SP}}{\text{arc AP}} = 1$$

et, par suite,

$$\lim \text{SP} = \text{arc AP}.$$

Mais la limite de SP est égale à TP, puisque le point S a pour limite le point T ; donc, en vertu de l'égalité (1) et du théorème précédent, le rapport $\frac{\text{MP}}{\text{TP}}$ est constant, ce qui signifie que le triangle TMP reste semblable à lui-même et que, par suite, l'angle TMP est constant ; ce qui démontre la proposition.

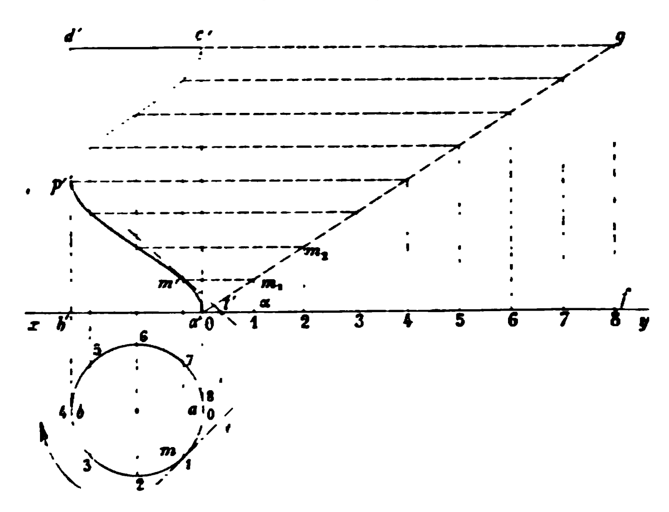
Corollaire. — *La sous-tangente en un point d'une hélice est égale à l'abscisse curviligne du point de contact de la tangente.*

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent. En effet, la sous-tangente en M, par rapport à une section droite déterminée, est la projection TP sur le plan de cette section, de la portion de la tangente en M comprise entre le point de contact et le plan de section droite.

Projection d'une hélice sur un plan parallèle à son axe. — Nous prendrons le plan parallèle à l'axe comme plan vertical de projection et nous prendrons comme plan horizontal, le plan de base du cylindre sur lequel l'hélice est tracée. Tous les points de la surface du cylindre, et en particulier tous les points de l'hélice, sont projetés horizontalement sur le cercle de base du cylindre ; tous les points de la surface du cylindre sont projetés verticalement à l'intérieur du rectangle $a'b'c'd'$ ayant pour base et pour hauteur le diamètre et la hauteur du cylindre.

Cela posé, nous allons construire la projection verticale d'une spire d'hélice. Pour cela, dans le plan vertical, et en prenant la ligne de terre comme base, traçons le rectangle qui représente le développement de la surface latérale du cylindre ; soit $a'fgc'$ ce rectangle et soit $a'g$ la diagonale dont l'enroulement sur la surface du cylindre donne la spire d'hélice dont nous cherchons la projection verticale. Partageons la base du cylindre et $a'f$ en un même nombre de parties égales et aux points correspondants mettons les mêmes numéros. Le point de l'hélice projeté sur la division 1 du cercle de base provient du point m_1 de fg ; le point projeté sur la division 2 provient du point m_2, et ainsi de suite. Comme les cotes ne chan-

gent pas quand on enroule le rectangle $a'fgc'$ sur la surface du cylindre, on voit que la projection verticale du point de l'hélice projeté en m, sur la division 1, se trouve sur la ligne de rappel menée par m et sur la paral-



lèle à xy menée par m_1 ; on opère d'une manière analogue pour tous les autres points, et l'on a ainsi la projection verticale $a'm'p'c'$ demandée. L'arc $a'm'p'$ est vu et l'arc $p'c'$ est caché.

Construction de la tangente. — Construisons maintenant la tangente à l'hélice en un point quelconque (m, m') ; nous allons pour cela nous appuyer sur ce que *la sous-tangente en un point de l'hélice est égale à l'abscisse curviligne de ce point*. Or, l'abscisse curviligne du point (m, m') est ici $a'\alpha$; d'autre part la sous-tangente est dirigée suivant la tangente en m au cercle de base du cylindre. Si donc, sur cette tangente, nous portons dans le sens convenable (contraire à celui de l'enroulement du rectangle $a'fgc'$), une longueur mt égale à l'abscisse curviligne, c'est-à-dire à $a'\alpha$, le point (t, t') ainsi obtenu sera la trace horizontale de la tangente en (m, m') ; les projections de la tangente sont mt et $m't'$.

Remarque. — Le même problème, dans le cas où l'hélice est tracée sur un cylindre de révolution à axe quelconque, se traite de la même façon par des changements de plans.

EXERCICES DIVERS

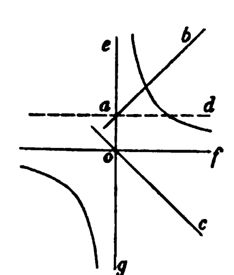
---

1. On donne deux droites D et Δ par leurs projections. On fait tourner D autour de Δ et l'on demande de trouver les points de la surface ainsi obtenue situés sur une verticale donnée s'appuyant sur Δ.

En faisant tourner la verticale donnée autour de Δ on engendre un cône, et on se ramène facilement à la détermination des points de rencontre de D avec ce cône.

2. Mener par un point du plan bissecteur du second dièdre un segment de droite de longueur donnée faisant un angle de 45° avec le plan horizontal et un angle de 60° avec le plan vertical ; discussion du problème.

3. On considère une hyperbole équilatère et une droite *ad* parallèle à l'asymptote *of* ; on mène les bissectrices *ab*, *oc* des angles *dae* et *fog* ; déterminer l'intersection de l'hyperboloïde engendré par l'hyperbole équilatère tournant autour de *oc* avec le cône engendré par *ad* tournant autour de *ab* ; trouver les asymptotes de l'intersection.



4. Intersection d'un paraboloïde de révolution à axe vertical et d'un cylindre de révolution à axe également vertical. Pourquoi est-ce une courbe plane ?

5. Deux cônes ayant une courbe plane commune, on demande de trouver l'autre. Déterminer les points communs aux deux courbes et les tangentes en ces points.

6. Trouver la trace sur le plan horizontal du cône de sommet donné circonscrit à un paraboloïde hyperbolique engendré par une horizontale qui glisse sur deux droites données. Nature de cette courbe.

7. Contours apparents d'un hyperboloïde de révolution autour d'un axe de front engendré par une verticale.

8. On donne deux coniques tangentes au plan vertical de projection au même point. La première conique est la base d'un cylindre tangent au plan vertical ; la seconde conique est la base d'un cône. On suppose que les deux surfaces sont tangentes au point où les deux coniques touchent le plan vertical et que l'on donne une asymptote de l'intersection. Où est le sommet du cône ? On se donne le sommet du cône, trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point. Trouver les asymptotes.

9. Un hyperboloïde de révolution à axe vertical est défini par son axe et par une génératrice de front. On le coupe par un plan de bout et on prend la section comme base d'un cône de sommet donné ; trouver le contour apparent horizontal de ce cône.

10. On donne un point (a, a') et une droite (Δ, Δ') passant par ce point. Mener par (Δ, Δ') un plan faisant un angle donné avec le plan qui passe par la ligne de terre et par le point (a, a').

11. On donne une circonférence dans le plan horizontal et deux points (a, a') et (o, o'). Existe-t-il une quadrique passant par (a, a') et par la circonférence et ayant pour centre le point (o, o') ? Trouver le plan tangent au point (a, a') et les sections circulaires de cette surface.

12. On mène une droite Δ parallèle à une génératrice G d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical, et on fait tourner G autour de Δ. Intersection de l'hyperboloïde et du cylindre ainsi engendré.

13. On considère toutes les horizontales qui s'appuient sur deux droites de front données. Lieu des projections d'un point donné sur ces horizontales.

14. On donne deux droites Sa, Sb faisant entre elles un angle de 60° ; elles représentent la méridienne d'un cône de révolution autour de la bissectrice de l'angle aSb. On considère, d'autre part, un cylindre de rayon donné ayant pour axe la perpendiculaire à cette bissectrice dans le plan aSb. Intersection des deux surfaces. Points remarquables avec leurs tangentes.

15. On fait tourner une droite D autour d'une autre droite Δ. Section de la surface obtenue par le plan bissecteur du second dièdre.

16. Lieu des sommets des cônes passant par une conique donnée dans le plan horizontal et par deux points donnés. Tangente en un point du lieu. Si le cône passe par trois points donnés, combien y a-t-il de sommets ?

17. Contour apparent horizontal du cône de sommet donné ayant pour base la section faite dans une sphère par un plan donné.

18. Lieu des pieds des perpendiculaires menées par un point donné sur les plans tangents à un cône de sommet donné, ayant pour base un cercle donné dans le plan horizontal.

19. Soit Δ une génératrice principale d'un hyperboloïde de révolution à axe vertical. Dans un plan horizontal on considère une circonférence rencontrant Δ et on prend cette circonférence comme base d'un cylindre passant par Δ. Trouver les plans tangents communs à l'hyperboloïde et au cylindre.

20. On donne un cylindre vertical ayant pour base dans le plan horizontal une ellipse dont le grand axe est parallèle à la ligne de terre. Trouver l'intersection de ce cylindre avec une sphère ayant son centre dans le plan de front du grand axe de cette ellipse et dont le contour apparent vertical est tangent à celui du cylindre.

21. On donne un ellipsoïde de révolution allongé à axe vertical et un ellipsoïde de révolution aplati à axe vertical, ayant même plan méridien principal. Intersection de ces deux surfaces ; points remarquables et tangentes en ces points. Nature de la projection verticale.

22. On considère la surface de révolution engendrée par une courbe gauche donnée par ses projections tournant autour d'un axe quelconque. Section de cette surface par le plan bissecteur du second dièdre.

23. Intersection d'un cône de révolution à axe de front et d'une sphère ayant son centre dans le plan de front de l'axe du cône.

24. Déterminer l'axe et le sommet du contour apparent horizontal d'un paraboloïde hyperbolique engendré par une horizontale qui s'appuie sur deux droites quelconques.

25. Les bases de deux cylindres sont deux hyperboles conjuguées situées dans le plan horizontal. Intersection de ces deux surfaces.

26. Intersection d'un tore à axe vertical et d'un cylindre de bout ayant pour base la demi-méridienne principale du tore. Que peut-on dire de la nature de cette courbe et de ses projections ?

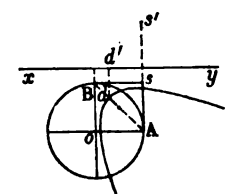
27. Mener par un point les plans tangents à un cylindre dont la base est donnée dans le second plan bissecteur. Reconnaître si les génératrices de

contact sont vues en projection verticale. Trouver la trace de ce cylindre sur l'autre plan bissecteur. Que faut-il se donner pour définir le premier plan bissecteur? Pourquoi n'est-il pas besoin de la ligne de terre pour définir le second ?

28. On donne le contour apparent vertical d'un cône de révolution ; on donne de plus une génératrice de contour apparent horizontal ; on demande de déterminer l'axe et le contour apparent horizontal de ce cône.

29. On donne le contour apparent vertical d'un cône de révolution à axe de front. On donne aussi un cylindre de révolution dont l'axe est situé dans le même plan de front et est perpendiculaire à celui du cône. Intersection des deux surfaces. Nature et sommets de la projection verticale.

30. On donne un cercle dans le plan horizontal et l'on considère le carré $oABs$; on prend le point (s, s') dont la cote est égale au rayon du cercle ; c'est le sommet d'un cône dont la base est le cercle considéré. On donne, ensuite, dans le plan horizontal, une parabole dont l'axe est BA, le sommet (d, d') et le foyer le milieu de BA. Cette parabole est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à $(ds, d's')$. Déterminer un point de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point. Nature des branches infinies. Nombre des points doubles en projection horizontale.



31. Une ellipse dans le plan vertical est une section principale d'un ellipsoïde dont les sections horizontales sont des cercles. Montrer que la surface est déterminée et trouver ses points de rencontre avec une droite.

32. Normale commune à un cylindre parabolique et à un cône, la base du cylindre étant dans le plan horizontal et celle du cône dans le plan vertical.

33. On donne la méridienne d'un tore à axe vertical et on considère la sphère qui a pour grand cercle une circonférence tangente intérieurement à une demi-méridienne et extérieurement à l'autre. Intersection des deux surfaces.

34. On donne une verticale et deux droites de front ; l'une d'elles en tournant autour de la verticale engendre un hyperboloïde ; toutes les deux sont directrices d'un paraboloïde hyperbolique dont un plan directeur est horizontal. Intersection des deux surfaces. Branches infinies.

35. On considère un paraboloïde de révolution à axe vertical ; on l'éclaire

par des rayons de front venant de gauche et d'en haut. Le paraboloïde est limité par un plan horizontal. Trouver les ombres propres et portées. L'ombre propre est une parabole égale à la parabole méridienne. Pourquoi le foyer de l'ombre portée est-il l'ombre du sommet du paraboloïde ?

36. Dans le plan horizontal on donne une ellipse et une droite. L'ellipse est la méridienne d'un ellipsoïde de révolution et la droite est la trace horizontale d'un plan dont on donne l'angle avec le plan horizontal. Mener à l'ellipsoïde un plan tangent parallèle au plan donné.

37. On donne deux paraboles dans le plan horizontal. Les axes de ces paraboles sont les projections horizontales de deux cylindres ayant pour bases les paraboles correspondantes. Intersection des deux surfaces. Nature de la projection horizontale.

38. On donne deux coniques dans deux plans différents, l'une dans un plan horizontal, l'autre dans un plan de front. Peuvent-elles être les perspectives d'une même conique par rapport à deux points de vue différents ?

39. On donne un cône de révolution par son sommet et par sa base qui est un cercle du premier plan bissecteur, une droite quelconque parallèle à la ligne de terre et un point a de la ligne de terre. Mener par le point a une droite s'appuyant sur la droite donnée et sur le cône.

40. Par deux points donnés mener un plan dont les traces sur les plans de projection fassent un angle donné.

41. On prendra comme origine le centre de la feuille, comme axe des x ou ligne de terre le petit axe de la feuille, comme axe des y une ligne de bout, l'axe des z étant vertical. On donne :

1° Un hyperboloïde de révolution S à axe vertical o $(x = 0,\ y = 10^{cm})$ ayant pour génératrice principale la droite AA′ passant par (a, a') $[x = 0,\ y = 14,\ z = 10]$ et par (α, α') $[x = -10,\ y = 14,\ z = 0]$;

2° Un hyperboloïde S_1 ayant pour directrices : 1° AA′ ; 2° BB′ qui passe par (o, o') $[x = 0,\ y = 10,\ z = 10]$ et par (β, β') $[x = 10,\ y = 10,\ z = 0]$; 3° la ligne de bout (C, C′) $[x = -2,\ z = 6]$.

Représenter la surface opaque de l'hyperboloïde de révolution S contenue dans l'hyperboloïde S_1.

On vérifiera numériquement les directions des asymptotes de l'intersection en calculant les angles de leurs projections horizontales avec la ligne de terre.

(*École normale, concours de 1896.*)

SUJETS DE CONCOURS

I. — École Polytechnique.

1864. — Le problème consiste à représenter la surface engendrée par la révolution d'une ellipse autour d'une droite située hors du plan de cette courbe.

L'axe de révolution est la droite verticale (o, $o'z$). L'ellipse génératrice est donnée dans sa position initiale par ses projections (ABCD, M'N') et par les traces LG, GH de son plan; ce plan est perpendiculaire au plan vertical.

Le grand axe de l'ellipse ABCD passe par la trace horizontale o de l'axe de révolution. On tracera le contour apparent de la surface sur chacun des plans de projection. Les deux courbes méridiennes situées dans le plan vertical OL seront entièrement construites, et on distinguera par la ponctuation celles de leurs parties qui sont vues de celles qui sont cachées.

Ellipse ABCD : grand axe $AC = 90^{mm}$; petit axe $BD = 44^{mm}$.

$oo' = 72^{mm}$, $OL = 68^{mm}$, $OI = 15^{mm}$,

$\widehat{AOL} = 45^\circ$, $\widehat{yGH} = 50^\circ$.

La droite OL est parallèle à la ligne de terre et le point I est le centre de l'ellipse ABCD.

1865. — On demande de représenter par ses contours apparents un solide terminé par un hyperboloïde de révolution et par deux plans : l'hyperboloïde a pour axe de révolution l'horizontale (AB, A'B') et pour génératrice la droite (CD, C'D') parallèle à la ligne de terre xy; les plans sont perpendiculaires à l'axe (AB, A'B') et également distants du centre de l'hyperboloïde. On supposera tracées sur ce solide 12 génératrices d'un même système; la génératrice donnée (CD, C'D') est l'une de ces douze droites. Ces génératrices, également espacées, seront représentées en tenant compte des parties vues et des parties cachées.

Les arcs d'hyperbole qui appartiennent aux contours apparents du solide seront simplement tracés tangentiellement aux projections de ces génératrices.

On achèvera de déterminer le contour apparent du solide sur le plan

vertical de projection en construisant quelques génératrices du système qui ne renferme pas la génératrice donnée; ces droites seront tracées comme lignes de construction.

A'B' et CD sont à 100^{mm} de la ligne de terre xy,
C'D' est à 25^{mm} de A'B'.

AB et CD comprennent un angle de 40°.

Les plans qui terminent le solide sont l'un et l'autre à 70^{mm} du centre de l'hyperboloïde.

xy est parallèle aux petits côtés de la feuille de dessin et à égale distance de ces côtés.

1866. — On donne une sphère pleine; on la coupe par un cône. On enlève de la sphère la partie qui est dans l'intérieur du cône. On demande de représenter par ses projections la sphère solide dans laquelle on a pratiqué ainsi une entaille conique. Le centre de la sphère est projeté en (o, o'). Les points o' et o sont à 100^{mm} de la ligne de terre. Le rayon de la sphère a 90^{mm} de longueur. La surface conique de l'entaille est engendrée par la droite A'B' qui tourne autour de l'axe EF.

Ces deux droites sont dans le plan mené par le centre de la sphère parallèlement au plan vertical de projection.

Pour les déterminer, on donne les dimensions suivantes :

$$oA = 60^{mm}, \quad oB = 30^{mm}, \quad o'D' = 30^{mm}, \quad o'C' = 45^{mm}.$$

N. B. — Prendre pour xy une droite parallèle aux petits côtés de la feuille et à égale distance de ces côtés.

1867. — Deux cônes sont circonscrits à une sphère; ils se coupent par conséquent suivant deux courbes planes. L'un de ces cônes est solide. On demande de représenter par ses projections la portion de ce cône solide qui est renfermée dans l'autre.

Le centre de la sphère est projeté en (o, o'); les points o' et o sont à 120^{mm} de la ligne de terre. Le rayon de la sphère a 60^{mm} de longueur.

Les cônes touchent la sphère suivant des petits cercles projetés verticalement en A'B', C'D'.

Pour déterminer ces droites, on donne les dimensions suivantes :

$$o'E' = 25^{mm}, \quad o'G' = 40^{mm}, \quad o'H' = 10^{mm}, \quad L'H' = 40^{mm}.$$

1868. — On demande de représenter par ses projections le corps engendré par un triangle équilatéral qui tourne autour d'un de ses côtés.

On construira directement les lignes de contour apparent, sur le plan horizontal, des surfaces coniques qui terminent ce corps. Ces droites serviront à tracer avec plus d'exactitude la projection de la circonférence décrite par le sommet opposé au côté qui sert d'axe de révolution.

Ce côté est projeté en $(ab, a'b')$. Pour déterminer les points a, a', b, b' on donne

$$pq = 7^{cm}, \quad a'p = 14^{cm}, \quad b'q = 10^{cm}, \quad ap = 15^{cm}, \quad bq = 5^{cm}.$$

On prendra la ligne de terre parallèlement aux petits côtés de la feuille de dessin et à égale distance de ces côtés.

Nota. — Pour construire les deux ellipses sur le plan horizontal et sur le plan vertical, on les considérera comme étant les projections d'un cercle de rayon connu tracé dans un plan donné.

1869. — Représenter le solide commun à une sphère et à un cône définis de la manière suivante :

La sphère est inscrite dans un cube ayant 15^{cm} de côté; la face inférieure du cube est dans le plan horizontal de projection et la face postérieure est dans le plan vertical.

Le cône est de révolution; il est tangent au plan horizontal, son sommet est le centre O de la face ABCD du cube, et son axe passe par le sommet (A, A') du cube.

Prendre la ligne de terre à égale distance des petits côtés de la feuille.

1870. — Intersection d'une sphère et d'un cylindre. Représenter par ses projections le solide qui reste après que l'on a enlevé de la sphère la portion qui se trouvait à l'intérieur du cylindre. La trace horizontale du cylindre est un cercle; les génératrices sont parallèles au plan vertical. On adoptera les données suivantes :

Rayon de la sphère $= 8^{cm}$; distance des projections du centre à la ligne de terre $= 11^{cm}$.

Rayon de la trace horizontale du cylindre $= 6^{cm}$; distance du centre à la ligne de terre $= 7^{cm}$; distance du même point au plan de profil qui passerait par le centre de la sphère $= 9^{cm}$.

Angle des génératrices du cylindre avec le plan horizontal $= 60°$.

1871. — Un triangle équilatéral de 5^{cm} de côté est situé dans un plan horizontal élevé de 6^{cm} au-dessus de la ligne de terre : un des côtés est parallèle au plan vertical et à 6^{cm} de ce plan.

On considère trois sphères ayant leurs centres aux points a, b, c et un rayon commun de 5^{cm}.

1° Construire l'intersection de ces trois sphères;

2° Représenter à part, sur la même feuille, le solide commun aux trois corps.

1872. — Trouver l'intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution définis de la manière suivante :

La sphère est tangente aux deux plans de projection et a 10^{cm} de rayon.

Le cylindre a 7^{cm} de rayon; son axe passe par le point le plus haut de la sphère, est parallèle au plan vertical et fait un angle de 45° avec le plan horizontal.

On représentera le solide commun au cylindre et à la sphère.

1873. — On donne un cylindre à bases parallèles; la base inférieure est un cercle situé dans le plan horizontal de projection; son axe est à 5^{cm} en avant de la ligne de terre et son rayon est 4^{cm}. Ses génératrices sont parallèles au plan vertical et font un angle de 45° avec le plan horizontal; sa hauteur au-dessus du plan horizontal est de 14^{cm}.

Une sphère de 7^{cm} de rayon ayant pour centre le milieu (I, I') de l'arête (AB, A'B') du cylindre parallèle au plan vertical et la plus rapprochée de ce plan, coupe le cylindre.

Représenter le corps qui subsiste quand on détache du cylindre le volume commun à ce cylindre et à la sphère.

1874. — On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est égal à 12^{cm} et dont la base ABC est située dans le plan horizontal de projection. On demande :

1° De trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère décrite sur BD comme diamètre et du cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD;

2° De représenter, en projection horizontale, le tétraèdre ABCD, en supposant enlevées la partie de ce corps située dans le cône et la partie située dans la sphère.

1875. — Sphère et prisme. — Ligne de terre parallèle aux petits côtés de la feuille et à 18^{cm} au-dessus du bord inférieur.

Sphère. — Le centre de la sphère est au milieu de la largeur de la feuille, en (o, o').

$$o'\omega = o\omega = 85^{mm}.$$

Rayon de la sphère $= 80^{mm}$.

Prisme. — On mène par o une droite oa faisant un angle de 45° avec la ligne de terre. On prend $oa = 45^{mm}$. Le point a étant la projection d'un point de la sphère, on cherchera sa projection verticale a'. On mènera en ce point une tangente à la sphère, tangente projetée horizontalement en oa. Cette tangente sera une arête d'un prisme à section carrée, dont un des plans diagonaux sera vertical et aura sa trace horizontale confondue avec oa. Le côté du carré est égal à 105^{mm}. On demande de représenter par ses projections la portion de la sphère supposée solide contenue dans le prisme, c'est-à-dire le solide commun aux deux corps.

1876. — Représenter par ses projections le solide commun à un cône et à un hyperboloïde ayant une génératrice commune. Les deux surfaces recouvrent des corps solides. Ligne de terre à 25^{cm} au-dessus du bord inférieur de la feuille.

Hyperboloïde de révolution : axe vertical au milieu de la feuille; centre en (O, O'), $Oa = 120^{mm}$, $O'a = 70^{mm}$; rayon OD du cercle, trace horizontale de la surface $= 110^{mm}$; rayon OB du cercle de gorge $= 45^{mm}$.

La génératrice ABS, A'O'S' parallèle au plan vertical est la génératrice commune.

Cône : cône oblique à base circulaire dans le plan horizontal. Le sommet est en (S, S') sur la génératrice commune, $aS = 180^{mm}$; le centre de la base est en C, $CA = 100^{mm}$, $CS = 120^{mm}$; le cercle de base doit passer par le point A, son rayon est donc égal à 100^{mm}.

Nota. — Pour la représentation du solide commun, on ne considérera que la nappe du cône située entre le sommet et le plan horizontal, mais on prolongera un peu la courbe d'intersection pour bien montrer sa forme.

1876 (*Paris* *). — On donne dans le plan horizontal de projection un triangle rectangle ABC : $A = 90°$, $AB = 0^{m},08$, $AC = 0^{m},06$.

Le cercle horizontal ayant A pour centre et AC pour rayon, engendre un tore en tournant autour de la parallèle à AC menée par le point B.

Construire l'intersection de ce tore et de la sphère qui, ayant un rayon égal à $0^{m},09$, touche le plan horizontal de projection au point I, milieu de BC.

On placera la ligne de terre xy suivant le petit axe de la feuille, et l'on disposera le triangle ABC de manière que AB et xy soient parallèles et à la même distance du point C.

On représentera la sphère supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore.

1877. — On donne deux points A et B situés sur une verticale; le point A est à 6^{cm} au-dessus du plan horizontal de projection, et le point B à 2^{cm} au-dessus du point A.

La verticale AB est l'axe d'un hyperboloïde de révolution; le cercle de gorge a pour centre le point A et pour rayon 4^{cm}; le parallèle P, qui a pour centre le point B, a son rayon égal à 5^{cm}.

On prend sur le cercle P un point C tel que le rayon BC soit incliné à 45° sur le plan vertical de projection; puis on décrit une sphère de centre C et de 8^{cm} de rayon.

Représenter le solide compris entre la surface de l'hyperboloïde, le plan du parallèle P et le plan horizontal de projection, en supposant enlevée la partie de ce corps qui est comprise dans la sphère.

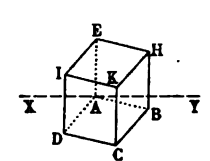
1878. — On donne un losange ABCD dont la diagonale AOC est égale à 20^{cm}, et la diagonale BOD à 12^{cm}. Le plan du losange est horizontal et situé à 3^{cm} au-dessus du plan horizontal de projection. Le côté AB est situé dans le plan vertical de projection.

Le losange en tournant autour de la diagonale AC engendre un double cône. Le cercle circonscrit au triangle COD, en tournant autour de AB, engendre un tore.

(*) La question précédente avait été annulée pour les candidats de Paris.

On demande de représenter le double cône, supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps située au-dessous du plan horizontal de projection, ainsi que la partie comprise dans le tore.

1879. — On donne un cube ABCDEHKI dont le côté est égal à 12^{cm} ; la base inférieure ABCD est située dans le plan horizontal ; le sommet A est sur la ligne de terre XY et le côté AB fait avec XY un angle de 30°. La verticale menée par le centre du cube est l'axe d'un hyperboloïde de révolution dont la droite BK est une génératrice. Le point E est le sommet d'un cône de révolution dont la surface contient le milieu de KH et dont l'axe passe par le milieu de KC. On demande :



1° De construire l'intersection du cône et de l'hyperboloïde ;

2° De représenter l'hyperboloïde supposé plein existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône, ainsi que les parties situées au-dessous du plan de la base inférieure et au-dessus du plan de la base supérieure du cube.

1880. — On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est égal à 19^{cm} et dont la face ABC est située dans le plan horizontal de projection. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD. L'arête BD est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point B comme centre avec un rayon égal à 6^{cm}.

On demande de représenter en projection horizontale le corps lorsqu'on supprime dans le tétraèdre la partie comprise dans le cône et la partie comprise dans le cylindre.

On indiquera à l'encre rouge la construction faite pour trouver un point de l'intersection du cône et du cylindre et la tangente en ce point.

1881. — On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté est égal à 19^{cm} et dont la face ABC est située dans le plan horizontal de projection. Le point A est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD. Le point B est le sommet d'un cône qui a pour base le cercle inscrit dans le triangle ACD.

On demande de représenter en projection horizontale le corps qui reste lorsqu'on supprime dans le tétraèdre tout ce qui est compris à l'intérieur des cônes.

On indiquera à l'encre rouge la construction faite pour trouver un point de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point.

1882. — Intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe est vertical et d'un tore dont l'axe est horizontal. — L'axe du cylindre se projette horizontalement en un point *c* situé à 65^{mm} en avant de la ligne de terre.

Le rayon du cercle de base est de 38^{mm}. Le centre du tore se projette horizontalement en un point o situé à 58^{mm} en avant de la ligne de terre et verticalement en o' situé à 78^{mm} au-dessus de la ligne de terre. La ligne de rappel oo' est à droite de c à une distance de 44^{mm}. La projection horizontale de l'axe du tore rencontre la ligne de terre en un point situé à 54^{mm} à droite du point de rencontre de la ligne de terre avec oo'. Le rayon du cercle générateur du tore est de 22^{mm} et la distance du centre de ce cercle à l'axe est de 51^{mm}. On demande :

1° De représenter ce qui reste du tore entaillé par le cylindre, de tracer les parties vues et les parties cachées des contours apparents ;

2° De développer sur la droite de l'épure la portion de surface cylindrique qui limite le corps ;

3° D'indiquer à l'encre rouge les constructions nécessaires pour déterminer un point de l'intersection et la tangente ; un point du développement de la courbe d'intersection tracée sur la surface du cylindre et la tangente au développement en ce point ; un point du contour apparent vertical du tore et la tangente en ce point.

Les tangentes seront tracées en rouge. — On prendra la ligne de terre parallèle aux grands côtés de la feuille, à 130^{mm} du bord inférieur.

1883. — On donne un tétraèdre régulier ABCD dont le côté a 12^{cm}. La face ABC est horizontale ; le sommet D est au-dessous de ABC.

Soit P le cône qui a pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD. Soit Q le cylindre de révolution qui a pour axe la droite BC et pour rayon 5^{cm}.

On demande la projection horizontale du solide formé par ce qui reste du tétraèdre quand on a supprimé la partie de ce tétraèdre qui est comprise dans le cône P et celle qui est comprise dans le cylindre Q.

1884. — Représenter par ses projections le solide commun à un cône et à un cylindre pleins, tous deux de révolution.

Les axes sont de front et se coupent à angle droit au-dessus du plan horizontal ; leur plan est à 10^{cm} en avant du plan vertical.

Le cône est tangent au plan horizontal ; son demi-angle au sommet est le quart d'un angle droit.

Le cylindre a 5^{cm} de rayon ; son axe rencontre le plan horizontal à 16^{cm} du sommet du cône.

N.-B. — On prendra la ligne de terre perpendiculaire aux grands côtés du cadre et à égale distance des autres côtés.

1885. — Un cercle de 10^{cm} de diamètre, situé dans un plan de front P, se projette horizontalement sur une parallèle au petit côté et à 11^{cm} du bas de la feuille. Son centre se projette verticalement sur la ligne qui divise la feuille en deux parties égales dans le sens de sa longueur, à 28^{cm} du bas.

On le prend comme cercle générateur de deux tores pleins ayant pour axes les tangentes à la circonférence en son point le plus à gauche et en son point le plus haut.

1° On tracera complètement l'intersection des deux surfaces en indiquant les constructions effectuées pour en obtenir un point quelconque et la tangente en ce point.

2° On représentera par ses projections le solide commun aux deux tores, en retranchant la partie de ce solide située en arrière d'un plan de front placé lui-même à 2^{cm} en arrière du plan P.

1886. — D'un cylindre de front supposé plein, limité par le plan horizontal et par une section droite, on enlève la portion située à l'intérieur d'un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan vertical. Représenter par ses projections le solide ainsi obtenu, en indiquant les constructions pour déterminer la tangente en un point *quelconque* de l'intersection des deux surfaces.

La trace horizontale du cylindre est un cercle de 7^{cm} de rayon dont le centre est à 8^{cm} en avant de la ligne de terre et à 3^{cm} à gauche de la ligne qui joint les milieux des petits côtés du cadre. Les génératrices sont inclinées à 45°, et on s'élève sur chacune d'elles en allant de gauche à droite. Le centre de la section droite qui limite le cylindre est à 15^{cm} au-dessus du plan horizontal.

Le sommet du cône est à 5^{cm} à droite du centre de la trace horizontale du cylindre, à 16^{cm} en avant du plan vertical, et à 9^{cm} au-dessus du plan horizontal. La génératrice horizontale du cône qui a sa trace verticale à gauche de celle de l'axe, est contenue dans le plan tangent au cylindre, mené par le sommet du cône, qui laisse le cylindre à sa droite.

On fera passer la ligne de terre par les milieux des grands côtés du cadre.

1887. — D'un quart de tore supposé plein, on enlève la portion comprise à l'intérieur d'un cône donné. Représenter, par ses projections, le solide ainsi obtenu.

L'axe du tore est vertical. Le plan de front et le plan de profil de cet axe limitent le quart de tore, lequel est situé en avant du premier plan et à droite du second.

Le cône a son sommet sur l'axe du tore. Pour définir sa directrice, imaginons la sphère dont un grand cercle coïncide avec le cercle de front qui limite le quart de tore ; prenons, par rapport à cette sphère, le plan polaire du sommet du cône; enfin, menons, à égale distance de ce plan et du sommet du cône, un second plan parallèle au premier : ce second plan coupera le quart de tore suivant la directrice qu'il s'agissait d'indiquer.

Le rayon du cercle générateur du tore sera de 8^{cm}.

La distance du centre de ce cercle à l'axe sera de 17^{cm}.

La hauteur du sommet du cône au-dessus du centre du tore sera de 4^{cm}.

La projection horizontale du centre du tore sera à 4^{cm} et la projection verticale à 13^{cm} au-dessus du centre du cadre, sur la parallèle aux grands côtés menée à 12^{cm} à gauche de ce point.

En dehors des constructions relatives aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que celles qui se rapportent à la détermination d'un point de chaque courbe et de la tangente en ce point.

1888. — Représenter par ses projections le solide qui reste quand, d'une portion de cône supposée remplie, on enlève ce qui se trouve à l'intérieur d'un cylindre donné.

Le cône est de révolution et a son axe vertical ; l'angle au sommet est droit. La portion remplie va du sommet au plan horizontal mené à 12^{cm} plus bas.

Le cylindre est aussi de révolution. L'une de ses génératrices coïncide avec celle des génératrices de front du cône qui est située à droite sur la nappe inférieure. Son axe est en avant de celui du cône ; la perpendiculaire commune à ces deux droites rencontre la seconde à 9^{cm} au-dessous du sommet ; elle a 3^{cm} de longueur.

On placera la projection horizontale du sommet du cône à 7^{cm} plus bas, et la projection verticale à 19^{cm} plus haut que le centre du cadre, sur la parallèle aux grands côtés menée par ce point.

En fait de constructions autres que celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point quelconque de chaque courbe, et celle de la tangente au même point.

1889. — L'axe vertical d'un cône de révolution se projette horizontalement en un point situé à 92^{mm} du grand côté inférieur de la feuille placée horizontalement (l'en-tête à gauche) et à 96^{mm} à droite du trait noir qui la limite : sa hauteur est de 109^{mm}, et le rayon de son cercle de base est de 55^{mm} ; une distance de 85^{mm}, comptée parallèlement aux petits côtés de la feuille, sépare la projection horizontale du centre de ce cercle de sa projection verticale.

L'axe horizontal d'un cylindre de révolution de front est à 11^{mm} de l'axe du cône : il se projette horizontalement entre le pied de cet axe et le grand côté inférieur de la feuille, et verticalement à 49^{mm} de la base du cône du côté du sommet ; son rayon est tel qu'il passe par le point situé à la même cote (49^{mm}) sur celle des génératrices de profil du cône dont la trace est la plus éloignée du grand côté inférieur de la feuille.

On demande :

De représenter par sa projection horizontale, par sa projection sur un plan vertical parallèle aux génératrices du cylindre et par ses contours apparents, ce qui reste, entre le sommet et la base, du cône solide entaillé par le cylindre ;

De développer, à droite et à la partie supérieure de la feuille, la portion

de surface conique qui limite le corps, cette surface étant fendue suivant la génératrice de profil dont la trace est la plus éloignée du grand côté inférieur de la feuille ;

D'indiquer les constructions nécessaires pour déterminer : 1° un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point; 2° les points situés sur les contours apparents du cône et du cylindre ; 3° un point quelconque du développement et la tangente en ce point.

Les constructions, les tangentes et les parties enlevées seront tracées en rouge continu ; la représentation du corps sera seule en noir, trait plein pour les parties vues, points ronds pour les parties cachées.

1890. — Un cube de 15^{cm} de côté a l'une de ses trois directions d'arêtes verticale, et une autre perpendiculaire au plan vertical.

Dans la face postérieure, considérons l'arête de gauche, l'arête inférieure et le sommet situé à l'intersection des deux autres arêtes.

La droite passant par ce sommet et par le sommet opposé du cube engendrerait, si elle tournait successivement autour des deux arêtes considérées, deux hyperboloïdes qu'on suppose remplis.

Représenter, par ses projections, le corps formé par la partie commune aux deux solides ainsi obtenus, en le limitant en haut et en bas par les plans des deux faces horizontales du cube, et en arrière par celui de la face postérieure.

On placera au centre du cadre de l'épure la projection horizontale du point de rencontre des axes des deux hyperboloïdes, et, à un centimètre au-dessus, sur une parallèle aux petits côtés, la projection verticale du même point.

En fait de constructions, et en dehors de celles qui se rapportent aux points remarquables, on ne laissera subsister, dans le tracé à l'encre, que la détermination d'un point de chaque courbe et celle de la tangente en ce point.

On n'indiquera aucune asymptote.

1891. — D'un cylindre de révolution supposé plein, limité par deux plans de profil, on enlève la portion située à l'intérieur d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical. Représenter par ses projections le solide obtenu.

La distance entre les plans de profil est de 23^{cm}.

Le centre de l'hyperboloïde se projette horizontalement à 13^{cm} du plan de profil de droite, à 10^{cm} au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 21^{cm} au-dessous de sa projection verticale ; les génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal ; le rayon du cercle de gorge est de 3^{cm}.

Le cylindre a 6^{cm} de rayon ; son axe est de front et sa pente est de 3 de base pour 1 de hauteur ; on s'élève sur cet axe en allant de droite à gauche,

et il rencontre l'axe de l'hyperboloïde à 1^{cm} au-dessous du plan du cercle de gorge.

On indiquera seulement les constructions nécessaires pour déterminer : 1° un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point ; 2° les points remarquables de l'intersection et les tangentes en ces points.

Les constructions, les tangentes et les parties enlevées seront en trait rouge continu ; la représentation du solide sera seule en noir, trait plein pour les parties vues, points ronds pour les parties cachées.

1892. — Le rayon de la sphère est de 80^{mm}. Le centre a sa projection horizontale à 90^{mm} du bord inférieur de la feuille, à 135^{mm} du bord de gauche, et à 220^{mm} de la projection verticale.

La trace horizontale du cylindre est un cercle de 60^{mm} de rayon, et dont le centre est à 140^{mm} du bord inférieur de la feuille et à 120^{mm} du bord de droite. Les génératrices sont de front, inclinées de 60° sur le plan horizontal, et s'élèvent de droite à gauche au-dessus de ce plan.

On demande de représenter par ses projections le solide qui reste après que l'on a enlevé de la sphère la portion qui se trouve à l'intérieur du cylindre ; les parties cachées seront tracées en points ronds.

On indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque et des points remarquables de l'intersection, ainsi que celle des tangentes en ces points.

1893. — On donne un cube de 16^{cm} de côté : sa face postérieure est dans le plan vertical ; l'arête inférieure de cette face est sur une ligne parallèle aux petits côtés de la feuille, à $21^{cm},5$ du bord inférieur, et l'extrémité droite de cette arête est à $2^{cm},5$ du bord droit de la feuille. Une sphère est inscrite dans ce cube.

Un cône de révolution, tangent à la face inférieure du cube, a son sommet au centre de cette face, et son axe passe par le sommet antérieur de gauche de la face supérieure du cube.

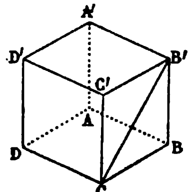
On demande de représenter :

1° Le solide commun au cône et à la sphère, en trait noir plein pour les parties vues, et en points noirs ronds pour les parties cachées ; on indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque de l'intersection et des points remarquables, ainsi que celle des tangentes en ces points ;

2° La projection en trait noir plein de la courbe d'intersection du cône et de la sphère sur un plan vertical parallèle à l'axe du cône et situé à $12^{cm},5$ du centre de la sphère.

1894. — On donne un cube ABCDA'B'C'D', dont la base ABCD est horizontale. La diagonale AC, en projection horizontale, est parallèle aux grands côtés du cadre et à 130^{mm} du bord de gauche; le sommet B est à sa droite.

Les sommets C et A sont respectivement à 130^{mm} et à 180^{mm} du bord inférieur du cadre ; la projection verticale du centre du cube est à 345^{mm} de ce bord.



La diagonale CB' de la face CBC'B' est prise comme génératrice : 1° d'un cylindre de révolution dont l'axe passe par le centre de la base supérieure A'B'C'D' ; 2° d'un hyperboloïde de révolution, dont l'axe est vertical et passe par le centre du cube.

On demande de représenter par ses projections la partie de l'hyperboloïde, supposé plein, qui est comprise entre les plans des bases supérieure et inférieure du cube et à l'intérieur du cylindre.

On représentera les lignes d'intersection en traits noirs pleins pour les parties vues, et en points noirs ronds pour les parties cachées.

On indiquera en traits rouges la construction d'un point quelconque de l'intersection de l'hyperboloïde et du cylindre et de la tangente en ce point.

1895. — Un tore à axe vertical a son centre : 1° à 140^{mm} du bord droit de la feuille ; 2° à 180^{mm} du bord inférieur en projection horizontale, et à 310^{mm} du même bord en projection verticale. Le cercle méridien a 28^{mm} de rayon, et son centre est à 68^{mm} de distance de l'axe du tore.

Une sphère de 24^{mm} de rayon touche l'axe du tore à 40^{mm} au-dessus du centre de celui-ci. En projection horizontale le centre de cette sphère est sur la bissectrice de l'angle de deux droites issues du centre du tore, l'une de front dirigée vers la gauche, l'autre de bout dirigée vers le haut de la feuille.

A cette sphère est circonscrit un cône dont le sommet est sur l'axe du tore, à 93^{mm} au-dessus du centre de celui-ci.

On demande de représenter par ses projections la partie du tore supposé plein qui est intérieure au cône. La courbe d'intersection des deux surfaces sera en traits noirs pleins pour les parties vues, en points noirs ronds pour les parties cachées.

On indiquera en traits rouges la construction : 1° d'un point quelconque de la courbe et de la tangente en ce point ; 2° d'un point de la courbe choisi sur chacun des contours apparents circulaires du tore ; 3° de la sphère, ainsi que les parties du tore et du cône en dehors de l'intersection.

1896. — On donne : 1° un paraboloïde de révolution à axe vertical, ayant son foyer à 57^{mm} au-dessous du sommet, lequel a ses projections horizontale et verticale à 170^{mm} et à 375^{mm} au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 220^{mm} du bord gauche ; 2° un cône de révolution, dont une section méridienne se compose de deux lignes droites : l'une, parallèle aux deux plans de projection et passant par le sommet du paraboloïde ; l'autre, verticale se projetant à 100^{mm} du bord gauche de la feuille. On ne considérera que la nappe de ce cône qui se projette verticalement au-dessous de la première des deux lignes indiquées et à droite de la seconde.

La courbe d'intersection de ce cône et du paraboloïde sert de directrice à un second cône ayant même sommet que le paraboloïde.

On demande de représenter, par ses projections, le solide commun aux deux cônes supposés pleins, et limités inférieurement par un plan horizontal H, situé à 54mm au-dessous de leurs sommets.

On tracera en traits pleins noirs les lignes d'intersection des deux cônes et du plan H.

On indiquera en traits rouges le contour apparent vertical du paraboloïde et la construction : 1° des points les plus hauts et les plus bas de la courbe d'intersection des deux cônes limitée au plan H ; 2° d'un point de la trace du cône de révolution sur le plan H et de la tangente en ce point.

II. — École centrale des Arts et Manufactures.

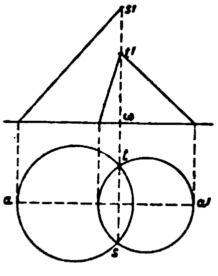
1878 (*1re session*). — Hémisphère traversé par un tore. — L'hémisphère est tangent au plan vertical et repose par sa base sur le plan horizontal; son rayon est égal à 0m,100 et son centre (c, c') est équidistant des grands côtés du cadre.

L'axe du tore (z, z') est vertical, à 0m,170 du plan vertical, et au milieu de la feuille; le centre du cercle méridien est à 0m,070 de cet axe et à 0m,051 du plan horizontal de projection; le rayon de ce cercle est égal à 0m,049. On demande de représenter l'hémisphère supposé plein et existant seul, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,150 du petit côté supérieur.

1878 (*2e session*). — On donne deux cercles sécants, de rayons R et R′, tels que leur corde commune st soit perpendiculaire à la ligne de terre.



Ces cercles, placés dans le plan horizontal, servent de bases à deux cônes, dont les sommets sont situés sur une même ligne de rappel formant le prolongement de la corde commune. Le sommet du cône de droite est projeté en (s, s') et celui du cône de gauche en (t, t'). On demande :

1° De construire les projections des deux cônes ainsi déterminés;

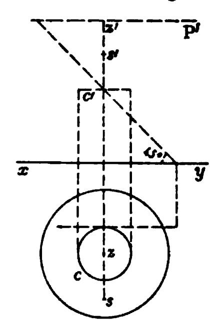
2° De déterminer le solide commun à ces deux surfaces;

3° De prolonger jusqu'au cadre de l'épure la courbe d'intersection, en faisant la construction pour un seul point;

4° De mener une tangente à la courbe en un point quelconque.

$R = 50^{mm}$, $R' = 40^{mm}$, $s'\omega = 100^{mm}$, $t'\omega = 60^{mm}$, $\alpha\alpha' = 150^{mm}$.

1879 (*1re session*). — HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION ENTAILLÉ PAR UN CÔNE. — L'axe (z, z') de l'hyperboloïde est vertical, à 0m,100 du plan vertical et au milieu de la feuille; le cercle de gorge (c, c') dont la cote vaut 0m,080, a 0m,030 de rayon, et les génératrices rectilignes de la surface font avec l'horizon un angle de 45°.

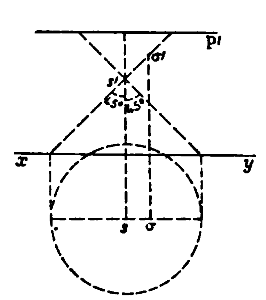


Le cône, dont le sommet (s, s') se trouve dans le plan de profil conduit par l'axe (z, z'), à 0m,050 en avant de cet axe et à 0m,040 au dessus du cercle de gorge, a pour trace horizontale le cercle ω décrit du point z comme centre, avec un rayon égal à 0m,070.

On demande de représenter l'hyperboloïde, supposé plein, et limité, d'une part, au plan horizontal P', à la cote 0m,190, de l'autre, au plan horizontal de projection, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône. On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des surfaces données et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,228 du petit côté supérieur.

1879 (*2e session*). — SOLIDE COMMUN A DEUX CÔNES DE RÉVOLUTION. — Les angles générateurs des cônes sont égaux entre eux et valent 45°. L'axe de la première surface est vertical et au milieu de la feuille : la cote du sommet est égale à 0m,115 et l'axe est à 0m,105 en avant du plan vertical. Le second cône a pour axe l'une des génératrices de front du premier, et pour cote du sommet 0m,155.



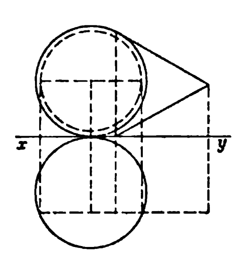
On demande de représenter le solide commun aux deux cônes, en limitant ce solide d'une part au plan horizontal P', à la cote 0m,195, de l'autre au plan horizontal de projection.

On indiquera à l'encre rouge les constructions relatives à la détermination d'un point quelconque de la ligne commune aux deux cônes et de la tangente à cette ligne au même point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,222 du petit côté inférieur.

1880. (*1re session*). — SPHÈRE ENTAILLÉE PAR UN DOUBLE CÔNE. — Une sphère donnée, dont le rayon est égal à 0m,090, touche les deux plans de projection à 0m,100 du bord gauche du cadre.

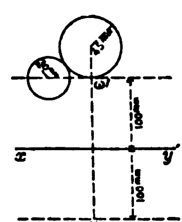
Dans le plan du petit cercle de front, distant de 0m,120 du plan vertical de projection, à la droite du centre de ce cercle et à une distance de ce centre égale à la moitié du rayon du même petit cercle, on mène une verticale : sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral. Ce triangle, en tournant autour de cette verticale, engendre un double cône. — On demande de représenter la sphère donnée, supposée pleine et opaque, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le double cône.



On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne commune à la sphère et à l'un des cônes et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,190 du petit côté inférieur.

1880 (*2e session*). — TORES CONCENTRIQUES. — Par un point (ω, ω′) situé dans le premier dièdre, à 100mm de chacun des plans de projection et au milieu de la feuille, on conduit une parallèle à la ligne de terre et une verticale. La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien tangent à cet axe en (ω, ω′) a 45mm de rayon.



La verticale est l'axe d'un autre tore concentrique au premier dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut 30mm.

On demande de construire les deux projections de l'intersection des surfaces ainsi définies. Dans la mise à l'encre, on représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores et on indiquera les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection avec la tangente en ce point.

1881 (*1re session*). — Une sphère donnée dont le rayon est égal à 0m,090 touche les deux plans de projection à 0m,100 du bord gauche du cadre. Dans le plan du petit cercle de front distant de 0m,120 du plan vertical de projection, à la droite du centre de ce cercle et à une distance de ce centre égale à la moitié du rayon du même petit cercle, on mène une verticale; sur la partie de cette verticale comprise entre son point supérieur de rencontre avec la sphère et le plan horizontal de projection, on construit un triangle équilatéral. Ce triangle, en tournant autour de cette verticale, engendre un double cône. On demande de représenter la sphère donnée, supposée pleine et opaque, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le double cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour détermi-

ner un point quelconque de la ligne commune à la sphère et à l'un des cônes, et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,190$ du petit côté inférieur.

1881 (*2e session*). — Par un point (ω, ω') situé dans le premier dièdre, à $0^m,100$ de chacun des plans de projection et au milieu de la feuille, on conduit une parallèle à la ligne de terre et une verticale. La parallèle à la ligne de terre est l'axe d'un tore dont le cercle méridien tangent à cet axe en (ω, ω') a $0^m,045$ de rayon.

La verticale est l'axe d'un autre tore concentrique au premier, dont le rayon du cercle méridien, égal à celui de son collier, vaut $0^m,030$.

On demande de construire les deux projections de l'intersection des surfaces ainsi définies.

Dans la mise à l'encre, on représentera le corps constitué par l'ensemble des deux tores, et l'on indiquera les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection, avec la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,235$ du petit côté supérieur.

1882 (*1re session*). — HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE ENTAILLÉ PAR QUATRE SPHÈRES. — L'hyperboloïde a son axe (z,z') vertical, à $0^m,105$ du plan vertical et au milieu de la feuille; la cote de son centre est $0^m,087$; les rayons de son collier (r, r') et de sa trace horizontale (θ) ont respectivement $0^m,008$ et $0^m,095$ de longueur. Les sphères dont les centres sont dans le plan du collier (r, r') touchent le plan horizontal aux extrémités (a_1, a'_1), (a_2, a'_2) (a_3, a'_3), (a_4, a'_4) des deux diamètres du cercle (θ) respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre.

On demande de construire les projections des intersections de l'hyperboloïde avec les sphères.

Dans la mise à l'encre, on représentera les parties de la surface de l'hyperboloïde qui, placées à l'extérieur des sphères, sont comprises entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal P', à la cote $0^m,171$. On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'une des lignes d'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,220$ du petit côté inférieur.

1882 (*2e session*). — INTERSECTION DE DEUX CÔNES. — Les cônes dont les sommets (s, s'), (t, t') ont respectivement pour cotes $0^m,050$ et $0^m,080$, touchent, suivant deux génératrices verticales distantes de $0^m,070$, un même plan de front F dont l'éloignement égale $0^m,035$. Les sections de ces cônes par un plan horizontal à la cote $0^m,090$, sont deux cercles égaux (γ, γ'), (γ_1, γ'_1) dont les rayons ont $0^m,042$ de longueur.

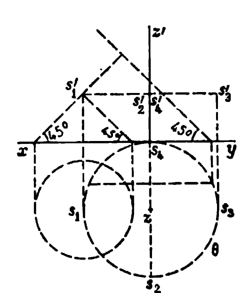
On demande de construire les projections du corps constitué par la

partie du cône de sommet (s, s') qui, placée de part et d'autre de ce sommet et à l'extérieur de l'autre cône, se trouve comprise entre : 1° un plan de front, dont l'éloignement est 0m,020; 2° un plan horizontal à la cote 0m,230; et 3° le plan horizontal de projection.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point de la courbe commune aux cônes et la tangente en ce point.

Placer la droite (s, s') à égale distance des grands côtés du cadre, et la ligne de terre à 0m,170 du petit côté inférieur.

1883 (*1re session*). — HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION A UNE NAPPE ENTAILLÉ PAR QUATRE CÔNES. — L'hyperboloïde a son axe (z, z') vertical à 0m,110 du plan vertical et au milieu de la feuille; sa trace horizontale θ touche la ligne de terre; la cote de son centre est 0m,103 et ses génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal. Les quatre cônes sont parallèles au cône asymptote de l'hyperboloïde; leurs sommets projetés horizontalement aux extrémités (s_1, s_2, s_3, s_4) de deux diamètres du cercle θ respectivement parallèle et perpendiculaire à la ligne de terre, ont pour cote commune 0m,080.



On demande de construire les projections du corps constitué par la partie de l'hyperboloïde (supposé plein et opaque) qui, placée à l'extérieur des quatre cônes, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et le plan bissecteur du dièdre antérieur supérieur.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque des différentes lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront successivement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

1883 (*2e session*). — On donne un carré, dont le centre est à 0m,110 des deux plans de projection, dont les diagonales $(bd, b'd')$, $(ac, a'c')$ ont 0m,088 de longueur, et sont respectivement verticale et parallèle à la ligne de terre. Dans le plan de ce carré, du point (c, c') comme centre, avec un rayon égal au côté du carré, on trace un cercle; ce cercle, en tournant autour de la diagonale verticale $(bd, b'd')$, engendre un tore, et le côté $(bc, b'c')$ prolongé engendre, en tournant autour de $(ad, a'd')$, un cylindre.

On demande de représenter la partie, supposée opaque, de la surface du tore comprise dans le cylindre.

On indiquera à l'encre rouge les constructions relatives à la recherche d'un point quelconque de la ligne commune au tore et au cylindre et de la tangente à cette ligne.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

1884 (*1re session*). — INTERSECTION DE DEUX CÔNES. — Une droite de front ($s\theta$, $s'\theta'$) dont l'éloignement est égal à 0m,080, dont la trace horizontale θ se trouve à 0m,050 de la projection horizontale s de son point de rencontre (s, s') avec le plan bissecteur du premier dièdre, engendre, par sa rotation autour de la verticale du point (s, s'), un premier cône.

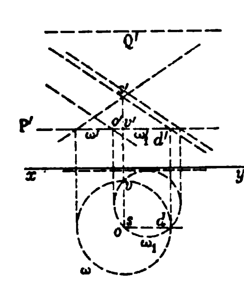
Un second cône a pour sommet le milieu (σ, σ') de la droite ($s\theta$, $s'\theta'$); sa trace horizontale est un cercle, dont le centre c se trouve en avant de la droite $s\theta$, dont le rayon est égal à la longueur de cette droite et qui passe par les extrémités s, θ de cette même droite.

On demande de construire les projections de la partie supposée solide et opaque des deux nappes du premier cône, qui, placée à l'extérieur des deux nappes du second cône et derrière le plan de front F, dont l'éloignement est 0m,140, se trouve comprise entre le plan horizontal de projection et un plan horizontal P' à la cote 0m,125.

On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,180 du petit côté inférieur, et le point (s, s') au milieu de la feuille.

1884 (*2e session*). — INTERSECTION D'UN CÔNE ET D'UN CYLINDRE. — Dans un plan horizontal P', à la cote 0m,042, on trace deux cercles : le premier (ω, ω') est la directrice d'un cône, il a 0m,050 de rayon et son centre (o, o') se trouve à 0m,064 en avant du plan vertical; le second (ω_1, ω'_1) est la directrice d'un cylindre; il passe par le centre (o, o'), par le point (v, v') le plus voisin du plan vertical et par le point le plus à droite (d, d') du premier cercle. Le sommet (s, s') du cône a pour cote 0m,075 et les génératrices du cylindre sont parallèles à la droite (sd, $s'd'$).



On demande de construire les projections du corps constitué par la partie des deux nappes du cône, supposées pleines et opaques, placée à l'intérieur du cylindre et comprise entre un plan horizontal Q', ayant une cote de 0m,145, et le plan horizontal de projection.

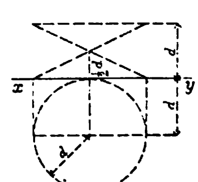
On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à 0m,115 du grand côté inférieur, et la droite (s, s') au milieu de la feuille.

1885 (1re *session*). — Intersection d'un cône et d'un cylindre. — Un cylindre de révolution, dont le diamètre d est de 0m,080, touche les deux plans de projection.

Un cône, aussi de révolution, a pour trace horizontale un cercle tangent à la ligne de terre, dont le diamètre est égal à $2d$, et pour cote de son sommet $\frac{1}{2}d$.

On propose de construire :

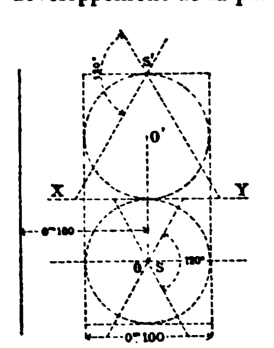


1° Les deux projections et le développement de la partie Σ de la surface du cylindre comprise dans les deux nappes du cône; 2° la projection horizontale de la surface Σ avec un plan perpendiculaire au plan vertical, incliné de 45° sur le plan horizontal et passant par le sommet du cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et du développement des lignes d'intersection et les tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à 0m,170 du grand côté inférieur, et les projections du sommet du cône à 0m,130 de la parallèle aux petits côtés du cadre qui passe au milieu de la feuille.

1885 (2e *session*). — On demande de construire les projections et le développement de la partie de la surface des deux nappes d'un cône de révolution comprise entre la surface d'un cube et celle de la sphère inscrite dans ce cube; le cube et la sphère sont supposés transparents.



Le cube, dont le côté a 0m,100, est situé dans le dièdre antérieur supérieur et deux de ses faces sont dans les plans de projection.

Le cône a son sommet au point le plus haut de la sphère inscrite, son axe est parallèle à la ligne de terre et son angle au sommet est de 120°.

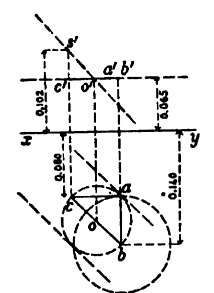
On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque des projections et du développement des lignes d'intersection et les tangentes en ces points.

Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Placer la ligne de terre à égale distance des grands côtés de la feuille, et les projections du centre du cube à 0m,100 du bord gauche du cadre.

1886 (1re *session*). — Intersection d'un cône et d'un cylindre. — On donne un triangle horizontal (abc, $a'b'c'$), à la cote 0m,065, rectangle en (a, a') et isocèle, dont le côté (ab, $a'b'$) est perpendiculaire au plan vertical et dont

les sommets (a, a'), (b, b') sont respectivement à $0^m,080$, $0^m,140$ de ce plan.



Le cône a pour directrice le cercle horizontal décrit de (b, b') comme centre avec ba pour rayon ; son sommet, projeté horizontalement en c, a pour cote $0^m,102$.

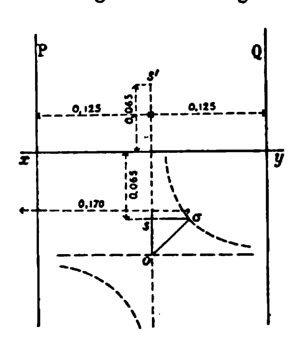
Le cylindre a pour directrice le cercle circonscrit au triangle $(abc, a'b'c')$ et pour direction de ses génératrices la droite qui joint le centre (o, o') de ce cercle au sommet (c, s') du cône.

On propose de construire les projections de la partie Σ, supposée opaque, du solide commun aux deux nappes du cône et au cylindre, comprise entre deux plans horizontaux, équidistants du plan du triangle donné, dont l'un est le plan horizontal de projection. Les parties du cylindre et du cône extérieures à Σ seront supposées enlevées.

On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points et des droites remarquables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée au bas de l'épure.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,230$ du petit côté inférieur et les droites aa', cc' à égale distance des grands côtés de la feuille.

1886 (*2e session*). — Intersection d'un cône et d'un cylindre. — On donne un triangle $os\sigma$ rectangle en s et isocèle, situé dans le plan horizontal de projection, dont les sommets s et σ, les plus voisins du plan vertical, se trouvent sur une parallèle à la ligne de terre, à $0^m,065$ de cette ligne, et, respectivement, à $0^m,135$, $0^m,170$ du bord gauche du cadre.



Le cylindre situé dans le dièdre antérieur-supérieur a pour projection horizontale de son axe la droite $s\sigma$ et touche les deux plans de projection.

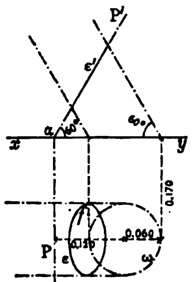
Le cône a pour sommet le point de l'axe du cylindre projeté en s ; sa trace horizontale est une hyperbole équilatère ayant un sommet réel en σ, pour centre o et pour une de ses asymptotes os.

On demande de construire l'intersection des surfaces données, puis, après avoir enlevé le cylindre, de représenter la partie, supposée opaque, de la surface des deux nappes du cône intérieure au cylindre et comprise entre deux plans de profil P, Q, placés à $0^m,125$ du point s.

On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point et celles des points et des droites remarquables.

Prendre la ligne de terre perpendiculaire aux grands côtés du cadre, et à égale distance des deux autres côtés.

1887 (*1re session*). — On donne un cylindre C dont les génératrices sont parallèles au plan vertical de projection, et un plan PαP′ perpendiculaire à ce même plan vertical.



Le cylindre a pour trace horizontale un cercle ω de 0m,060 de rayon, dont le centre O se trouve à 0m,170 en avant du plan vertical et à 0m,065 du bord droit du cadre ; ses génératrices forment un angle de 60° avec le plan horizontal, et on s'élève sur chacune d'elles en se déplaçant de droite à gauche.

Le plan PαP′ forme de même un angle de 60° avec le plan horizontal et est incliné de manière à couper le cylindre. Sa trace horizontale αP se trouve à gauche de O, à une distance de ce point égale au diamètre du cercle ω.

Ceci posé, on demande :

1° de construire la projection horizontale ε de l'intersection (ε, ε′) du plan et du cylindre ;

2° de construire les contours apparents en projection de la surface de révolution S engendrée par la rotation de la courbe (ε, ε′) autour d'un axe vertical mené par le foyer *f* de l'ellipse ε le plus voisin du plan vertical ;

3° de construire les projections de l'intersection de la surface S et du cylindre C.

Dans la mise à l'encre, on supposera le cylindre C et le plan PαP′ enlevés, et on représentera la partie de la *surface* S extérieure au cylindre, en indiquant les constructions pour déterminer un point quelconque, sa tangente et les points remarquables de l'intersection de ces deux surfaces. Ces constructions seront succinctement expliquées dans une légende placée au bas de la feuille de dessin.

Prendre la ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre, à 0m,240 du petit côté inférieur.

1887 (*2e session*). — On donne un tétraèdre régulier ABCD dont la base ABC repose sur le plan horizontal de projection en avant du plan vertical.

Le côté AB de cette base est parallèle à la ligne de terre ; le sommet C est en avant de AB par rapport à la ligne de terre. Le sommet D du tétraèdre est situé au-dessus de la base de ce tétraèdre.

L'arête du tétraèdre a une longueur de 0m,150, le côté AB de la base est à 0m,030 de la ligne de terre.

On considère les deux cônes suivants :

1° Un cône ayant pour sommet le point A et pour base le cercle inscrit dans le triangle BCD ;

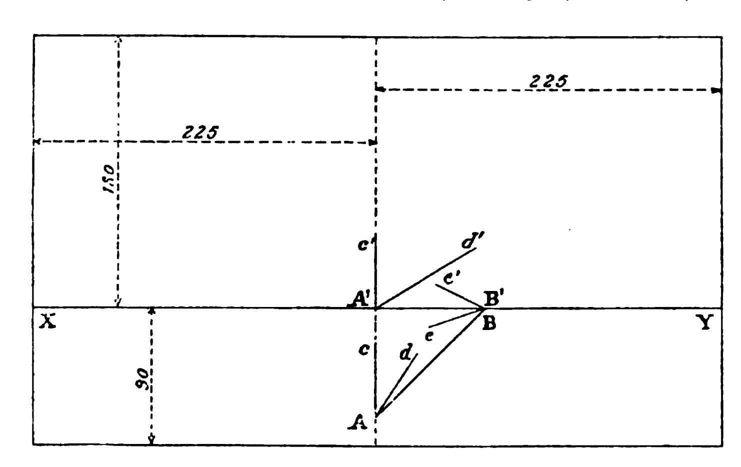
2° Un cône ayant pour sommet le point B et pour base le cercle inscrit dans le triangle ACD.

Ceci posé, on demande de déterminer les projections de l'intersection de ces deux cônes.

Dans la mise à l'encre, on supposera que le tétraèdre est opaque et que l'on enlève toute la partie de ce corps intérieure au premier cône et aussi toute celle intérieure au deuxième cône.

On indiquera les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection, sa tangente et les points remarquables de cette intersection. Ces constructions seront succinctement expliquées dans une légende placée au bas de la feuille de dessin.

1888 (*1re session*). — Intersection de deux surfaces coniques. — On donne dans le plan horizontal une droite (AB, A'B') de 100mm de longueur, faisant un angle de 45° avec la ligne de terre. Par le point A on mène une droite (A*c*, A'*c*') également inclinée sur les deux plans de projection; puis ensuite on mène la bissectrice (A*d*, A'*d*') de l'angle (*c*AB, *c*'A'B'). Par le point (B, B'), dans le plan des deux droites (AB, A'B'), (A*c*, A'*c*'), on mène une droite (B*e*, B'*e*') faisant avec (AB, A'B') un angle (*e*BA, *e*'B'A') de 30°.



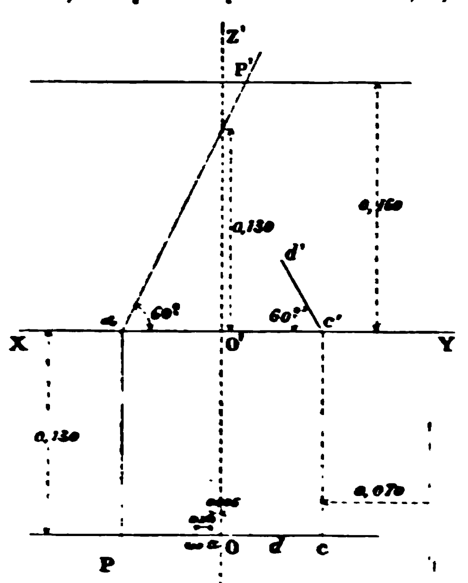
On considère maintenant la surface conique engendrée par la droite (A*c*, A'*c*') tournant autour de (A*d*, A'*d*'), puis la surface conique engendrée par la droite (AB, A'B') tournant autour de (B*e*, B'*e*') et l'on demande de déterminer l'intersection de ces deux surfaces coniques.

Dans la mise à l'encre on supposera que la surface conique ayant comme sommet (B, B') n'existe pas et que de l'autre surface (supposée opaque) il n'existe que la partie comprise entre le sommet (A, A') et l'intersection des deux surfaces coniques.

On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection et de la tangente en ce point, celle des points remarquables et des tangentes en ces points. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende placée dans la partie gauche de l'épure.

On prendra la ligne de terre parallèle aux grands côtés du cadre et à 90mm du côté inférieur du cadre. La projection verticale A' du sommet A se trouve sur la ligne de terre à égale distance des deux petits côtés du cadre.

1888 (2e *session*). — On donne : 1° un cylindre de révolution F dont l'axe est la droite de front $(cd, c'd')$; cette droite, qui fait un angle de 60° avec le plan horizontal, est éloignée de 0m,13 du plan vertical de projection; la trace horizontale c est à 0m,070 du côté vertical de droite du cadre; le rayon du cylindre est de 0m,05; 2° une surface de révolution H engendrée par une hyperbole tournant autour de l'axe vertical (O, O'Z') situé dans le même plan de front que l'axe du cylindre; le point O est à égale distance des deux côtés verticaux du cadre. L'hyperbole génératrice est située dans un plan PαP' perpendiculaire au plan vertical et faisant un angle de 60° avec le plan horizontal. Ce plan rencontre l'axe de la surface en un point dont la cote est 0m,13. L'axe de l'hyperbole est l'intersection du plan PαP' et du plan de front qui passe par l'axe de la surface de révolution. La projection horizontale de l'hyperbole a le point O pour un de ses foyers, le point a pour sommet correspondant, le point ω pour centre; la distance Oa est de 0m,005 et la distance aω de 0m,010. Les points a et ω sont tous deux à gauche du point O.



Ceci posé, on demande de trouver les projections de l'intersection des surfaces F et H.

Dans la mise à l'encre, on représentera le cylindre comme si c'était un corps plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans la surface H. On limitera le cylindre par le plan horizontal de projection et par un autre plan horizontal situé au-dessus et à 0m,160 du premier. On indiquera à l'encre rouge les constructions d'un point quelconque de l'intersection, de la tangente en ce point, et celles des points remar-

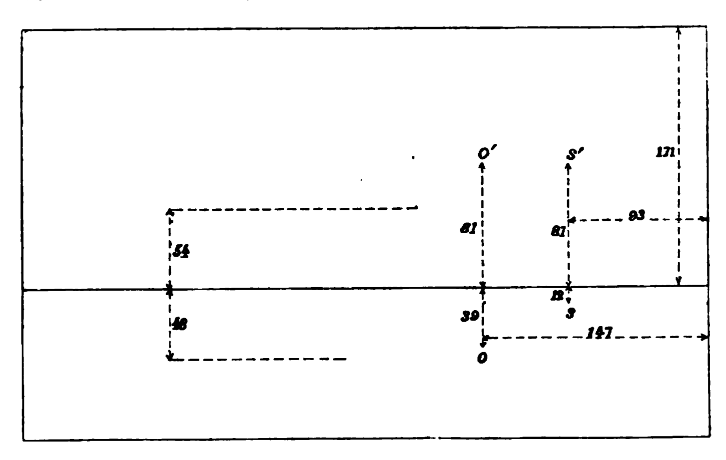
quables. Ces constructions seront succinctement expliquées à l'aide d'une légende.

Prendre la ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et à égale distance de ces deux côtés.

1889 (*1re session*). — Cylindre troué par un cône. — Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à 171mm du grand côté supérieur.

Le sommet (*s*, *s'*) du cône est à 81mm au-dessus du plan horizontal et à 12mm en avant du plan vertical : la ligne de rappel *ss'* est à 93mm à partir du côté droit du cadre.

Ce cône est circonscrit à une sphère dont le centre (*o*, *o'*) est à 81mm au-dessus du plan horizontal et à 39mm en avant du plan vertical ; la ligne de rappel *oo'* est à 147mm à partir du côté droit du cadre et la sphère est tan-



gente au plan de front qui passe par le sommet du cône. On ne considère que la nappe du cône qui s'étend du sommet vers le côté gauche du cadre.

Le cylindre est de révolution, et son axe, parallèle à la ligne de terre, est à 54mm au-dessus du plan horizontal et à 48mm en avant du plan vertical; ce cylindre passe par le sommet du cône.

On demande de représenter par ses deux projections le cylindre supposé plein et limité d'une part au plan de profil *ss'*, d'autre part au côté gauche du cadre, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point;

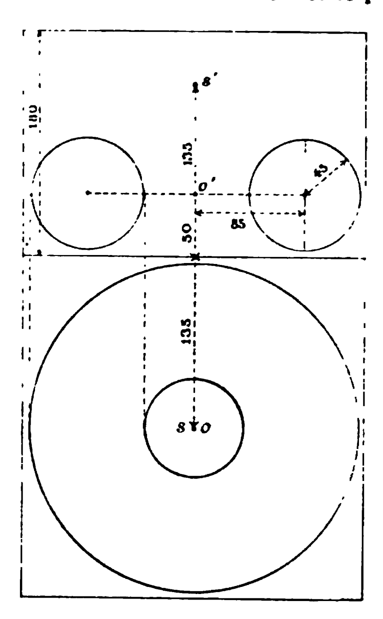
2° Les points de l'intersection situés sur les contours apparents des deux surfaces;

3° La tangente en (*s*, *s'*) à l'intersection;

4° L'asymptote de l'intersection.

1889 (2e *session*). — INTERSECTION D'UN TORE ET D'UN CÔNE. — Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 180mm du petit côté supérieur.

L'axe du tore est vertical et se projette en o, à égale distance des grands côtés du cadre et à 135mm en avant de la ligne de terre. Le centre du tore est à 50mm au-dessus du plan horizontal. Le centre du cercle générateur du tore est à 85mm de l'axe et le rayon de ce cercle est de 45mm. Le sommet du cône est sur l'axe du tore à 135mm au-dessus du plan horizontal. La directrice du cône est la section faite dans le tore par un plan perpendiculaire à la ligne de terre et situé à droite de l'axe à une distance de cet axe égale à 85mm.



On demande de représenter par ses deux projections le tore supposé plein, en supprimant la portion de ce corps comprise à l'intérieur du cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point.

1890 (1re *session*). — INTERSECTION DE DEUX CÔNES. — Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 255mm du petit côté supérieur.

Les bases des cônes sont des cercles dont les rayons sont égaux à 80mm et dont les plans sont perpendiculaires à la droite (ab, $a'b'$) qui joint leurs centres (a, a') et (b, b').

La ligne de rappel aa' est à 120mm du grand côté gauche du cadre, et la ligne de rappel bb' à 145mm du même grand côté. La cote et l'éloignement du point (a, a') sont égaux à 80mm ; la cote du point (b, b') est de 145mm et son éloignement de 105mm.

On prend les diamètres horizontaux des cercles de base, on joint les extrémités de ces diamètres voisines du grand côté gauche du cadre et, sur la droite ainsi obtenue, on prend le point dont la cote est égale à 248mm ; c'est le sommet du cône qui a pour base le cercle (a, a'). On joint les secondes extrémités des diamètres horizontaux des cercles de base, et, sur la droite ainsi obtenue, on prend le point dont la cote est égale à 3mm ; c'est le sommet du cône qui a pour base le cercle (b, b').

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide

formé par l'ensemble des deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :

1° Un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points ;

2° Un point quelconque de la trace de chaque cône sur le plan de base de l'autre et les tangentes en ces points ;

3° Un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point ;

4° Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases, des traces sur les plans de base et de l'intersection, situés sur ces génératrices.

On n'indiquera pas d'autre construction.

1890 (*2e session*). — Intersection de deux cônes de révolution. — Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,255$ du petit côté supérieur.

La ligne de rappel *oo'* du centre du cercle de base du premier cône est à égale distance des grands côtés du cadre. La cote du point (*o*, *o'*) est 100^{mm} et son éloignement 93^{mm}. La ligne de rappel *ss'* du sommet du premier cône est à 87^{mm} de *oo'* vers la droite. La cote du point (*s*, *s'*) est 210^{mm} et son éloignement 162^{mm}. Le rayon du cercle de base est de 80^{mm}.

On prend le diamètre horizontal de ce cercle de base et on fait tourner de 90° le premier cône autour de cette horizontale, de manière que la cote du sommet reste supérieure à celle du centre de la base ; on a ainsi le second cône.

On demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble des deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base. On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour placer les données et pour déterminer :

1° Un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points ;

2° Un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point ;

3° Les génératrices de contour apparent des deux cônes et les points des bases et de l'intersection situés sur ces génératrices.

On n'indiquera pas d'autre construction.

1891 (*1re session*). — Cylindre limité par une surface gauche. — Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre, à $0^m,10$ du grand côté inférieur. Porter, sur cette ligne, à partir du petit côté gauche du cadre, $0^m,19$. Le point obtenu est la projection horizontale de l'axe vertical d'une surface gauche de révolution. Le cercle de gorge, qui a

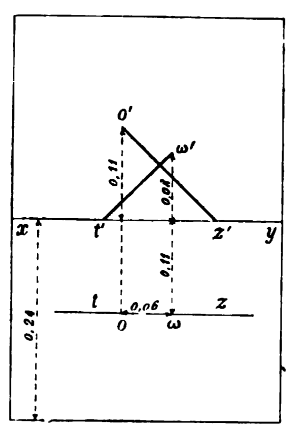
0m,03 de rayon, est projeté verticalement à 0m,08 au-dessus de la ligne de terre. La droite de front, qui engendre la surface gauche, est projetée en avant de la ligne de terre et a sa trace à horizontale 0m,03 du petit côté gauche du cadre, de sorte que sa pente est $\frac{1}{2}$.

Par la trace horizontale de cette génératrice, on fait passer un cercle de 0m,04 de rayon, dont le centre est à 0m,05 en avant de la ligne de terre et est plus rapproché de l'axe de la surface gauche que ne l'est la trace horizontale de la génératrice. Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la génératrice de front donnée de la surface gauche de révolution.

Représenter, par ses projections et ses contours apparents, la portion du cylindre, supposé plein et opaque, comprise entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal situé à 0m,16 au-dessus de celui-ci, et extérieure à la surface gauche.

L'extérieur de la surface gauche est la portion de l'espace où n'est pas situé l'axe de révolution. On n'indiquera à l'encre rouge que les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de la courbe d'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point, les points extrêmes, les points situés sur les contours apparents, les asymptotes.

1891 (*2e session*).— Intersection de deux cônes de révolution.— On donne deux cônes de révolution. Les deux axes (oz, $o'z'$) et (ωt, $\omega' t'$) sont de front, inclinés à 45° sur le plan horizontal et perpendiculaires entre eux. Le plan de front qui les contient est à 0m,11 en avant du plan vertical. La cote du sommet (o, o') est de 0m,11 ; celle du sommet (ω, ω') est de 0m,08 ; la distance $o\omega$ est de 0m,06 ; le milieu de $o\omega$ est à égale distance des grands côtés du cadre ; le demi-angle au sommet de chacun des cônes est de 45°.

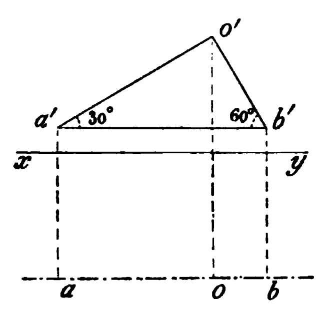


On demande de représenter par ses projections, ses contours apparents et leur ligne d'intersection, l'ensemble des deux cônes terminés d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part au plan horizontal dont la cote est 0m,17.

On n'indiquera à l'encre rouge que les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point, un point quelconque de chacune des sections planes qui limitent les cônes et les tangentes en ces points.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre à 0m,24 du petit côté inférieur.

1892. (*1re session*). — Assemblage de deux cônes. — Dans un plan de front, dont la trace horizontale *aob* est à 0m,128 en avant de la ligne de terre, on donne un triangle rectangle dont l'hypoténuse *a'b'* est horizontale et à 0m,01 au-dessus de la ligne de terre, son extrémité gauche *a'* étant à 0m,038 du côté gauche du cadre et son extrémité *b'* étant à 0m,17 du même côté du cadre. L'angle en *a'* est de 30°.



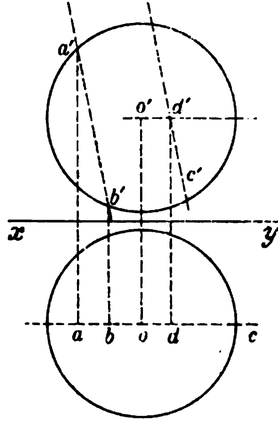
On fait tourner ce triangle successivement autour de chacun des côtés de l'angle droit, de manière à engendrer deux cônes, et l'on demande de représenter par ses deux projections le corps solide formé par l'ensemble de ces deux cônes supposés pleins et limités chacun à son sommet et à sa base.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer : 1° un point quelconque de chacune des bases et les tangentes en ces points; 2° un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point.

On n'indiquera pas d'autre construction.

On pourra, à l'aide d'encre de couleur, tracer un certain nombre de génératrices de chacun des cônes; les génératrices vues en trait plein, les génératrices cachées en trait discontinu.

Le cadre a 0m,45 sur 0m,27; la ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à 0m,19 du petit côté supérieur.



1892 (*2e session*). — Sphère entaillée par un cylindre. — On donne une sphère pleine, on la coupe par un cylindre, on enlève de la sphère la partie qui est dans l'intérieur du cylindre, on demande de représenter par ses projections la sphère solide dans laquelle on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.

Le centre de la sphère est projeté en (o, o'); les points o et o' sont à 0m,102 de la ligne de terre et la droite oo' est au milieu de la feuille; le rayon de la sphère a 0m,092 de longueur.

La surface cylindrique de l'entaille est engendrée par la droite $(ab, a'b')$ qui tourne autour de l'axe $(cd, c'd')$. On a $oa = 0^m,061$, $ob = od = 0^m,031$.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point;

2° Les points situés sur les contours apparents de la sphère et du cylindre;

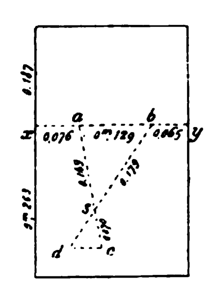
3° Le point le plus haut en projection verticale;

4° Le point le plus à droite en projection verticale.

Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$. La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et à $0^m,205$ du petit côté inférieur.

1893 (*1re session*). — Cône entaillé par un cylindre. — L'axe d'un cône de révolution supposé plein est situé dans le plan horizontal de projection; on considère les deux demi-nappes de ce cône situées au-dessus du plan horizontal et limitées à des plans parallèles; on les coupe par un cylindre oblique à base de cercle; on enlève du cône les parties situées dans l'intérieur du cylindre. On demande de représenter par ses projections le demi-cône solide dans lequel on a pratiqué ainsi une entaille cylindrique.

L'axe du cône est la bissectrice de l'angle *s* du triangle *asb*.



Le côté *ab* coïncide avec la ligne de terre, et l'on a

$xa = 0^m,076, \quad ab = 0^m,129, \quad by = 0^m,065,$
$as = 0^m,149, \quad bs = 0^m,179.$

Les plans parallèles qui limitent le cône sont les suivants :

1° Le plan mené par la ligne de terre et dont la partie supérieure fait avec la partie antérieure du plan horizontal un angle de 60°;

2° Le plan parallèle au précédent dont la trace horizontale *cd* est déterminée par $sc = 0^m,070$.

La base du cylindre est un cercle de $0^m,060$ de rayon, situé dans le plan vertical de projection au-dessus de la ligne de terre et tangent en *b* à cette ligne; les génératrices horizontales du cylindre sont parallèles à *sb*.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer :

1° Un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point;

2° Un point quelconque de l'une des bases du cône et la tangente en ce point;

3° Un point quelconque de la trace du cylindre sur l'un des plans de base du cône et la tangente en ce point.

Le cadre a $0^m,450$ sur $0^m,270$. La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre à $0^m,263$ du petit côté inférieur et à $0^m,187$ du petit côté supérieur.

1893 (*2e session*). — Intersection d'un tore et d'un cône. — Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 180^{mm} du petit côté supérieur.

L'axe du tore est vertical et se projette en *o*, à égale distance des grands côtés du cadre et à 145^{mm} en avant de la ligne de terre.

Le centre du tore est à 50^{mm} au-dessus du plan horizontal. Le centre du cercle générateur du tore est à 85^{mm} de l'axe et le rayon de ce cercle est de 45^{mm}.

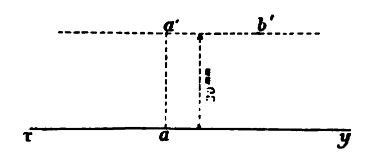
Le sommet du cône est sur l'axe du tore à 135^{mm} au-dessus du plan horizontal. La directrice du cône est la section faite dans le tore par un plan bitangent perpendiculaire au plan vertical et incliné dans le sens qu'indique la figure.

On demande de représenter par ses deux projections le tore supposé plein, en supprimant la portion de ce corps comprise à l'intérieur du cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point.

Le cadre a 0^{m},450 sur 0^{m},270.

1894 (*1re session*). — Intersection d'un paraboloïde et d'un cône. — La ligne de terre *xy* étant tracée parallèlement aux grands côtés du cadre à une distance de 60^{mm} au-dessous du milieu du cadre, on considère, dans le plan vertical, une parabole dont l'axe est la verticale *aa'* placée au milieu du cadre, dont la directrice est la ligne de terre et dont le sommet *a'* est à 30^{mm} au-dessus de la ligne de terre : cette parabole, en tournant autour de son axe, engendre un paraboloïde. On considère, d'autre part, un cône de révolution ayant pour sommet le sommet (*a*, *a'*) de la parabole et pour axe une parallèle (*ab*, *a'b'*) à la ligne de terre ; l'angle des génératrices de ce cône avec son axe est supposé égal à 45°.



1° Construire les projections de l'intersection de ces deux surfaces, et représenter leur solide commun, en supposant le cône prolongé de part et d'autre de son sommet.

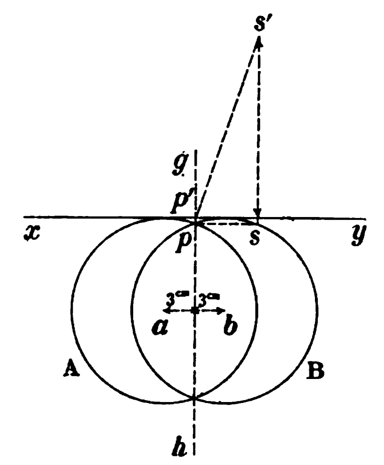
2° Construire la projection de l'intersection sur un deuxième plan vertical ayant pour trace horizontale la perpendiculaire en *a* à la ligne de terre.

On indiquera à l'encre rouge la construction d'un point et de la tangente en ce point à la parabole et à chacune des projections de l'intersection.

1894 (*2e session*). — Intersection d'un cône et d'un cylindre. — La ligne de terre *xy* étant tracée au milieu du cadre, parallèlement aux petits côtés, on décrit dans le plan horizontal deux cercles égaux A et B de 9^{cm} de rayon, tangents à la ligne de terre et ayant leurs centres respectifs *a* et *b* à 3^{cm} de part et d'autre de la ligne médiane *gh* du cadre. Soient (*p*, *p'*) le point d'intersection de ces deux cercles le plus rapproché de la ligne de terre, (*s*, *s'*) le point dont la cote est 18^{cm} et dont la projection horizontale *s* est à l'intersection du cercle B et de la parallèle à la ligne de terre menée par *p*.

On considère :

1° Un cône dont la base est le cercle A dans le plan horizontal et dont le sommet est le point (*s*, *s'*) ;



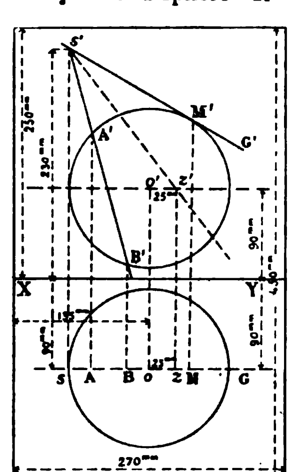
2° Un cylindre dont la base est le cercle B dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à la droite (*ps*, *p's'*).

Construire la partie de la projection horizontale de l'intersection de ces deux surfaces comprise entre les bords du cadre, et la partie de la projection verticale située au-dessus de la ligne de terre jusqu'aux bords du cadre.

On indiquera à l'encre rouge la construction des points et droites remarquables.

On supposera les deux surfaces opaques.

1895 (*1re session*). — Tronc de cône entaillé par une sphère. — On considère une sphère de centre O dont la cote et l'éloignement sont fixés à 90mm, le rayon de la sphère R = 80mm, et un cône de révolution dont le sommet (*s*, *s'*) est ainsi défini : la projetante de ce point se confond avec la tangente commune aux deux contours apparents de la sphère vers la gauche, la projection horizontale de S est située sur le contour apparent de la sphère et la cote de ce point est de 230mm au-dessus du plan horizontal de projection. L'axe de ce cône est une droite de front (*sz*, *s'z'*) qui rencontre le diamètre de la sphère parallèle à la ligne de terre en un point (*z*, *z'*) situé à droite de O et à une distance de 25mm. La génératrice de front (*s*G, *s'*G') du cône s'obtient en menant de (*s*, *s'*) une tangente au grand cercle de front de la sphère dont le contact a lieu en (M, M').



Cela étant, on demande :

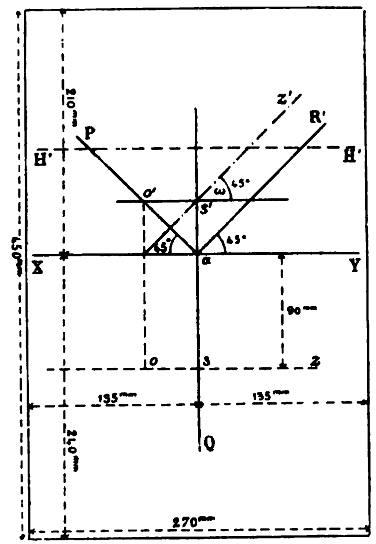
1° De déterminer l'intersection du cône et de la sphère. On aura soin de déterminer, outre un point courant et sa tangente, les points et tangentes remarquables;

2° De représenter le tronc de cône limité par les sections droites des points (A, A') et (B, B') où l'intersection rencontre le contour apparent vertical de la sphère en supprimant de ce tronc de cône la portion comprise dans la sphère.

1895 (*2e session*). — Dans le plan de bout P'αQ incliné à 45° sur le plan horizontal on considère un cercle de 60mm de rayon tangent au plan horizontal; le centre de ce cercle est éloigné de 90mm du plan vertical. Ce

cercle est la directrice d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la ligne de terre.

On considère d'autre part un cône de révolution dont le sommet (s, s') est placé sur l'axe de ce cylindre. La projetante de (s, s') se confond avec αQ et l'axe de ce cône est perpendiculaire au plan $P'\alpha Q$.



Le 1/2 angle ω au sommet du cône est de 45°. Ceci posé, on demande :

1° De déterminer complètement la courbe d'intersection du cylindre avec les deux nappes du cône;

2° De représenter le solide formé par le cône et le cylindre en limitant ce solide aux deux plans de bout symétriques $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$.

Le cône sera limité à sa partie supérieure par le plan horizontal H' tangent au cylindre suivant la génératrice culminante.

Les deux plans $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$ ainsi que les surfaces du cône et du cylindre sont opaques, le plan H' horizontal supérieur sera seul considéré comme étant transparent.

Observations. — Dans le tracé à l'encre, les portions de la courbe d'intersection du cône et du cylindre qui sont extérieures aux deux plans $P'\alpha Q$ et $R'\alpha Q$ seront tracées à l'encre bleue.

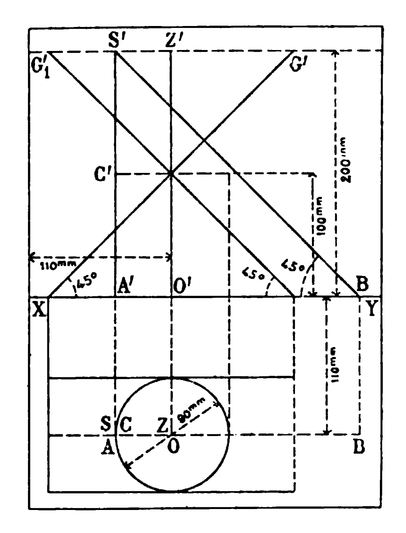
On indiquera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point quelconque de la ligne d'intersection ou des sections planes et les tangentes en ces points. Le tracé au net devra faire ressortir les constructions des points ou droites remarquables.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à 0m,210 du côté supérieur.

1896 (*1re session*). — Intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'un cône. — On considère :

1° Un hyperboloïde de révolution à axe vertical (oz, o'z') dont le cercle de gorge situé dans le plan horizontal de cote 100mm a 90mm de diamètre. Les génératrices de cet hyperboloïde font avec le plan horizontal un angle de 45°. L'axe de la surface est à 110mm en avant du plan vertical.

2° Un cône à base horizontale circulaire défini de la manière suivante : Le sommet (s, s') du cône est situé dans le plan de front de l'axe (oz, o'z') de l'hyperboloïde. La cote de ce point est fixée à 200mm. L'une des génératrices de front du cône est la verticale (sA, s'A') qui passe par l'extrémité de gauche du rayon du cercle de gorge, l'autre génératrice de front est la droite (sB, s'B') inclinée à 45° sur le plan horizontal.



Cela posé, on demande :

1° De tracer les projections de l'intersection du cône et de l'hyperboloïde, en ayant soin de déterminer les points et tangentes remarquables des courbes ainsi obtenues;

2° De définir la direction des plans donnant des sections anti-parallèles à la base du cône;

3° De représenter complètement le solide formé par le cône et l'hyperboloïde, les deux surfaces étant limitées de la manière suivante :

(*a*) au plan horizontal de projection;

(*b*) au plan horizontal passant par le sommet du cône;

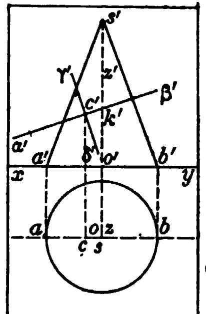
(*c*) au plan tangent au cône suivant la génératrice (SB, S'B');

(*d*) au plan de section anti-parallèle à la base passant par le point (A, A') trace horizontale de la génératrice verticale du cône.

Cadre de 0,27 sur 0,45. Ligne de terre parallèle aux petits côtés du cadre et au milieu de la feuille.
La droite o'z' est à 110mm du côté gauche du cadre.

1896 (*2e session*). — On considère : 1° un cône de révolution à axe vertical (os, $o's'$).

La base du cône dans le plan horizontal est un cercle de 80mm de rayon. La cote du sommet du cône est de 210mm; 2° un ellipsoïde de révolution à axe de front (ck, $c'k'$) dirigé perpendiculairement à la génératrice de front (sb, $s'b'$) et rencontrant l'axe du cône en k' ($c'k' = 25^{mm}$, $o'k' = 80^{mm}$). Le centre de l'ellipse méridienne est en (c, c'). Les demi-axes de cette ellipse sont respectivement $c'\alpha' = 110^{mm}$ et $c'\gamma = 60^{mm}$. On demande :



1° de tracer les contours apparents des deux surfaces;

2° de déterminer les projections de l'intersection de ces deux surfaces en ayant soin d'indiquer les constructions nécessaires pour obtenir les points et les tangentes remarquables de ces courbes ;

3° de représenter l'ensemble formé par le cône et l'ellipsoïde, en supprimant de cette dernière surface les parties extérieures aux deux plans tangents au cône suivant les génératrices de front (sa, $s'a'$) et (sb, $s'b'$).

NOTA. — Les portions des contours apparents extérieures au solide représenté se traceront en traits bleus.

Cadre de 27cm sur 45cm. xy parallèle aux petits côtés du cadre et au milieu. $o's'$ parallèle aux grands côtés et au milieu de la feuille.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER

LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

INTRODUCTION

La méthode des projections.

CHAPITRE I

Représentation des corps.

CHAPITRE II

La Ligne droite.

CHAPITRE III

Le Plan.

CHAPITRE IV

La droite et le plan combinés.

CHAPITRE V

Les méthodes de la Géométrie descriptive.

CHAPITRE VI

Distances et angles ; Application à la construction des angles trièdres.

CHAPITRE VII

Sections planes, intersections et ombres des polyèdres.

CHAPITRE VIII

Notions de géométrie cotée.

LIVRE II

LA DÉTERMINATION DES SURFACES ET LES PLANS TANGENTS

CHAPITRE I

Détermination des surfaces.

CHAPITRE II

Plans tangents aux cônes et aux cylindres.

CHAPITRE III

Plans tangents à la sphère.

CHAPITRE IV

Plans tangents et normales aux surfaces de révolution.

LIVRE III

SECTIONS PLANES DES SURFACES

CHAPITRE I

Sections planes des cônes et des cylindres.

CHAPITRE II

Développement de la surface latérale d'un cône ou d'un cylindre ; transformée d'une section plane.

CHAPITRE III

Sections planes de la sphère.

CHAPITRE IV

Sections planes des surfaces de révolution.

LIVRE IV

INTERSECTIONS DE SURFACES

CHAPITRE I

Intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques.

CHAPITRE II

Intersection d'un cône ou d'un cylindre avec une surface de révolution.

CHAPITRE III

Intersection de deux surfaces de révolution.

